DEVOIR 25 : CALCUL DIFFÉRENTIEL

PSI 1 2025-2026 **vendredi 27 mars 2026**

QCM

1 *Régularité : soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1.1 Les dérivées partielles de f existent $\Longrightarrow$ f continue

1.2 Les dérivées partielles de f sont continues $\Longrightarrow$ f continue

1.3 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1-h,2)-f(1,2)}{h}$

1.4 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2,1+h)-f(2,1)}{h}$

2 *Changement de coordonnées : Soit* U *et* V *des ouverts de* $\mathbb{R}^2$, $f : V \to \mathbb{R}$ *et* $x, y : U \to \mathbb{R}$ *de classe* C^1 *vérifiant* $\forall (u,v) \in U,\ \big(x(u,v), y(u,v)\big) \in V$. *Soit* $g : U \to \mathbb{R}$ *définie par* $g(u,v) = f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$

2.1 f est C^1 sur $V \Longrightarrow g$ est C^1 sur U

2.2 g est C^1 sur $U \Longrightarrow f$ est C^1 sur V

2.3 si f C^1 : $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial x}\big(x(u,v),y(u,v)\big) + \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial y}(.,.)$

2.4 si f C^1 : $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial x}\big(x(u,v),y(u,v)\big) + \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial y}(.,.)$

3 *Coordonnées polaires : Soit* $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $g : \mathbb{R}_+^* \times \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ *définie par* $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$

3.1 f est $C^2 \Longrightarrow g$ est C^2

3.2 g est $C^2 \Longrightarrow f$ est C^2

3.3 Si f C^2 : $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \cos^2\theta \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\sin\theta\cos\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin^2\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

3.4 Si f C^1 : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta\dfrac{\partial g}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$

4 *Extrema : soit* $f : (\mathbb{R}_+)^2 \to \mathbb{R}_+$ *une fonction de classe* C^1

4.1 $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ \left(f(x,y) = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{\text{grad}} f(x,y) = (0,0)\right)$

4.2 $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \left(f(x,y) = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{\text{grad}} f(x,y) = (0,0)\right)$

4.3 f admet un min. abs. sur $[0;1]^2$

4.4 f admet un min. abs. sur $(\mathbb{R}_+)^2$

Énoncé Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1.
Donner le développement limité d'ordre 1 de f au voisinage de $a \in U$.

Preuve Soit les ouverts $U = \mathbb{R}_+^* \times]-\pi/2;\pi/2[$ et $P = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ (demi-plan $x > 0$). Si $f : P \to \mathbb{R}$ est de classe C^2, on pose $g : U \to \mathbb{R}$ telle que $\forall (r,\theta) \in U,\ g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = f(x,y)$ en posant $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$. Déterminer $\dfrac{\partial g}{\partial r}$, $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}$.

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$. En déduire que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = f$ sur $\mathbb{R}^2$.
Soit aussi $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(x,y) = (x+y, x-y)$.

a. Montrer φ est bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et donner une expression de $\varphi^{-1}(u,v)$.

b. On définit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $g(u,v) = f \circ \varphi^{-1}(u,v)$. Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ en fonction de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. En déduire une relation entre $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ et g. Exprimer $f(x,y)$ (pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$) à l'aide d'une fonction $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

DEVOIR 25 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 25 NOM : COCO PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1		X		X	
2	X			X	
3	X	X	X	X	
4		X	X		

1.1 Faux : on a vu un contre-exemple dans le cours **1.2** Vrai : f est de classe C^1 donc continue **1.3** Faux : $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(1+h,2)-f(1,2)}{h}$ **1.4** Vrai : définition.
2.1 Vrai : par composée **2.2** Faux : $U = V = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^{1/3}, y^{1/3})$, $x(u,v) = u^3$, $y(u,v) = v^3$ alors $g(u,v) = (u,v)$ **2.3** Faux : $\frac{\partial y}{\partial u}$ à la place de $\frac{\partial y}{\partial v}$ **2.4** Vrai : cours.
3.1 Vrai : car $\varphi : (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ **3.2** Vrai : car $\varphi^{-1} : (x,y) \mapsto \left(\sqrt{x^2+y^2}, \mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)\right)$ est aussi de classe C^2 **3.3** Vrai : $\frac{\partial g}{\partial r} = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}$ et on re-dérive par rapport à r **3.4** Vrai : cours.
4.1 Faux : $f(x,y) = xy$, $f(1,0) = 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(1,0) = (0,1)$ **4.2** Vrai : $(\mathbb{R}_+^*)^2$ est un ouvert et, $f(x,y) = 0$, f admet en (x,y) un minimum local (car absolu) car f est positive **4.3** Vrai : $[0;1]^2$ est un compact et f et continue car C^1 **4.4** Faux : $f(x,y) = e^{-x-y}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x,0) = 0^+$ (jamais atteint).

Énoncé Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $a \in U$, alors on a le développement limité de f en a à l'ordre 1 : $f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) + o(||h||)$ où $h = (h_1, h_2)$.

Preuve Par un théorème du cours : $\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}$. De même en dérivant par rapport à θ, $\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial y} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}$. On continue en dérivant la première relation par rapport à r, et on trouve $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \cos(\theta)\Big(\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big) + \sin(\theta)\Big(\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big)$ ce qui donne avec le théorème de SCHWARZ : $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\sin(\theta)\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Exercice 1 Par opérations, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (fraction rationnelle). De plus, en prenant la norme 2, on a $|x|, |y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2} = ||(x,y)||_2$ donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $|f(x,y)| \leqslant \frac{||(x,y)||_2^3}{||(x,y)||_2^2} = ||(x,y)||_2$ donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ et f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$. Si $(x,y) \neq (0,0)$, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$. Or $\lim\limits_{t\to 0^+}(0,t) = (0,0)$ et pourtant $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{\partial f}{\partial x}(0,t) = 1 \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas partiellement continue en $(0,0)$ donc pas continue du tout. f n'est donc pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 **a.** $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ et $\det(\varphi) = -2 \neq 0$ donc φ est bijective avec $\varphi^{-1}(u,v) = \Big(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\Big)$.
b. $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\Big)$ et $\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\Big)$. Comme $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f$, on a donc $2\frac{\partial g}{\partial u} = g$ donc il existe une fonction $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $g(u,v) = C(v)e^{u/2}$. Comme g est de classe C^1 par composée, C doit elle-même être de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = C(x-y)e^{(x+y)/2}$. Réciproquement si $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = C(x-y)e^{(x+y)/2}$ avec $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, alors f est C^1 par opérations et $\frac{\partial f}{\partial x} = C'(x-y)e^{(x+y)/2} + \frac{1}{2}C(x-y)e^{(x+y)/2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -C'(x-y)e^{(x+y)/2} + \frac{1}{2}C(x-y)e^{(x+y)/2}$ donc $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f$.