

DM 9 : KARAMATA ET MARCHE

PSI 1 2025/2026

pour le mercredi 25 février 2026

PARTIE 1 : Égalité de KARAMATA

Dans cette partie, on considère une suite de réels positifs ou nuls $(a_k)_{k \geq 0}$ telle que, pour tout $x \in]-1; 1[$, la série $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$ converge absolument. Lorsque $x \in]-1; 1[$, on pose $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ et l'on suppose que

$$\sqrt{1-x} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\pi}.$$

1 Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer la limite, lorsque $x \rightarrow 1^-$, de $\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k}$.

2 Soit $p \in \mathbb{N}$. Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} dt$.

3 On admet que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\pi}$. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} dt$.

4 En déduire que $\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} dt$.

5 Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k Q(x^k) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} Q(e^{-t})}{\sqrt{t}} dt$.

Soit h la fonction définie sur $[0; 1[$ par $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0; e^{-1}[\\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in [e^{-1}; 1[\end{cases}$

6 Montrer l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t}) dt$ et calculer sa valeur.

7 Soit $x \in [0; 1[$. Montrer la convergence de la série $\sum_{k \geq 0} a_k x^k h(x^k)$.

On admet l'égalité de KARAMATA : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k h(x^k) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} h(e^{-t})}{\sqrt{t}} dt$.

8 À l'aide de ce résultat, que l'on appliquera à $x = e^{-\frac{1}{n}}$, montrer que $\sum_{k=0}^n a_k \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

PARTIE 2 : Un théorème taubérien

Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ décroissante. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et l'on suppose que $S_n \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

9 Soit α et β des réels tels que $0 < \alpha < 1 < \beta$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n - [\alpha n]$ et $n - [\beta n]$ soient non nuls.

Montrer que $\frac{S_{[\beta n]} - S_n}{[\beta n] - n} \leq a_n \leq \frac{S_n - S_{[\alpha n]}}{n - [\alpha n]}$.

10 Soit $\gamma > 0$. Donner un équivalent de $[\gamma n]$ et de $S_{[\gamma n]}$.

11 Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que, pour n assez grand, $\frac{2(\sqrt{\beta} - 1)}{\beta - 1} - \varepsilon \leq \sqrt{n} a_n \leq \frac{2(1 - \sqrt{\alpha})}{1 - \alpha} + \varepsilon$.

12 En déduire que $\sqrt{n} a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

PARTIE 3 : Marche aléatoire

On considère l'ensemble $\Omega = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}^*}$ des suites indexées par \mathbb{N}^* et à valeurs dans \mathbb{Z} . Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on considère l'application X_i , de Ω dans \mathbb{Z} , qui à la suite $\omega = (\omega_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in \Omega$ associe ω_i . On admet qu'il existe sur Ω une tribu \mathcal{A} et une probabilité \mathbb{P} telles que les X_i sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\{-1, 1\}$ suivant toutes la même loi définie par $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ (ainsi $S_0 = 0$), ce qui définit une famille de variables aléatoires sur Ω .

On définit une application $T : \Omega \rightarrow \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, en posant, pour $\omega \in \Omega$, $T(\omega) = \text{Min}\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n(\omega) = 0\}$, ce minimum étant égal à $+\infty$ si $\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n(\omega) = 0\}$ est vide. On admet que T est une variable aléatoire.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note l'évènement $E_n = (T > n)$. Si $n \geq 1$, on définit $A_n^n = (S_n = 0)$ et, pour tout entier

$k \in \{0, \dots, n-1\}$, l'évènement $A_k^n = (S_k = 0) \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^n (S_i \neq 0) \right)$.

- 13** Montrer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $(i_1, \dots, i_{n-k}) \in \mathbb{Z}^{n-k}$, que

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = i_1, \dots, X_n = i_{n-k}) = \mathbb{P}(X_1 = i_1, \dots, X_{n-k} = i_{n-k}).$$

- 14** Montrer que $\mathbb{P}(S_{k+1} - S_k = j_1, \dots, S_n - S_k = j_{n-k}) = \mathbb{P}(S_1 = j_1, \dots, S_{n-k} = j_{n-k})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$ et tout $(j_1, \dots, j_{n-k}) \in \mathbb{Z}^{n-k}$. Indication : on pourra se ramener à la question précédente.

- 15** Si $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(A_k^n) = \mathbb{P}(S_k = 0) \mathbb{P}(E_{n-k})$.

Indication : on pourra écrire que $(S_k = 0) \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^n (S_i \neq 0) \right) = (S_k = 0) \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^n (S_i - S_k \neq 0) \right)$.

- 16** Montrer que $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(S_k = 0) \mathbb{P}(E_{n-k}) = 1$.

- 17** Montrer que, pour tout $x \in]0; 1[$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n) x^n \right) = \frac{1}{1-x}$.

- 18** Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\mathbb{P}(S_n = 0)$. Indication : on discutera sur la parité de n .

- 19** En déduire que, pour tout $x \in [0; 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n) x^n = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

- 20** Donner un équivalent de $\mathbb{P}(E_n)$. Indication : on utilisera les parties précédentes.

- 21** Montrer que $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$.

- 22** Montrer que, pour tout $x \in [0; 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) x^n = 1 - \sqrt{1-x^2}$.

- 23** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(T = 2n) = \frac{1}{4^n (2n-1)} \binom{2n}{n}$.

- 24** T admet-elle une espérance finie ? Si oui, la calculer.