

# DM 9 : MINES PSI 2016 MATHS1

PSI 1 2025/2026

pour le mercredi 25 février 2026

## PARTIE 1 : Égalité de KARAMATA

- 1** Comme  $x^{p+1} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 1^-$ , par composition des limites,  $\sqrt{1-x^{p+1}} f(x^{p+1}) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\pi}$ .  
Or  $1-x^{p+1} \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} (p+1)(1-x)$  puisque la dérivée de  $x \mapsto x^{p+1}$  en 1 vaut  $p+1$ . Par conséquent,  
 $\sqrt{p+1} \sqrt{1-x} f(x^{p+1}) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\pi}$ . Finalement,  $\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p+1}}$ .
- 2** La fonction  $t \mapsto \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}$  est continue sur  $]0; +\infty[$ .
- Comme  $\frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$  et que  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$  est intégrable sur  $]0; 1]$ , il en va donc de même de  $t \mapsto \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}$ .
  - De plus,  $\frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} o(e^{-(p+1)t})$  et  $t \mapsto e^{-(p+1)t}$  est intégrable sur  $[1; +\infty[$ , ainsi  $t \mapsto \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}$  aussi.
- Alors  $t \mapsto \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}$  est intégrable sur  $]0; +\infty[$  donc  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} dt$  converge.
- 3** Grâce au changement de variable  $(p+1)t = u$ , puisque  $u \mapsto \frac{u}{p+1}$  est une bijection de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}_+^*$  sur lui-même, il vient d'après l'énoncé  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{\sqrt{p+1}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p+1}}$ .
- 4** On a finalement, grâce aux questions **1** et **3**,  $\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} dt$ .
- 5** Puisque toutes les séries et intégrales convergent, par linéarité de chacun des membres, il suffit de montrer le résultat lorsque  $Q = X^p$  car tout polynôme s'écrit  $Q = \sum_{p=0}^d q_p X^p$ . Dans ce cas, d'après la question **4**,  
 $\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k Q(x^k) = \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} Q(e^{-t})}{\sqrt{t}} dt$ .
- 6** La fonction  $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t})$  est continue par morceaux sur  $]0; +\infty[$ . De plus, comme  $\|h\|_{\infty, [0; 1]} = e$  et que  $h$  est positive,  $0 \leq \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t}) \leq \frac{e \times e^{-t}}{\sqrt{t}}$ . D'après la question **2** et le théorème de comparaison, on en déduit que la fonction  $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t})$  est intégrable sur  $]0; +\infty[$ . De plus,  $h(e^{-t}) = 0$  si  $t > 1$  et  $e^{-t} h(e^{-t}) = 1$  si  $t \leq 1$ . Par conséquent,  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t}) dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_0^1 = 2$ .
- 7** Puisque  $|a_k x^k h(x^k)| \leq e |a_k x^k|$  et que  $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$  converge absolument par hypothèse, la série  $\sum_{k \geq 0} a_k x^k h(x^k)$  converge aussi absolument pour  $x \in [0; 1[$ . On pouvait aussi dire que, comme  $x \in [0; 1[$ , la suite  $(x^k)_{k \geq 0}$  tend vers 0, donc il existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $0 \leq x^k < e^{-1}$  dès que  $k \geq k_0$ . Alors, par définition de  $h$ ,  $a_k x^k h(x^k) = 0$  si  $k \geq k_0$  et  $\sum_{k \geq 0} a_k x^k h(x^k)$  converge car elle a un nombre fini de termes non nuls.
- 8** On a  $h(e^{-\frac{k}{n}}) = 0$  lorsque  $k > n$  et  $e^{-\frac{k}{n}} h(e^{-\frac{k}{n}}) = 1$  si  $k \leq n$ . Mais  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{n}} = 1^-$ ; par suite,  $\sqrt{1-e^{-\frac{1}{n}}} \sum_{k=0}^n a_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$  d'après le résultat admis. Or  $1-e^{-\frac{1}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ . Par conséquent,  $\sum_{k=0}^n a_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$ .

## PARTIE 2 : Un théorème taubérien

- 9** On a  $S_{\lfloor \beta n \rfloor} - S_n = \sum_{k=n+1}^{\lfloor \beta n \rfloor} a_k \leq (\lfloor \beta n \rfloor - n) a_n$  par décroissance de la suite  $(a_n)_{n \geq 0}$ . Avec les hypothèses du préambule,  $\lfloor \beta n \rfloor - n > 0$ , ce qui permet d'obtenir la première inégalité par quotient. De même, on a  $S_n - S_{\lfloor \alpha n \rfloor} = \sum_{k=\lfloor \alpha n \rfloor+1}^n a_k \geq (n - \lfloor \alpha n \rfloor) a_n$  et l'on conclut de même car  $n - \lfloor \alpha n \rfloor > 0$ .

On a donc bien la double inégalité attendue,  $\frac{S_{\lfloor \beta n \rfloor} - S_n}{\lfloor \beta n \rfloor - n} \leq a_n \leq \frac{S_n - S_{\lfloor \alpha n \rfloor}}{n - \lfloor \alpha n \rfloor}$ .

- 10** Puisque  $\gamma n - 1 \leq \lfloor \gamma n \rfloor \leq \gamma n$ , on a  $\lfloor \gamma n \rfloor \underset{+\infty}{\sim} \gamma n$  par encadrement. Ainsi,  $S_{\lfloor \gamma n \rfloor} \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{\lfloor \gamma n \rfloor} \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{\gamma n}$ .
- 11** On peut écrire, pour  $\gamma > 0$ ,

$$S_{\lfloor \gamma n \rfloor} \underset{+\infty}{=} 2\sqrt{\gamma n} + o(\sqrt{n}) - 2\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) = 2(\sqrt{\gamma} - 1)\sqrt{n} + o(\sqrt{n})$$

et  $\lfloor \gamma n \rfloor - n \underset{+\infty}{=} (\gamma - 1)n + o(n)$ .

Par conséquent, en supposant à présent que  $\gamma \neq 1$ , et  $n$  assez grand pour que  $\lfloor \gamma n \rfloor - n \neq 0$ ,

$$\sqrt{n} \left( \frac{S_{\lfloor \gamma n \rfloor} - S_n}{\lfloor \gamma n \rfloor - n} \right) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n} \left( \frac{2(\sqrt{\gamma} - 1)\sqrt{n}}{(\gamma - 1)n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2(\sqrt{\gamma} - 1)}{\gamma - 1}.$$

Il en résulte l'existence de  $N(\gamma)$  tel que, si  $n \geq N(\gamma)$ , alors

$$\frac{2(\sqrt{\gamma} - 1)}{\gamma - 1} - \varepsilon \leq \sqrt{n} \left( \frac{S_{\lfloor \gamma n \rfloor} - S_n}{\lfloor \gamma n \rfloor - n} \right) \leq \frac{2(\sqrt{\gamma} - 1)}{\gamma - 1} + \varepsilon.$$

Appliquons cette inégalité lorsque  $\gamma = \beta$ , puis lorsque  $\gamma = \alpha$ . Si  $N = \text{Max}(N(\alpha), N(\beta))$  et si  $n \geq N$ ,

$$\frac{2(\sqrt{\beta} - 1)}{\beta - 1} - \varepsilon \leq \sqrt{n} \left( \frac{S_{\lfloor \beta n \rfloor} - S_n}{\lfloor \beta n \rfloor - n} \right) \leq \sqrt{n} a_n \leq \sqrt{n} \left( \frac{S_n - S_{\lfloor \alpha n \rfloor}}{n - \lfloor \alpha n \rfloor} \right) \leq \frac{2(\sqrt{\alpha} - 1)}{\alpha - 1} + \varepsilon.$$

- 12** Puisque  $\frac{2(1 - \sqrt{t})}{1 - t} = \frac{2}{1 + \sqrt{t}} \xrightarrow{t \rightarrow 1} 1$ , il existe  $\eta$ , que l'on peut choisir dans  $]0; 1[$ , tel que, si  $t \in [1 - \eta; 1 + \eta]$ , alors  $1 - \varepsilon \leq \frac{2(1 - \sqrt{t})}{1 - t} \leq 1 + \varepsilon$ . Posons  $\alpha = 1 - \eta$  et  $\beta = 1 + \eta$ . Alors, pour  $n \geq N$ , on obtient  $1 - 2\varepsilon \leq \sqrt{n} a_n \leq 1 + 2\varepsilon$ . Nous avons ainsi démontré que  $\sqrt{n} a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

## PARTIE 3 : Marche aléatoire

- 13** Par indépendance  $X_{k+1}, \dots, X_n$ , comme toutes les variables aléatoires  $X_m$  suivent la même loi,

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = i_1, \dots, X_n = i_{n-k}) = \mathbb{P}(X_{k+1} = i_1) \times \dots \times \mathbb{P}(X_n = i_{n-k}) = \mathbb{P}(X_1 = i_1) \times \dots \times \mathbb{P}(X_{n-k} = i_{n-k}).$$

On a donc  $\mathbb{P}(X_1 = i_1, \dots, X_{n-k} = i_{n-k}) = \mathbb{P}(X_1 = i_1) \times \dots \times \mathbb{P}(X_{n-k} = i_{n-k})$  par indépendance de la famille  $(X_1, \dots, X_{n-k})$ , ce qui emporte le résultat.

**14** On a  $S_{k+1} - S_k = X_{k+1}, \dots, S_n - S_k = X_{k+1} + \dots + X_n$ . Par conséquent,

$$(S_{k+1} - S_k = j_1, \dots, S_n - S_k = j_{n-k}) = (X_{k+1} = j_1, X_{k+2} = j_2 - j_1, \dots, X_n = j_{n-k} - j_{n-k-1}).$$

Par la question 14,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{k+1} - S_k = j_1, \dots, S_n - S_k = j_{n-k}) &= \mathbb{P}(X_{k+1} = j_1, X_{k+2} = j_2 - j_1, \dots, X_n = j_{n-k} - j_{n-k-1}) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = j_1, X_2 = j_2 - j_1, \dots, X_{n-k} = j_{n-k} - j_{n-k-1}) \\ &= \mathbb{P}(S_1 = j_1, \dots, S_{n-k} = j_{n-k}), \end{aligned}$$

la dernière égalité résultant de la même transformation que celle qui débute la question.

**15** Par définition de l'évènement  $A_k^n$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_k^n) &= \mathbb{P}(S_k = 0, S_{k+1} \neq 0, \dots, S_n \neq 0) = \mathbb{P}(S_k = 0, S_{k+1} - S_k \neq 0, \dots, S_n - S_k \neq 0) \\ &= \mathbb{P}(S_k = 0, X_{k+1} \neq 0, \dots, X_{k+1} + \dots + X_n \neq 0). \end{aligned}$$

Comme  $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$  et  $(X_{k+1}, X_{k+1} + X_{k+2}, \dots, X_{k+1} + \dots + X_n)$  sont deux variables aléatoires indépendantes par hypothèse (et par le lemme des coalitions), comme la variable  $(S_{k+1} - S_k, \dots, S_n - S_k)$  suit la même loi que la variable  $(S_1, \dots, S_{n-k})$  d'après la question 15, et car  $E_{n-k} = (T > n - k) = (S_1 \neq 0, \dots, S_{n-k} \neq 0)$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_k^n) &= \mathbb{P}(S_k = 0) \mathbb{P}(X_{k+1} \neq 0, \dots, X_{k+1} + \dots + X_n \neq 0) = \mathbb{P}(S_k = 0) \mathbb{P}(S_{k+1} - S_k \neq 0, \dots, S_n - S_k \neq 0) \\ &= \mathbb{P}(S_k = 0) \mathbb{P}(S_1 \neq 0, \dots, S_{n-k} \neq 0) = \mathbb{P}(S_k = 0) \mathbb{P}(T > n - k) = \mathbb{P}(S_k = 0) \mathbb{P}(E_{n-k}). \end{aligned}$$

**16** Pour  $n$  donné, les  $A_k^n$  sont disjoints car, si  $0 \leq k < \ell \leq n$ , on a l'inclusion  $A_k^n \cap A_\ell^n \subset (S_\ell \neq 0) \cap (S_\ell = 0) = \emptyset$  grâce aux inclusions  $A_k^n \subset (S_\ell \neq 0)$  et  $A_\ell^n \subset (S_\ell = 0)$ . De plus, si  $\omega \in \Omega$ , ou bien aucun des  $S_k(\omega)$ , pour  $k \leq n$ , n'est nul, et alors  $\omega \in A_0^n$ , ou bien il existe  $p \leq n$  tel que  $S_p(\omega) = 0$ . Dans ce cas, considérons  $k$ , le plus grand de ces  $p$ . Alors  $\omega \in A_k^n$ . Ainsi,  $\Omega$  est l'union disjointe des  $A_k^n$  et donc, par incompatibilité,

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(A_k^n) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(S_k = 0) \mathbb{P}(E_{n-k}) = 1 \text{ d'après la question 15.}$$

**17** Puisque les séries entières  $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(S_k = 0)x^k$  et  $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(E_k)x^k$  ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 (leurs coefficients sont dans  $[0; 1]$  et le rayon de la série entière  $\sum_{k \geq 0} x^k$  est égal à 1), on obtient, par produit de CAUCHY de deux séries entières dans l'intervalle ouvert de convergence, pour tout  $x \in [0; 1[$  :

$$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(S_k = 0) \mathbb{P}(E_{n-k}) \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

**18** Remarquons que  $X_n \equiv 1$  [2] et donc que  $S_n \equiv n$  [2]. Par conséquent, si  $n$  est impair,  $S_n \neq 0$  et  $\mathbb{P}(S_n = 0) = 0$ . Supposons  $n$  pair et posons  $n = 2p$ . Posons aussi  $Y_n = \frac{1 + X_n}{2}$ . Alors les  $Y_n$  sont mutuellement indépendants et suivent la loi de Bernoulli  $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ . Si  $T_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ ,  $T_n$  suit d'après le cours la loi binomiale  $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$ . Comme  $T_n = \frac{n + S_n}{2}$ , on a  $S_n = 2T_n - n$ . Par conséquent,  $\mathbb{P}(S_{2p} = 0) = \mathbb{P}(T_{2p} = p) = \frac{1}{4^p} \binom{2p}{p}$ .

**19** Pour  $x \in [0; 1[$ ,  $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)x^n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{4^p} \binom{2p}{p} x^{2p} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  d'après le douzième développement en série entière du théorème 17 du cours. Finalement, d'après la question 18,  $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)x^n = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ .

**20** Comme on a clairement  $(T > n+1) \subset (T > n)$ , la suite  $(\mathbb{P}(E_n))_{n \geq 0}$  est décroissante et à valeurs positives ou nulles. Si  $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$ , alors  $\sqrt{1-x} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \sqrt{2}$ . Par conséquent,  $\sqrt{1-x} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\pi}$ . Le résultat de la question **12** nous indique alors que  $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(E_k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$  donc que  $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \mathbb{P}(E_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$  d'après la partie 2. Finalement,  $\mathbb{P}(E_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}} = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$ .

**21** Or  $(T = +\infty) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} E_n$  et cette intersection est décroissante.

Le théorème de la limite décroissante montre que  $\mathbb{P}(T = +\infty) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(E_n) = 0$ .

**22** La formule demandée est vraie si  $x = 1$  d'après **21** car  $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(T < +\infty) = 1 - \mathbb{P}(T = +\infty) = 1$ . De  $(T = n) = E_{n-1} \setminus E_n$  et  $E_n \subset E_{n-1}$ , il résulte, comme  $E_n \subset E_{n-1}$ , que  $\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(E_{n-1}) - \mathbb{P}(E_n)$  pour  $n \geq 1$ . Par suite,

$$\begin{aligned} \forall x \in [0; 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n)x^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_{n-1})x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)x^n = x \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)x^n + 1 \\ &= (x-1)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + 1 = 1 - \sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

**23** On a, pour  $x \in [0; 1[$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n)x^n &= \frac{x^2}{2} - \sum_{n=2}^{+\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-x^2)^n = \frac{x^2}{2} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \dots \times \left(\frac{3}{2} - n\right) x^{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!} \times \frac{1 \times 2 \times \dots \times (2n-1) \times (2n)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n-2) \times (2n-1) \times (2n)} x^{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2n-1)(2^n n!)^2} x^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{4^n}. \end{aligned}$$

Puisque l'égalité sur  $[0; 1[$  de la somme de deux séries entières entraîne l'égalité de leurs coefficients,

$$\forall n \geq 1, \mathbb{P}(T = 2n) = \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}.$$

**24** Avec la formule de STIRLING, on montre  $\mathbb{P}(T = 2n) = \frac{(2n)!}{(2n-1)(n!)^2 2^{2n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n} (2n)^{2n} e^{-2n}}{(2n)e^{2n} (2\pi n)n^{2n} 2^{2n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n\sqrt{\pi n}}$ .

Ainsi  $(2n)\mathbb{P}(T = 2n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$  donc  $T$  n'admet pas une espérance finie d'après RIEMANN car  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$  diverge.

On pouvait aussi dire que  $G_T$  n'est définie que sur  $[0; 1]$  et que puisque  $G_T(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ , la fonction  $G_T$  n'est pas dérivable en 1 car  $\frac{G_T(x) - G_T(1)}{x-1} \underset{1^-}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}$ . Ainsi  $T$  n'admet pas d'espérance finie.