

TD 25 : FONCTIONS VECTORIELLES

PSI 1 2025-2026

jeudi 26 mars 2026

25.1 a. Posons le polynôme de LAGRANGE $P = \frac{f(a)(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)(X-c)(X-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)}$.
On vérifie bien que $P \in \mathbb{R}_2[X]$ et que $P(a) = f(a)$, $P(b) = f(b)$ et $P(c) = f(c)$. Soit $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $Q(a) = f(a)$, $Q(b) = f(b)$ et $Q(c) = f(c)$, alors $(P-Q)(a) = (P-Q)(b) = (P-Q)(c) = 0$ donc le polynôme $P-Q \in \mathbb{R}_2[X]$ a trois racines distinctes (par hypothèse) donc il est nul et on en déduit que $P = Q$. On a bien prouvé l'existence et l'unicité $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(a) = f(a)$, $P(b) = f(b)$ et $P(c) = f(c)$, il s'agit de $P = \frac{f(a)(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)(X-c)(X-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)}$.

b. On définit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x) - P(x)$. La fonction g est de classe C^2 sur \mathbb{R} par opérations et, d'après la question précédente, on a $g(a) = g(b) = g(c) = 0$. En supposant $a < b < c$ (les six cas sont similaires), on peut appliquer le théorème de ROLLE à g sur $[a; b]$ et sur $[b; c]$ et il existe donc deux réels $\alpha \in]a; b[$ et $\beta \in]b; c[$ tels que $g'(\alpha) = g'(\beta) = 0$. Comme $\alpha < b < \beta$, on peut à nouveau appliquer le théorème de ROLLE à la fonction g' de classe C^1 sur \mathbb{R} pour avoir $d \in]\alpha; \beta[$ tel que $g''(d) = 0$. Ainsi, avec l'expression vue en **a.**, cela donne bien $g''(d) = 0 = f''(d) - 2\left(\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}\right)$.

25.2 a. f est dérivable sur $]0; +\infty[$ par opérations et $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$. Ainsi, f est strictement croissante sur $]0; e]$ et strictement décroissante sur $]e; +\infty[$ donc $\text{Max}_{\mathbb{R}_+^*}(f) = f(e) = \frac{1}{e}$. Le graphe de f admet une asymptote "verticale" d'équation $x = 0$ en 0^+ et une asymptote "horizontale" d'équation $y = 0$ en $+\infty$. f est négative sur $]0; 1]$ et strictement positive sur $]1; +\infty[$. Ainsi, f réalise une bijection strictement croissante entre $]1; e[$ et $]0; \frac{1}{e}[$ et une bijection strictement décroissante entre $]e; +\infty[$ et $]0; \frac{1}{e}[$.

b. Analyse : supposons que $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ vérifie $a < b$ et $a^b = b^a$, alors $b \ln(a) = a \ln(b)$ donc $f(a) = f(b)$. Ceci impose, d'après l'étude précédente, que $a \in]1; e[$, $b \in]e; +\infty[$ avec $f(a) = f(b) \in]0; \frac{1}{e}[$. Le seul entier dans $]1; e[$ étant 2, on a donc $a = 2$. Comme f réalise une bijection entre $]e; +\infty[$ et $]0; \frac{1}{e}[$, il existe un seul réel $x \in]e; +\infty[$ tel que $f(x) = f(2)$. Comme $f(4) = \frac{\ln(4)}{4} = \frac{\ln(2^2)}{4} = \frac{2 \ln(2)}{4} = \frac{\ln(2)}{2} = f(2)$, on a $x = b = 4$.

Synthèse : bien sûr $(2, 4) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $2 < 4$ et $2^4 = 4^2 = 16$.

Ainsi, le seul couple vérifiant $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $a < b$ et $a^b = b^a$ est $(a, b) = (2, 4)$.

25.3 a. Les points réguliers $M(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de Γ sont ceux où $(x'(t), y'(t), z'(t)) \neq (0, 0, 0)$. Or, on a $x'(t) = \cos(t) + \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos(t) + \cos(2t)$; $y'(t) = -\sin(t) - 2 \sin(t) \cos(t)$; $z'(t) = 2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)$.

Ainsi, $x'(t) = 2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{3t}{2}\right)$, $y'(t) = -2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{3t}{2}\right)$ et $z'(t) = 2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)$. On peut donc factoriser $(x'(t), y'(t), z'(t)) = 2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{3t}{2}\right), -\sin\left(\frac{3t}{2}\right), 1\right)$. Or le vecteur $\left(\cos\left(\frac{3t}{2}\right), -\sin\left(\frac{3t}{2}\right), 1\right)$ ne peut pas s'annuler donc les points réguliers de Γ sont ceux qui vérifient $\cos\left(\frac{t}{2}\right) \neq 0$ équivalent à $t \neq \pi [2\pi]$.

On pouvait aussi dire que $(x'(t), y'(t), z'(t)) = (0, 0, 0) \iff x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 = 0$ or, par un calcul direct, $x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 = 2(\cos(t) \cos(2t) + \sin(t) \sin(2t)) + 2 + 4 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = 8 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$.

Si $t \neq \pi[2\pi]$, la tangente à Γ en $M(t)$ a pour vecteur directeur $v(t) = \left(\cos\left(\frac{3t}{2}\right), -\sin\left(\frac{3t}{2}\right), 1\right)$ donc est paramétrée par $x = x(t) + \lambda \cos\left(\frac{3t}{2}\right)$, $y = y(t) - \lambda \sin\left(\frac{3t}{2}\right)$, $z = z(t) + \lambda$ (avec $\lambda \in \mathbb{R}$).

b. L'axe (Oz) et la tangente Γ en $M(t)$ ont pour vecteurs directeurs respectifs e_3 et $v(t)$ donc l'angle $\theta \in [-\pi; \pi]$ (non orienté) cherché vérifie $\cos(\theta) = \frac{(e_3|v(t))}{\|e_3\| \|v(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ donc $\theta = \text{Arccos}(\cos(\theta)) = \frac{\pi}{4}$.

c. L'image de \mathbb{R} par la fonction $t \mapsto z(t) = 4 \sin\left(\frac{t}{2}\right)$ est l'intervalle $[-4; 4]$. L'image de Γ par la projection orthogonale sur (xOy) est une cardioïde puisque $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1 + \cos(t)$ et $x = r(t) \sin(t)$, $y = r(t) \cos(t)$.

d. Comme $t \mapsto M(t)$ est 4π -périodique, que $M(-t) = (x(-t), y(-t), z(-t)) = (-x(t), y(t), -z(t))$ est l'image de $M(t)$ par le demi-tour d'axe (Oy) , que $M(2\pi - t) = (x(2\pi - t), y(2\pi - t), z(2\pi - t)) = (-x(t), y(t), z(t))$ est l'image de $M(t)$ par la réflexion de plan (yOz) , qu'un demi-tour et une réflexion sont 2 isométries de l'espace, $L = \int_{-\pi}^{3\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = 2 \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = 4 \int_0^{\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$ est la longueur de la courbe Γ . Ainsi, $L = 8\sqrt{2} \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{t}{2}\right) dt = 8\sqrt{2} \left[2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{\pi} = 16\sqrt{2} \sim 22,63$.

25.4 Le domaine de définition est $\mathcal{D}_f =]-2; 0[\cup]0; +\infty[$ (intersection des domaines de x et y). Les fonctions x et y sont dérivables sur \mathcal{D}_f et on a $x'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t+2} = \frac{(t+1)(t-2)}{t^2(t+2)}$, $y'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{(t-1)(t+1)}{t^2}$. Ainsi, x est croissante sur $] -2; -1]$ et sur $[2; +\infty[$ et décroissante sur $[-1; 0[$ et $]0; 2]$ alors que y est croissante sur $] -2; -1]$ et $[2; +\infty[$ et décroissante sur $[-1; 0[$ et sur $]0; 1]$. On a une tangente verticale pour $t = 2$ au point $\left(\frac{1}{2} + \ln(4), \frac{3}{2}\right)$ et une tangente horizontale pour $t = 1$ au point $(1 + \ln(3), 2)$. Le point $(-1, -2)$ obtenu pour $t = -1$ est un point stationnaire et $\vec{f}''(t) = \left(\frac{2}{t^3} - \frac{1}{(t+2)^2}, \frac{2}{t^3}\right)$, $\vec{f}'''(t) = \left(-\frac{6}{t^4} + \frac{2}{(t+2)^3}, -\frac{6}{t^4}\right)$ donc $\vec{f}'''(-1) = (-3, -2) \neq (0, 0)$ donc $p = 2$ et $\vec{f}'''(-1) = (-4, -6)$ non colinéaire au précédent donc $q = 3$. On a donc en $(-1, -2)$ pour $t = -1$ un point de rebroussement de première espèce.

De plus, $\lim_{t \rightarrow -2^+} x(t) = +\infty$ alors que $y(-2) = -\frac{5}{2}$ donc la droite $y = -\frac{5}{2}$ est asymptote verticale à la courbe.

Comme $\lim_{t \rightarrow 0^-} x(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} y(t) = -\infty$, que $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{y(t)}{x(t)} = 1$ et que $\lim_{t \rightarrow 0^-} y(t) - x(t) = -\ln(2)$, la droite $y = x - \ln(2)$ est asymptote oblique à la courbe quand $t \rightarrow 0^-$. Même chose lorsque $t \rightarrow 0^+$. Enfin, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$ mais $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = +\infty$: branche parabolique de direction (Oy) si $t \rightarrow +\infty$.

25.5 a. D'abord, puisque l'équation est linéaire, on vérifie que l'application v_t est bien linéaire. En effet, soit $(Y_1, Y_2) \in (\mathbb{R}^n)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors en notant X_1 et X_2 les solutions respectives des deux problèmes de CAUCHY $(X'_1(t) = A(t)X_1(t)$ avec $X_1(0) = Y_1$) et $(X'_2(t) = A(t)X_2(t)$ avec $X_2(0) = Y_2)$, alors $X_1 + \lambda X_2$ est de classe C^1 par combinaison linéaire et on a

$$(X_1 + \lambda X_2)'(t) = X'_1(t) + \lambda X'_2(t) = A(t)X_1(t) + \lambda A(t)X_2(t) = A(t)(X_1(t) + \lambda X_2(t))$$

avec $(X_1 + \lambda X_2)(0) = X_1(0) + \lambda X_2(0) = Y_1 + \lambda Y_2$.

Ainsi, par définition, $v_t(Y_1 + \lambda Y_2) = (X_1 + \lambda X_2)(t) = X_1(t) + \lambda X_2(t) = v_t(Y_1) + \lambda v_t(Y_2)$ comme attendu.

Si $t \geq 0$, par définition $X(t) = v_t(Y) = v_t(X(0))$ (en vecteurs de \mathbb{R}^n). Ainsi, comme $R(t)$ est la matrice de v_t dans la base canonique et que la colonne $X(0)$ représente les coordonnées du vecteur $X(0)$ dans la base canonique, on a $X(t) = R(t)X(0)$. (en vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

b. Pour $t = 0$, on a $v_0(Y) = X(0) = Y$ par construction donc v_0 est l'identité de \mathbb{R}^n d'où $R(0) = I_n$.
 En prenant $X(0) = Y = E_j$ pour $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la solution C_j associée à ce choix de position initiale donne l'équation $C_j(t) = R(t)E_j$ qui est la j -ième colonne de $R(t)$. Comme C_j est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ d'après CAUCHY-LIPSCHITZ, la fonction matricielle R est elle aussi de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ . Pour $Y \in \mathbb{R}^n$ quelconque, avec $X(0) = Y$, on dérive la relation $\forall t \geq 0, X(t) = R(t)X(0)$, d'où $X'(t) = R'(t)Y = A(t)X(t) = A(t)R(t)Y$. Comme cette relation est vraie quel que soit le vecteur $Y \in \mathbb{R}^n$ choisi, en prenant successivement les vecteurs E_j de la base canonique, on obtient comme attendu $\forall t \geq 0, R'(t) = A(t)R(t)$.

c. Suivons l'énoncé en écrivant $W(t) = \det(L_1(t), \dots, L_n(t))$ (notation). Les lignes (composées des cases) L_i sont de classe C^1 d'après la question précédente. On dérive $W(t) = \det(R(t))$ avec la formule du cours,

$$W'(t) = \sum_{i=1}^n \det(L_1(t), \dots, L_{i-1}(t), L'_i(t), L_{i+1}(t), \dots, L_n(t))$$

en adaptant l'expression quand $i = 1$ ou $i = n$. Or $R'(t) = A(t)R(t)$ ce qui donne $L'_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{i,j}(t)L_j(t)$ donc, par multilinéarité et alternance du déterminant, on obtient

$$\begin{aligned} \det(L_1(t), \dots, L_{i-1}(t), L'_i(t), L_{i+1}(t), \dots, L_n(t)) &= \det(L_1(t), \dots, L_{i-1}(t), \sum_{j=1}^n a_{i,j}(t)L_j(t), \dots, L_n(t)) \\ &= \sum_{j=1}^n a_{i,j}(t) \det(L_1(t), \dots, L_{i-1}(t), L_j(t), \dots, L_n(t)) \\ &= a_{i,i}(t) \det(L_1(t), \dots, L_{i-1}(t), L_i(t), \dots, L_n(t)) \end{aligned}$$

car seul le terme $j = i$ apporte une contribution éventuellement non nulle.

Ainsi, $W'(t) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}(t) \det(L_1(t), \dots, L_{i-1}(t), L_i(t), \dots, L_n(t)) = \left(\sum_{i=1}^n a_{i,i}(t) \right) W(t) = \text{Tr}(A(t))W(t)$.

En notant H la primitive de $t \mapsto \text{Tr}(A(t))$ sur \mathbb{R}_+ qui s'annule en 0, l'équation différentielle ci-dessus se résout, comme $W(0) = \det(I_n) = 1$, en $\forall t \geq 0, W(t) = e^{H(t)} \neq 0$ donc $R(t)$ est bien inversible.

d. Soit $Y \in \mathbb{R}^n$ et X la solution de (E) telle que $X(0) = Y$. Soit aussi X_1 la solution de (E) telle que $X_1(0) = X(1)$ et $X_2 : t \mapsto X(t+1)$. Les deux fonctions X_1 et X_2 sont de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ , vérifient $X_1(0) = X(1) = X(0+1) = X_2(0)$. Puisque la fonction A est 1-périodique, X_2 est aussi solution de (E) car $\forall t \geq 0, X'_2(t) = X'(t+1) = A(t+1)X(t+1) = A(t)X_2(t)$. Ainsi, X_1 et X_2 sont des solutions du même problème de CAUCHY, ce qui nous permet de conclure que $X_1 = X_2$.

Par conséquent, $\forall t \geq 0, X_1(t) = R(t)X_1(0) = R(t)X(1) = R(t)R(1)Y = R(t+1)Y = R(t+1)X_2(0) = X_2(t)$. Comme $R(t)R(1)Y = R(t+1)Y$ pour tout vecteur $Y \in \mathbb{R}^n$, on a bien $R(t)R(1) = R(t+1)$.

e. • Supposons que $1 \in \text{Sp}(R(1))$, alors il existe un vecteur $Y \neq 0$ tel que $R(1)Y = Y$. Soit X la solution de (E) telle que $X(0) = Y$. D'après **a.** et **d.**, pour $t \geq 0$, on a $X(t+1) = R(t+1)Y = R(t)R(1)Y = R(t)Y = X(t)$ donc X est effectivement 1-périodique, de classe C^1 ar solution de (E) et non identiquement nulle car $X(0) = Y \neq 0$.

• Soit X une solution de (E) non identiquement nulle, de classe C^1 et 1-périodique, posons $Y = X(0)$. Si on avait $Y = 0$, alors $\forall t \geq 0, X(t) = R(t)Y = 0$ et X serait nulle : NON ! Ainsi $Y \neq 0$. Comme X est 1-périodique, on a $X(1) = R(1)X(0) = X(0)$ d'après **a.** donc $R(1)Y = Y$ et 1 est bien une valeur propre de $R(1)$ car $Y \neq 0$.

Par double implication, on a bien l'équivalence de l'énoncé.

f. Soit $t \geq 0$, par définition $Q(t+1) = R(t+1)P\Lambda(t+1)P^{-1}$. Or, d'après la question **d.** et l'énoncé, on a $R(t+1) = R(t)R(1) = R(t)PDP^{-1}$ et $\Lambda(t+1) = \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1^{t+1}}, \dots, \frac{1}{\lambda_n^{t+1}}\right) = D^{-1}\Lambda(t)$ par les propriétés de l'exponentielle. Comme $DP^{-1}PD^{-1} = I_n$, on a $Q(t+1) = R(t)PDP^{-1}PD^{-1}\Lambda(t)P^{-1} = R(t)P\Lambda(t)P^{-1} = Q(t)$ donc Q est bien 1-périodique.

g. On constate d'abord que Z est bien définie car Q est bien inversible puisque Λ l'est clairement et R d'après la question **c.** De plus, ces fonctions matricielles étant de classe C^1 , la fonction $t \mapsto Q(t)^{-1}$ l'est aussi (par exemple avec l'expression de l'inverse avec comatrice et déterminant). Ainsi, Z est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ .

On effectue d'abord quelques calculs. Il vient $\Lambda'(t) = -D_0\Lambda(t)$ car $(\lambda_1^{-t})' = -\ln(\lambda_1)\lambda_1^{-t}$. De plus, il vient

$$Q'(t) = R'(t)P\Lambda(t)P^{-1} + R(t)P\Lambda'(t)P^{-1} = A(t)R(t)P\Lambda(t)P^{-1} - R(t)PD_0\Lambda(t)P^{-1} = A(t)Q(t) - R(t)PD_0\Lambda(t)P^{-1}.$$

• Supposons maintenant que $X'(t) = A(t)X(t)$, c'est-à-dire que X est solution de (E). Les calculs sont similaires mais allons-y ! Comme $X(t) = Q(t)Z(t)$, on a $X'(t) = A(t)X(t) = Q'(t)Z(t) + Q(t)Z'(t)$ ce qui donne, avec les calculs précédents :

$$A(t)X(t) = [A(t)Q(t) - R(t)PD_0\Lambda(t)P^{-1}]Z(t) + Q(t)Z'(t).$$

Or $A(t)Q(t)Z(t) = A(t)X(t)$, donc après simplification, il reste

$$Q(t)Z'(t) = R(t)PD_0\Lambda(t)P^{-1}Z(t).$$

Mais comme $Q(t)^{-1} = P(\Lambda(t))^{-1}P^{-1}(R(t))^{-1}$, on obtient finalement, puisque $P^{-1}(R(t))^{-1}R(t)P = I_n$,

$$Z'(t) = P(\Lambda(t))^{-1}P^{-1}(R(t))^{-1}R(t)PD_0\Lambda(t)P^{-1}Z(t) = P(\Lambda(t))^{-1}D_0\Lambda(t)P^{-1}Z(t) = B(t)Z(t).$$

• Réciproquement, supposons que $Z'(t) = B(t)Z(t)$, alors, comme $X(t) = Q(t)Z(t)$, on a

$$\begin{aligned} X'(t) &= Q'(t)Z(t) + Q(t)Z'(t) \\ &= [A(t)Q(t) - R(t)PD_0\Lambda(t)P^{-1}]Z(t) + Q(t)B(t)Z(t) \\ &= A(t)X(t) + [Q(t)B(t) - R(t)PD_0\Lambda(t)P^{-1}]Z(t). \end{aligned}$$

Or $Q(t)B(t) - R(t)PD_0\Lambda(t)P^{-1} = R(t)P[\Lambda(t)P^{-1}P(\Lambda(t))^{-1}D_0\Lambda(t)P^{-1} - D_0\Lambda(t)P^{-1}] = 0$ après simplification ce qui montre bien qu'on a $X'(t) = A(t)X(t)$, X est solution de (E) comme attendu.

Par double implication, on a : X est solution de (E) $\iff Z'(t) = B(t)Z(t)$.

25.6 a. La fonction $f : \mathbb{R} \mapsto (x(t), y(t))$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} car les fonctions x et y sont de classe C^1 sur \mathbb{R} et $\forall t \in \mathbb{R}$, $x'(t) = -3 \sin(t) \cos^2(t)$ et $y'(t) = 3 \cos(t) \sin^2(t)$. La longueur de l'arc entre $M(0) = (1, 0) = f(0)$ et $M = f(t)$ est, d'après le cours, comme \sin et \cos sont positives sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $L = \int_0^t \|\vec{f}'(u)\| du$ qui donne,

$$L = \int_0^t \sqrt{9 \sin^2(u) \cos^4(u) + 9 \cos^2(u) \sin^4(u)} du = \frac{3}{2} \int_0^t (2 \sin(u) \cos(u)) dt = \frac{3}{2} [\sin^2(u)]_0^t = \frac{3 \sin^2(t)}{2}.$$

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{n-1} < \alpha_n = \frac{\pi}{2}$ les angles tels que $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $M_k = f(\alpha_k)$.

Comme à la question précédente, la longueur de l'arc entre M_k et M_{k+1} vaut $L_k = \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \|\vec{f}'(u)\| du$ donc

$$L_k = \frac{3}{2} [\sin^2(u)]_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} = \frac{3(\sin^2(\alpha_{k+1}) - \sin^2(\alpha_k))}{2}. \text{ Puisque la longueur totale vaut } L = \frac{3}{2} \text{ (en prenant } t = \frac{\pi}{2} \text{ dans a.)}$$

, l'énoncé impose que $\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $L_k = \frac{3}{2n} = \frac{3(\sin^2(\alpha_{k+1}) - \sin^2(\alpha_k))}{2}$, c'est-à-dire qu'on a la

relation $\sin^2(\alpha_{k+1}) - \sin^2(\alpha_k) = \frac{1}{n}$. Ceci revient à écrire que $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $\sin^2(\alpha_k) = \frac{k}{n}$ puis, comme \sin est injective et positive sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, que $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $\alpha_k = \text{Arcsin}\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right)$.

Le réel u_n représente la moyenne arithmétique des distances des points M_k à l'origine, et puisque l'on a $OM_k = \sqrt{\cos^6(\alpha_k) + \sin^6(\alpha_k)} = \sqrt{\left(1 - \frac{k}{n}\right)^3 + \left(\frac{k}{n}\right)^3}$, vaut $u_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sqrt{\left(1 - \frac{k}{n}\right)^3 + \left(\frac{k}{n}\right)^3}$.

c. Par définition, $u_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec la fonction $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{(1-x)^3 + x^3}$ qui est continue sur le segment $[0; 1]$. On sait d'après le cours sur les sommes de RIEMANN qu'alors on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \sqrt{(1-x)^3 + x^3} dx = \int_0^1 \sqrt{3x^2 - 3x + 1} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \sqrt{1 + (\sqrt{3}(2x-1))^2} dx$

après mise sous forme canonique. On pose $t = \sqrt{3}(2x-1)$ ou $x = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t}{\sqrt{3}}\right) = \varphi(t)$ avec φ de classe C^1 sur le segment $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ pour avoir $\ell = \frac{1}{4\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{1+t^2} dt$. Par parité de l'intégrande, on en déduit

que $\ell = \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+t^2} dt$. On pose maintenant $t = \text{sh}(u) = \psi(u)$ avec ψ de classe C^1 sur $[0; \alpha]$ avec $\text{sh}(\alpha) = \sqrt{3}$ pour avoir $\ell = \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_0^\alpha \sqrt{1 + \text{sh}^2(u)} \text{ch}(u) du = \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_0^\alpha \text{ch}^2(u) du = \frac{1}{4\sqrt{3}} \int_0^\alpha (1 + \text{ch}(2u)) du$.

Ainsi, $\ell = \frac{1}{4\sqrt{3}} \left[u + \frac{\text{sh}(2u)}{2} \right]_0^\alpha = \frac{\alpha}{4\sqrt{3}} + \frac{\text{sh}(\alpha)\text{ch}(\alpha)}{4\sqrt{3}} = \frac{\alpha}{4\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}}{4\sqrt{3}} = \frac{\alpha}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{2}$. Pour trouver α ,

on résout, en posant $x = e^\alpha$, l'équation $\text{sh}(\alpha) = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} = \sqrt{3}$ qui donne $x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0$ ou encore, comme $x > 0$, $x = 2 + \sqrt{3}$. Alors, on a $\alpha = \ln(2 + \sqrt{3})$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\ln(2 + \sqrt{3})}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \sim 0,69$.

25.7 a. Initialisation : comme $n+1 \geq 1$, f est de classe C^1 sur I donc $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$.

Hérédité : soit $p \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ tel que $\forall x \in I$, $f(x) = \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{p!} \int_a^x f^{(p+1)}(t) (x-t)^p dt$. Soit $x \in I$, on

pose $u(t) = -\frac{(x-t)^{p+1}}{p+1}$ et $v(t) = f^{(p+1)}(t)$ de sorte que u et v sont de classe C^1 sur $[\widetilde{a}; \widetilde{x}]$ car $p+1 \leq n$ et que

$u'(t) = (x-t)^k$, d'où $f(x) = \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{p!} \left[-\frac{(x-t)^{p+1}}{p+1} f^{(p+1)}(t) \right]_a^x + \frac{1}{p!} \int_a^x f^{(p+2)}(t) \frac{(x-t)^{p+1}}{p+1} dt$

par intégration par parties. Ceci s'écrit aussi $f(x) = \sum_{k=0}^{p+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{(p+1)!} \int_a^x f^{(p+2)}(t) (x-t)^{p+1} dt$.

Par principe de récurrence, on a donc $\forall x \in I$, $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt$.

b. Comme $f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$, par inégalité triangulaire, on obtient

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{n!} \int_a^x |x-t|^n dt = \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{n!} \left| \int_a^x (x-t)^n dt \right| = \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty |x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

car $|x-t|^n$ garde un signe constant sur l'intervalle $[\widetilde{a}; \widetilde{x}]$ (traiter les cas n pair ou impair et $x \geq a$ et $x \leq a$).

c. Pour $h > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on obtient $|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{\|f''\|_{\infty, I} h^2}{2}$ en appliquant l'inégalité précédente à l'ordre $n=1$ entre $x+h$ et x . Comme $|hf'(x)| = |hf'(x) - f(x+h) + f(x) + f(x+h) - f(x)|$, par inégalité triangulaire, on a $|hf'(x)| \leq |hf'(x) - f(x+h) + f(x)| + |f(x+h)| + |f(x)| \leq \frac{\|f''\|_{\infty, I} h^2}{2} + 2\|f\|_{\infty, I}$ donc

$|f'(x)| \leq \frac{\|f''\|_{\infty, I} h}{2} + 2\frac{\|f\|_{\infty, I}}{h}$. Par conséquent f' est bornée sur I .

d. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, on vient de voir que $\|f'\|_{\infty, I} \leq \varphi(h) = \frac{\|f''\|_{\infty, I} h}{2} + 2 \frac{\|f\|_{\infty, I}}{h}$ donc $\|f'\|_{\infty, I} \leq \operatorname{Inf}_{\mathbb{R}_+^*} \varphi$.

- si $\|f\|_{\infty} = 0$, alors $f = 0$ donc $f' = 0$ et $\|f'\|_{\infty} = 0$.
- si $\|f''\|_{\infty} = 0$, alors $f'' = 0$ donc f est affine et pour que f soit bornée sur \mathbb{R} , il est nécessaire que f soit constante donc que $f' = 0$ et on a encore $\|f'\|_{\infty} = 0$.
- si $\|f\|_{\infty} = M_0 > 0$ et $\|f''\|_{\infty} = M_2 > 0$, comme $\varphi'(h) = \frac{M_2}{2} - \frac{2M_0}{h^2}$, on en déduit que φ est minimale en $h_0 = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$ (faire le tableau de variations) et on a donc $\operatorname{Inf}_{\mathbb{R}_+^*}(\varphi) = \varphi(h_0) = 2\sqrt{M_0 M_2}$.
Ainsi, $\|f'\|_{\infty} \leq 2\sqrt{M_0 M_2} = 2\sqrt{\|f\|_{\infty} \|f''\|_{\infty}}$.

On en déduit, et ceci dans tous les cas, que $\|f'\|_{\infty} \leq 2\sqrt{\|f\|_{\infty} \|f''\|_{\infty}}$. Il nous manque un facteur $\sqrt{2}$.

Recommençons ! Pour $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, on a toujours l'inégalité $|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{\|f''\|_{\infty} h^2}{2}$

et aussi $|f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leq \frac{\|f''\|_{\infty} h^2}{2}$ à l'ordre $n = 1$ entre $x-h$ et x . Ainsi, on peut composer $|2hf'(x)| = |(hf'(x) - f(x+h) + f(x)) + (hf'(x) + f(x-h) - f(x)) + f(x+h) - f(x-h)|$ puis, par inégalité triangulaire encore : $|hf'(x)| = \frac{1}{2}|2hf'(x)| \leq \frac{\|f''\|_{\infty} h^2}{2} + \|f\|_{\infty}$ donc $|f'(x)| \leq \psi(h) = \frac{\|f''\|_{\infty} h}{2} + \frac{\|f\|_{\infty}}{h}$.

- si $\|f\|_{\infty} = 0$, alors $f = 0$ donc $f' = 0$ et $\|f'\|_{\infty} = 0$.
- si $\|f''\|_{\infty} = 0$, alors $f'' = 0$ donc f est affine et pour que f soit bornée sur \mathbb{R} , il est nécessaire que f soit constante donc que $f' = 0$ et on a encore $\|f'\|_{\infty} = 0$.
- si $\|f\|_{\infty} = M_0 > 0$ et $\|f''\|_{\infty} = M_2 > 0$, comme $\psi'(h) = \frac{M_2}{2} - \frac{M_0}{h^2}$, on en déduit que ψ est minimale en $h_1 = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$ (faire le tableau de variations) et on a donc $\operatorname{Inf}_{\mathbb{R}_+^*}(\psi) = \psi(h_1) = \sqrt{2M_0 M_2}$. Ainsi, $\|f'\|_{\infty} \leq \sqrt{2M_0 M_2} = \sqrt{2\|f\|_{\infty} \|f''\|_{\infty}}$.

Dans tous les cas, on a bien cette fois-ci la majoration $\|f'\|_{\infty} \leq \sqrt{2\|f\|_{\infty} \|f''\|_{\infty}}$.

25.8 La fonction $f = (x, y)$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R}^2 , 2π -périodique donc on peut n'étudier que pour $t \in [-\pi; \pi]$ pour avoir la trajectoire entière. Le point $f(-t) = (x(t), -y(t))$ se déduit du point $f(t)$ par une symétrie orthogonale par rapport à l'axe (Oy) donc on peut n'étudier que sur $[0; \pi]$. Le point $f(\pi - t) = (-x(t), y(t))$ se déduit du point $f(t)$ par une symétrie orthogonale par rapport à l'axe (Ox) donc on peut n'étudier que sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ pour avoir toute la courbe.

Par symétrie, la longueur L de cette courbe est quatre fois celle de la courbe pour $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$. Ainsi, comme

$x'(t) = -3 \sin(t) \cos^2(t)$ et $y'(t) = 3 \cos(t) \sin^2(t)$, on a $L = 4 \int_0^{\pi/2} \|\vec{f}'(t)\| dt$ donc :

$$L = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{9 \sin^2(t) \cos^4(t) + 9 \cos^2(t) \sin^4(t)} dt = 6 \int_0^{\pi/2} (2 \sin(t) \cos(t)) dt = 6[\sin^2(t)]_0^{\pi/2} = 6.$$

Comme $f'(t) = (-3 \sin(t) \cos^2(t), 3 \cos(t) \sin^2(t))$ et que $M \in T_t \iff (\overrightarrow{f(t)M}, \vec{f}'(t))$ est une famille liée, on a donc $M = (x, y) \in T_t \iff \begin{vmatrix} x - x(t) & x'(t) \\ y - y(t) & y'(t) \end{vmatrix} = 0$ donc une équation cartésienne de la droite de T_t est $3 \cos(t) \sin^2(t)(x - \cos^3(t)) + 3 \sin(t) \cos^2(t)(y - \sin^3(t)) = 0$ ce qui se réduit par calculs trigonométriques en $(T_t) : x \sin(t) + y \cos(t) = \sin(t) \cos(t)$.

Ainsi, $A = (0, \sin(t))$ et $B = (\cos(t), 0)$ ce qui fait que $AB = \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t)} = 1$ est constant.