DEVOIR 24 : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

PSI 1 2025-2026 **mardi 24 mars 2026**

QCM

1 *Équations linéaires du premier ordre : soit* $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues, l'équation différentielle* $(E) \ : \ y' - ay = b$, $(E_0) \ : \ y' - ay = 0$, *on note* S_E *l'ensemble des fonctions réelles* y *solutions de* (E) *sur* $\mathbb{R}$, S_0 *l'ensemble des fonctions réelles* y *solutions de* (E_0) *sur* $\mathbb{R}$, *et* A *une primitive de* a *sur* $\mathbb{R}$

1.1 $y \in S_0 \iff \left(\exists \lambda \in \mathbb{R}, \ y = \lambda e^{A}\right)$

1.2 $y \in S_E \iff \left(\exists \lambda : I \to \mathbb{R} \text{ dérivable}, \ y = \lambda e^{A}\right)$

1.3 S_E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

1.4 S_0 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

2 *Systèmes linéaires du premier ordre : soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *et le système* $(E) \ : \ X' = AX + B$. *On note* S_0 *l'ensemble des solutions de* $(E_0) \ : \ X' = AX$. *On suppose* A *diagonalisable avec* $A = PDP^{-1}$

2.1 $X' = AX \iff Y' = DY$ si $Y = PX$

2.2 $X' = AX + B \iff Y' = DY + PB$ si $Y = P^{-1}X$

2.3 $\left(\forall X \in S_0, \ \lim\limits_{t \to +\infty} X = 0\right) \iff \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_-$

2.4 $\left(\forall X \in S_0, \ \lim\limits_{t \to +\infty} ||X|| = +\infty\right) \iff \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$

3 *Équations linéaires avec second membre* ($\lambda \in \mathbb{R}$ *puis* $(A, B) \in \mathbb{R}^2$)

3.1 Les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de $(E) \ : \ y' + y = x + 1$ sont $y = \lambda e^{-x} + x$

3.2 Les solutions réelles sur $\mathbb{R}_+^*$ de $(E) \ : \ xy' - y = -\ln(x)$ sont $y = \lambda x + \ln(x)$

3.3 Les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de $(E) \ : \ y'' - y = 1$ sont $y = A\,\mathrm{sh}(x) + B\,\mathrm{ch}(x) - 1$

3.4 Les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de $(E) \ : \ y'' + y' + y = 0$ sont $y = e^{\frac{-x}{2}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$

4 *Existence de solutions : soit* $(E) \ : \ ay'' + by' + cy = 0$ *avec* $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ *quelconques mais avec* $a \neq 0$. *On note* S_E *l'ensemble des solutions de* E *sur* $\mathbb{R}$ *et* $\Delta = b^2 - 4ac$

4.1 $\Delta < 0 \Longrightarrow S_E = \emptyset$

4.2 $\exists ! y \in S_E, \ y(0) = 1$

4.3 $\exists ! y \in S_E, \ y(0) = 1$ et $y(1) = 3$

4.4 $\exists ! y \in S_E, \ y(0) = 1$ et $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$

Énoncé Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $a, b, c : I \to \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ trois fonctions continues. Énoncer les résultats relatifs à un problème de Cauchy linéaire associé à l'équation $(E) \ : \ y'' - ay' - by = c$.

Preuve Soit $(E) \ : \ X' = AX + B$ un système différentiel avec $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ continues sur l'intervalle I. On note $(E_0) \ : \ X' = AX$ le système homogène associé, S l'ensemble des solutions de (E) sur I et S_0 l'ensemble des solutions de (E_0) sur I. Soit X_p une solution particulière de (E).
Montrer l'équivalence, pour $X : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dérivable : $X \in S \iff X - X_p \in S_0$.

Exercice 1 Résoudre sur l'intervalle $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E) \ : \ (1 + t^2)y' + ty = \dfrac{1}{\sqrt{1 + t^2}}$.
Parmi ces solutions y, laquelle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$: vous donnerez alors un équivalent de y en $+\infty$.

Exercice 2 Soit le système différentiel suivant $(E) \ : \ \begin{cases} x' &= -x + 2y + z \\ y' &= -x + 2y + z \\ z' &= -2x + 2y + 2z \end{cases}$. Donner $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que (E) s'écrive $X' = AX$ avec $X^T = (x \ y \ z)$. Calculer χ_A (on pourra commencer par $C_1 \longleftarrow C_1 + C_3$) et trouver une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. Résoudre (E) : c'est-à-dire donner l'expression générale de (x, y, z) (en fonction de t) solution de (E).

DEVOIR 24 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 24	NOM : COCO	PRÉNOM : SINUS

$i\cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1	X			X	
2					
3	X		X	X	
4					

1.1 Vrai : cours **1.2** Faux : λ doit vérifier $e^A\lambda' = b$ pour que $y \in S_E$ **1.3** Faux : si $b \neq 0$ **1.4** Vrai : $S_0 = \mathrm{Vect}(e^A)$.
2.1 Faux : c'est $Y = P^{-1}X$ **2.2** Faux : c'est $Y' = DY + P^{-1}B$ **2.3** Faux : si 0 est valeur propre, l'une des composantes de Y est constante et peut donc très bien ne pas tendre vers 0 en $+\infty$ **2.4** Faux : la fonction nulle est toujours solution et ne tend pas vers $+\infty$ en norme.
3.1 Vrai : $x \mapsto \lambda e^{-x}$ solutions de (E_0) et $x \mapsto x$ solution de (E) **3.2** Faux : $x \mapsto \ln(x)$ n'est pas solution de (E) **3.3** Vrai : $(\mathrm{sh}, \mathrm{ch})$ est une famille libre de solutions de (E_0) et $x \mapsto -1$ solution de (E) **3.4** Vrai : j et j^2 sont les solutions de (E_c) : $z^2+z+1=0$ et $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
4.1 Faux : (E) a un plan de solutions réelles **4.2** Faux : il faut aussi imposer $y'(0)$ pour avoir unicité **4.3** Faux : par exemple (E) : $y'' + \pi^2 y/4 = 0$ car les solutions sont alors les $y = a\cos(\pi t/2) + b\sin(\pi t/2)$, $y(0) = 1 \iff a = 1$ et $y'(1) = 3 \iff -a\pi = 6$ **4.4** Faux : par exemple (E) : $y'' + y = 0$.

Énoncé Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a, b, c : I \to \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ trois fonctions continues, l'équation (E) : $y'' - ay' - by = c$ et $t_0 \in I$. Pour $(y_0, y_0') \in \mathbb{K}^2$, le problème de CAUCHY $\begin{cases} y'' &= ay'+by+c \\ y(t_0) &= y_0 \\ y'(t_0) &= y_0' \end{cases}$ admet une unique solution y définie sur I en entier.

Preuve X_p une solution particulière de (E) sur I donc $X_p' = AX_p + B \iff B = X_p' - AX_p$. Soit maintenant $X : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ une fonction vectorielle dérivable, alors on a l'équivalence : $X \in S \iff X' = AX + B \iff X' = AX + X_p' - AX_p \iff X' - X_p' = AX - AX_p \iff (X - X_p)' = A(X - X_p) \iff X - X_p \in S_0$ par linéarité de la dérivation et la distributivité du produit matriciel par rapport à la somme.

Exercice 1 (E_0) : $y' + \dfrac{ty}{1+t^2} = 0$. Comme $\left(\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2)\right)' = \dfrac{t}{1+t^2}$, les $y : t \mapsto \dfrac{\lambda}{\sqrt{1+t^2}}$ sont les solutions de (E_0). Variation de la constante : $(1+t^2)\dfrac{\lambda'}{\sqrt{1+t^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \iff \lambda' = \dfrac{1}{1+t^2} \Longleftarrow \lambda = \mathrm{Arctan}(t)$.

Par théorème de structure, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les $y_\alpha : t \mapsto \dfrac{\alpha + \mathrm{Arctan}(t)}{\sqrt{1+t^2}}$ où α parcourt $\mathbb{R}$. Les y_α sont bien sûr continues sur $\mathbb{R}_+$ et si $\alpha \neq -\dfrac{\pi}{2}$, on a $y_\alpha(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi + 2\alpha}{2t}$ donc y_α n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après RIEMANN. Par contre si $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$, on a $y_\alpha(t) = \dfrac{-\mathrm{Arctan}(1/t)}{\sqrt{1+t^2}} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{t^2}$ et y_α est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2 (E) : $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. On a $\chi_A = X(X-1)(X-2)$ en effectuant $C_1 \leftarrow C_1 + C_3$, en factorisant C_1 par X puis en effectuant $C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1$. Si $U^T = (a\ b\ c)$, on a $AU = 0 \iff a - c = b = 0$; $AU = U \iff a - b = c = 0$ et $AU = 2U \iff a = b = c$ donc $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Le système $Y' = DY$ (équivalent à (E)) a pour solutions sur $\mathbb{R}$ les $t \mapsto {}^t\big((\alpha)\ (\beta e^t)\ (\gamma e^{2t})\big)$.

Comme $X = PY$, les solutions de (E) sont les $t \mapsto {}^t(x\ y\ z)$ avec $x = \alpha + \beta e^t + \gamma e^{2t}$, $y = \beta e^t + \gamma e^{2t}$, $z = \alpha + \gamma e^{2t}$.