TD 25 : FONCTIONS VECTORIELLES

PSI 1 2025-2026 **jeudi 26 mars 2026**

25.1 *Centrale PSI 2012* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et a, b et c trois réels distincts deux à deux.

a. Justifier : $\exists ! P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(a) = f(a)$, $P(b) = f(b)$ et $P(c) = f(c)$ et donner son expression.

b. En déduire qu'il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \dfrac{1}{2} f''(d)$.

25.2 Soit la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x > 0,\ f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

a. Étudier rapidement f et tracer son graphe.

b. En déduire qu'il existe un unique couple d'entiers $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $a < b$ et $a^b = b^a$.

25.3 *Centrale Maths1 PSI 2016* Sam Pérochon

Soit Γ la courbe définie par $\begin{cases} x &= (1+\cos t)\sin t \\ y &= (1+\cos t)\cos t \\ z &= 4\sin(t/2) \end{cases}$.

a. Trouver tous les points réguliers de Γ. Calculer la tangente à tous ces points réguliers.

b. Calculer l'angle que fait la tangente en tous ces points avec l'axe (Oz).

c. Calculer le projeté orthogonal de Γ sur l'axe (Oz). Et sur le plan (xOy) ?

d. Calculer la longueur de la courbe.

25.4 *CCP PSI 2017* Samuel Sanchez II

Étude de l'arc paramétré $x(t) = \dfrac{1}{t} + \ln(2+t)$, $y(t) = t + \dfrac{1}{t}$. On précisera les tangentes parallèles aux axes du repère, les branches infinies, les points particuliers de l'arc.

25.5 *ENS Cachan PSI 2019* Tanguy Sommet

Soit $A : [0; +\infty[\to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction 1-périodique de classe C^1.

On s'intéresse à l'équation (E) : $X'(t) = A(t)X(t)$ d'inconnue $X : [0; +\infty[\to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1.

On admet, c'est le théorème de Cauchy-Lipschitz version matricielle, que si $Y \in \mathbb{R}^n$ est fixé, il existe une unique solution $X : [0; +\infty[\to \mathbb{R}^n$ de (E) telle que $X(0) = Y$.

On note, pour $t \geqslant 0$ et $Y \in \mathbb{R}^n$, $v_t(Y) = X(t)$ avec la solution X de (E) de la ligne précédente.

On appelle $R(t)$ la matrice de v_t dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

a. Pour $t \geqslant 0$, exprimer $X(t)$ en fonction de $R(t)$ et $X(0)$.

b. Montrer que $\forall t \geqslant 0,\ R'(t) = A(t)R(t)$ et que $R(0) = I_n$.

Soit $W : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $W(t) = \det(R(t))$.

c. Montrer que $\forall t \geqslant 0,\ W'(t) = \operatorname{Tr}(A(t))W(t)$. Indication : on pourra écrire $W(t) = \begin{vmatrix} \cdots L_1(t) \cdots \\ \vdots \\ \cdots L_n(t) \cdots \end{vmatrix}$ en notant $L_i(t)$ la i-ième colonne de la matrice $R(t)$. En déduire que $R(t)$ est inversible en tout instant $t \geqslant 0$.

d. Montrer que $\forall t \geqslant 0,\ R(t+1) = R(t)R(1)$.

e. Montrer qu'il existe une solution X de (E) non identiquement nulle, de classe C^1 et 1-périodique si et seulement si $1 \in \mathrm{Sp}(R(1))$.

On suppose dans la suite que $R(1) = PDP^{-1}$ avec $P \in GL_n(\mathbb{R})$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $\lambda_k > 0$.

On pose $\Lambda(t) = \mathrm{diag}\left(\dfrac{1}{\lambda_1^t}, \dots, \dfrac{1}{\lambda_n^t}\right)$, $Q(t) = R(t)P\Lambda(t)P^{-1}$ et $\forall t \geqslant 0,\ Z(t) = (Q(t))^{-1}X(t)$.

On pose aussi $D_0 = \mathrm{diag}(\ln(\lambda_1), \dots, \ln(\lambda_n))$ et $B(t) = P(\Lambda(t))^{-1}D_0\Lambda(t)P^{-1}$.

f. Montrer que Q est 1-périodique.

g. Montrer que X est solution de $(E) \iff Z'(t) = B(t)Z(t)$.

25.6 <u>*Centrale Maths1 PSI 2022*</u> Jimmy Guertin

Soit l'arc paramétré Γ par $x(t) = \cos^3(t)$ et $y(t) = \sin^3(t)$ pour $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

a. Soit $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $M = M(t) = (x(t), y(t)) \in \Gamma$, calculer la longueur de l'arc entre $M(0) = (1, 0)$ et M.

Soit $n+1$ points de l'arc Γ notés $M_0, \cdots, M_n$ tels que $M_0 = M(0)$, $M_n = M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et les longueurs de l'arc entre M_k et M_{k+1} ne dépendent pas de $k \in [\![0; n]\!]$.

b. Exprimer $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{OM_k}{n+1}$ où O est l'origine du repère.

c. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

25.7 <u>*OdlT 2016/2017 X/Cachan PSI planche 37*</u>

Soit un entier $n \geqslant 2$ et $f : I \to \mathbb{C}$ de classe C^{n+1} telle que $f^{(n+1)}$ est bornée sur I et $a \in I$.

a. Montrer la formule de Taylor reste intégral, $\forall x \in I,\ f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$.

b. Et l'inégalité de Taylor-Lagrange, $\forall x \in I,\ \left|f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}||f^{(n+1)}||_{\infty,I}|x-a|^{n+1}$.

c. On prend ici $n = 2$, montrer que si f est bornée ainsi que f'' sur I, alors f' est aussi bornée sur I.

d. On prend dans cette question $I = \mathbb{R}$, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall h \in \mathbb{R}_+^*$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{h}||f||_\infty + \frac{h}{2}||f''||_\infty$.

En déduire que l'on a la majoration $||f'||_\infty \leqslant \sqrt{2||f||_\infty ||f''||_\infty}$.

25.8 <u>*Compléments OdlT 2017/2018 EIVP PSI planche 555II*</u>

On donne $f(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$. Comparer $f(t+2\pi)$, $f(-t)$ et $f(\pi - t)$ avec $f(t)$; qu'en déduit-on ?

Justifier que l'intervalle d'étude peut être réduit à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Calculer la longueur de la courbe.

Soit $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, déterminer une équation de la tangente T_t en $f(t)$ à la courbe. On note A (resp. B) l'intersection de T_t avec l'axe (Ox) (resp. (Oy)). Déterminer la longueur AB.