



PRÉPARATION ORAUX

PSI 1

MILLÉSIME

2025 / 2026



EXERCICES PAR THÈME

- 1 : intégrales et analyse (11 exercices : 1-11)page 4
- 2 : algèbre linéaire et générale (11 exercices : 12-22).....page 6
- 3 : séries numériques, séries de fonctions, séries entières (24 exercices : 23-46) page 10
- 4 : espaces vectoriels normés (12 exercices : 47-58).....page 16
- 5 : réduction des endomorphismes (18 exercices : 59-76) page 20
- 6 : théorèmes de domination (9 exercices : 77-85) page 24
- 7 : espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens (18 exercices : 86-103) page 26
- 8 : probabilités et variables aléatoires (23 exercices : 104-126).....page 30
- 9 : équations différentielles et calcul différentiel (10 exercices : 127-136) page 38

EXERCICES PAR CONCOURS

- 1 : X (2 exercices)
numéros 47-48
- 2 : ENS Cachan / Rennes (9 exercices)
numéros 12, 49-51, 104-108
- 3 : Centrale Maths 1 (27 exercices)
numéros 1-3, 23-28, 52-53, 59-61, 77-78, 86-89, 109-111, 127-130
- 4 : Mines (60 exercices)
numéros 4-9, 13-19, 29-38, 54-58, 62-71, 79-80, 90-95, 112-121, 131-134
- 5 : CCINP (20 exercices)
numéros 10, 20-21, 39-42, 72-74, 81-82, 96-98, 122-125, 135
- 6 : Mines-Télécom (14 exercices)
numéros 22, 43-46, 75, 83-84, 99-102, 126, 136
- 7 : Navale et Saint-Cyr (4 exercices)
numéros 11, 76, 85, 103

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 1

INTÉGRALE ET ANALYSE

1

2

3

4

5

6

7 a. Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto x \sin(x) - c \cos(x)$ est dérivable sur $J_n = \overline{I_n} = \left[n\pi; n\pi + \frac{\pi}{2} \right]$, vérifie

$f'_n(x) = \sin(x) + x \cos(x) + c \sin(x)$. Traitons deux cas :

- Si n est pair, f'_n reste strictement positive sur J_n donc f_n est strictement croissante sur J_n et $f_n(n\pi) = -c < 0$ et $f_n\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = n\pi + \frac{\pi}{2} > 0$ donc, par le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection strictement croissante de J_n dans $\left[-c; n\pi + \frac{\pi}{2}\right]$. Comme 0 est à l'intérieur de cet intervalle,

il existe un unique réel $x_n \in \overset{\circ}{J}_n = I_n$ tel que $f_n(x_n) = 0$, c'est-à-dire tel que $x_n \sin(x_n) - c \cos(x_n) = 0$.

- Si n est impair, f'_n reste strictement négative sur J_n donc f_n est strictement décroissante sur J_n et $f_n(n\pi) = c > 0$ et $f_n\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -n\pi - \frac{\pi}{2} < 0$ donc, par le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection strictement décroissante de J_n dans $\left[-n\pi - \frac{\pi}{2}; c\right]$. Comme 0 est à l'intérieur de cet intervalle,

il existe un unique réel $x_n \in \overset{\circ}{J}_n = I_n$ tel que $f_n(x_n) = 0$, c'est-à-dire tel que $x_n \sin(x_n) - c \cos(x_n) = 0$.

Dans les deux cas, pour $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in \left] n\pi; n\pi + \frac{\pi}{2} \right[$ tel que $x_n \sin(x_n) - c \cos(x_n) = 0$ d'où l'existence et l'unicité de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les conditions de l'énoncé.

b. Comme $x_n \sin(x_n) - c \cos(x_n) = 0$ et $\cos(x_n) \neq 0$, on a $\tan(x_n) = \frac{c}{x_n} = \tan(x_n - n\pi)$ car \tan est π -périodique. Or $x_n - n\pi \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[\subset \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$. Par définition de la fonction Arctan , on a donc $x_n - n\pi = \text{Arctan}\left(\frac{c}{x_n}\right)$. Mais $n\pi < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$ et $n\pi + \frac{\pi}{2} \underset{+\infty}{\sim} n\pi$ donc, par encadrement, $x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c}{x_n} = 0$, de sorte que $x_n - n\pi \underset{+\infty}{\sim} \frac{c}{x_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{c}{n\pi} = y_n$ ou $x_n = n\pi + \frac{c}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

c. En reprenant plus loin le développement limité précédent, $x_n - n\pi = \text{Arctan}\left(\frac{c}{x_n}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{c}{x_n} - \frac{c^3}{3x_n^3} + o\left(\frac{1}{x_n^3}\right)$. Or $x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi$ donc $\frac{c^3}{3x_n^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{c^3}{3n^3\pi^3}$ qui s'écrit aussi $\frac{c^3}{3x_n^3} \underset{+\infty}{=} \frac{c^3}{3n^3\pi^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ et, pour la même raison, on peut aussi remplacer $o\left(\frac{1}{x_n^3}\right)$ par $o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ de sorte que $x_n - n\pi \underset{+\infty}{=} \frac{c}{n\pi + \frac{c}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)} - \frac{c^3}{3n^3\pi^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Ainsi, on

obtient $x_n - n\pi \underset{+\infty}{=} \frac{c}{n\pi} \times \frac{1}{1 + \frac{c}{n^2\pi^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} - \frac{c^3}{3n^3\pi^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{c}{n\pi} \left(1 - \frac{c}{n^2\pi^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{c^3}{3n^3\pi^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$
qui se réduit en $x_n - n\pi \underset{+\infty}{=} \frac{c}{n\pi} \left(1 - \frac{c}{n^2\pi^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{c^3}{3n^3\pi^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{c}{n\pi} - \frac{c^2(3+c)}{3n^3\pi^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. On
peut donc conclure que $x_n - n\pi \underset{+\infty}{\sim} -\frac{c^2(3+c)}{3n^3\pi^3}$.

8 a. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\alpha : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_\alpha(x) = x^\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{x^{2\alpha+2}}\right)$ est continue et positive sur \mathbb{R}_+^* car $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $1 + \frac{1}{x^{2\alpha+2}} > 1$. Déterminons un équivalent simple de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 0 :

- Si $\alpha > -1$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{2\alpha+2}} = 0$ donc $\ln\left(1 + \frac{1}{x^{2\alpha+2}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{2\alpha+2}}$ et $f_\alpha(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^\alpha}{x^{2\alpha+2}} = \frac{1}{x^{\alpha+2}}$.
- Si $\alpha = -1$, $f_{-1}(x) = \frac{\ln(2)}{x}$.
- Si $\alpha < -1$, on écrit $\ln\left(1 + \frac{1}{x^{2\alpha+2}}\right) = -(2\alpha+2)\ln(x) + \ln(1+x^{2\alpha+2}) \underset{+\infty}{=} -(2\alpha+2)\ln(x) + o(\ln(x))$
car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2\alpha+2} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x^{2\alpha+2}) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $f_\alpha(x) \underset{+\infty}{\sim} -(2\alpha+2)x^\alpha \ln(x)$.

Et maintenant quand x tend vers 0^+ :

- Si $\alpha > -1$, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2\alpha+2}} = +\infty$ et $\ln\left(1 + \frac{1}{x^{2\alpha+2}}\right) = -(2\alpha+2)\ln(x) + \ln(1+x^{2\alpha+2})$ donc
 $\ln\left(1 + \frac{1}{x^{2\alpha+2}}\right) \underset{0}{=} -(2\alpha+2)\ln(x) + o(\ln(x))$ donc $f_\alpha(x) \underset{0}{\sim} -(2\alpha+2)x^\alpha \ln(x)$ car $\ln(1+x^{2\alpha+2}) \underset{0}{\sim} o(\ln(x))$.
- Si $\alpha = -1$, $f_{-1}(x) = \frac{\ln(2)}{x}$.
- Si $\alpha < -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2\alpha+2}} = 0$ donc $\ln\left(1 + \frac{1}{x^{2\alpha+2}}\right) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^{2\alpha+2}}$ et $f_\alpha(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^\alpha}{x^{2\alpha+2}} = \frac{1}{x^{\alpha+2}}$.

On peut passer à l'intégrabilité de la fonction f_α sur \mathbb{R}_+^* :

- Si $\alpha > -1$, $f_\alpha(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha+2}}$ avec $\alpha+2 > 1$ donc f_α est intégrable en $+\infty$ par RIEMANN et
 $f_\alpha(x) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{x^{\frac{1-\alpha}{2}}}\right)$ par croissances comparées donc f_α est intégrable en 0^+ par RIEMANN car $\frac{1-\alpha}{2} < 1$.
- Si $\alpha = -1$, $f_{-1}(x) = \frac{\ln(2)}{x}$ donc, d'après RIEMANN, f_{-1} n'est ni intégrable en 0^+ , ni en $+\infty$.
- Si $\alpha < -1$, $f_\alpha(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{\frac{1-\alpha}{2}}}\right)$ par croissances comparées donc f_α est intégrable en $+\infty$ par RIEMANN
car $\frac{1-\alpha}{2} > 1$ et $f_\alpha(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha+2}}$ avec $\alpha+2 < 1$ donc f_α est intégrable en 0^+ par RIEMANN.

Ainsi, f_α est intégrable sur \mathbb{R}_+^* si et seulement si $\alpha \neq -1$, et comme f_α est positive, on en déduit que
 $\int_0^{+\infty} x^\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{x^{2\alpha+2}}\right) dx$ converge si et seulement si $\alpha \neq -1$.

b. Méthode 1 : pour calculer $I_\alpha = \int_0^{+\infty} x^\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{x^{2\alpha+2}}\right) dx$ dans le cas où $\alpha \neq -1$, on pose $u_\alpha : x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
et $v_\alpha : x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x^{2\alpha+2}}\right)$ qui sont de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* . Traitons deux cas :

- Si $\alpha > -1$, on a $u_\alpha(x)v_\alpha(x) \underset{0}{\sim} -2x^{\alpha+1} \ln(x)$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} u_\alpha(x)v_\alpha(x) = 0$ par croissances comparées
car $\alpha+1 > 0$ et $u_\alpha(x)v_\alpha(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha+1}}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_\alpha(x)v_\alpha(x) = 0$. Ainsi, par intégration par parties,

$$I_\alpha = - \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left(\frac{-(2\alpha+2)x^{-2\alpha-3}}{1+x^{-(2\alpha+2)}} \right) dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{x^{-\alpha-2} dx}{1+(x^{-\alpha+1})^2} = \left[-\frac{1}{\alpha+1} \operatorname{Arctan}(x^{-\alpha-1}) \right]_0^{+\infty}$$
Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-\alpha-1} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\alpha-1} = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{Arctan}(t) = \frac{\pi}{2}$, on a $I_\alpha = \frac{\pi}{\alpha+1}$.
- Si $\alpha < -1$, $u_\alpha(x)v_\alpha(x) \underset{+\infty}{\sim} -2x^{\alpha+1} \ln(x)$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_\alpha(x)v_\alpha(x) = 0$ par croissances comparées car

$\alpha+1 < 0$ et $u_\alpha(x)v_\alpha(x) \sim \frac{1}{x^{\alpha+1}}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} u_\alpha(x)v_\alpha(x) = 0$. Par conséquent, par intégration par parties,

$$I_\alpha = - \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left(\frac{-(2\alpha+2)x^{-2\alpha-3}}{1+x^{-(2\alpha+2)}} \right) dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{x^{-\alpha-2} dx}{1+(x^{-\alpha+1})^2} = \left[-\frac{1}{\alpha+1} \operatorname{Arctan}(x^{-\alpha-1}) \right]_0^{+\infty}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-\alpha-1} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\alpha-1} = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{Arctan}(t) = \frac{\pi}{2}$, on a $I_\alpha = -\frac{\pi}{\alpha+1}$.

On peut unifier cette formule, $\forall \alpha \neq -1$, $I_\alpha = \frac{\pi}{|\alpha+1|}$.

Méthode 2 : on effectue, pour $\alpha \neq -1$, on pose $u = x^{\alpha+1}$, ou $x = \varphi_\alpha(u) = u^{\frac{1}{\alpha+1}}$. Traitons deux cas :

• Si $\alpha > -1$, φ_α est une bijection strictement croissante et de classe C^1 de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R}_+^* , donc, par linéarité, $I_\alpha = \int_0^{+\infty} u^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u^2}\right) \left(\frac{1}{\alpha+1} u^{\frac{-\alpha}{\alpha+1}}\right) du = \frac{1}{\alpha+1} \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{u^2}\right) du$.

• Si $\alpha < -1$, φ_α est une bijection strictement décroissante et de classe C^1 de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R}_+^* , donc, par linéarité, $I_\alpha = \int_{+\infty}^0 u^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u^2}\right) \left(\frac{1}{\alpha+1} u^{\frac{-\alpha}{\alpha+1}}\right) du = -\frac{1}{\alpha+1} \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{u^2}\right) du$.

Comme $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{u^2}\right) du$ ne dépend pas de u , se calcule facilement par le même type d'intégration par parties que ci-dessus, et vaut π , on en déduit à nouveau que $\forall \alpha \neq -1$, $I_\alpha = \frac{\pi}{|\alpha+1|}$.

Il est à noter que cette méthode montrait que, pour $\alpha \neq -1$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{x^{2\alpha+2}}\right) dx$ était de même nature que $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{u^2}\right) du$, c'est-à-dire convergente car $h : u \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{u^2}\right)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* , vérifie $h(u) \sim \frac{1}{u^2}$ et $h(u) \sim -2 \ln(u) = o\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)$, donc h est intégrable en 0 et en $+\infty$ par RIEMANN.

9

10

11

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 2

ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉNÉRALE

12 a. Soit $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $x^T = (x_1 \cdots x_n)$ tel que $Ax \geq 0$. On a donc les inégalités $2x_1 - x_2 \geq 0$,

$$\forall i \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket, -x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} \geq 0 \text{ et } -x_{n-1} + 2x_n \geq 0.$$

Soit un indice $i_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $x_{i_0} = \underset{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}{\text{Min}}(x_i)$. Distinguons trois cas :

- si $i_0 = 1$, on a $x_1 \geq x_2 - x_1 \geq 0$ par minimalité de x_{i_0} .
- si $i_0 \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket$, on a $(x_{i_0-1} - x_{i_0}) + (x_{i_0+1} - x_{i_0}) \leq 0$ alors que $x_{i_0-1} - x_{i_0} \geq 0$ et $x_{i_0+1} - x_{i_0} \geq 0$ donc $x_{i_0-1} - x_{i_0} = x_{i_0+1} - x_{i_0} = 0$ et $x_{i_0-1} = x_{i_0} = x_{i_0+1}$. On continue de proche en proche pour obtenir $x_1 = \cdots = x_n$ et on se ramène au premier ou au dernier cas pour avoir $x_{i_0} \geq 0$.
- si $i_0 = n$, on a $x_n \geq x_{n-1} - x_n \geq 0$.

Dans tous les cas, on a donc $x_{i_0} \geq 0$ donc $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_k \geq 0$ donc $x \geq 0$.

b. Si $x \in \text{Ker}(A)$, $Ax = 0 \geq 0$ donc $x \geq 0$ d'après **a.** et $A(-x) = 0 \geq 0$ donc, de même, $-x \geq 0$ et on en déduit que $x = 0$. Ainsi, $\text{Ker}(A) = \{0\}$ donc, comme $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est carrée, A est inversible.

c. La j -ième colonne de A^{-1} est $A^{-1}e_j$, et comme $A(A^{-1}e_j) = e_j \geq 0$, par définition de la monotonie d'une matrice, on a $A^{-1}e_j \geq 0$ donc tous les coefficients de la matrice A^{-1} sont positifs, ce qui s'écrit $A^{-1} \geq 0$.

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 3

SÉRIES NUMÉRIQUES, SÉRIES DE FONCTIONS ET SÉRIES ENTIÈRES

23

24

25

26

27

28

29

30

31

32

33

34

35

36

37

38

39 a. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$. Traitons trois cas :

- Si $x = 0$, $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et, comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est alternée, que la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge par le critère spécial des séries alternées.
- Si $x > 0$, $|u_n| = \frac{e^{-nx}}{n} = o((e^{-x})^n)$ et la série géométrique $\sum_{n \geq 1} (e^{-x})^n$ converge car $|e^{-x}| < 1$ donc, par comparaison, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge absolument donc converge.
- Si $x < 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = +\infty$ donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge grossièrement.

Ainsi, le domaine de définition D de S est $D = \mathbb{R}_+$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

(H₁) la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ d'après **a.**

(H₂) les fonctions f_n sont toutes continues sur \mathbb{R}_+ par opérations.

(H₃) Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, comme $(|f_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0, par le critère spécial des séries alternées, si $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$, on a $|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$. Ainsi, R_n est bornée sur \mathbb{R}_+ et $\|R_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \leq \frac{1}{n+1}$ donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}_+ par encadrement car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

Ainsi, par le théorème de continuité des séries de fonctions, S est continue sur \mathbb{R}_+ .

c. S est continue sur $[0; +\infty[$ et, comme la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge par le critère spécial des séries alternées car la suite $(|f_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0 pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on sait majorer le reste et avoir, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $|S(x) - R_0(x)| \leq |f_1(x)| = e^{-x}$. Comme $S(x) = O(e^{-x})$, par comparaison à une intégrale de référence, S est intégrable en $+\infty$.

d. Utilisons cette fois-ci le théorème de dérivation des séries de fonctions :

(H₁) la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}_+$.

(H₂) les fonctions f_n sont toutes de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* par opérations et $f'_n(x) = (-1)^{n+1} e^{-nx}$.

(H₃) pour $a > 0$, $x \in [a; +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $|f'_n(x)| = e^{-nx} \leq e^{-na} = (e^{-a})^n = |f'_n(a)|$. Ainsi, $\|f'_n\|_{\infty, [a; +\infty[} = (e^{-a})^n$ et, comme la série géométrique $\sum_{n \geq 1} (e^{-a})^n$ converge, $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge normalement sur tout segment de \mathbb{R}_+^* on peut remplacer $[a; +\infty[$ par $[a; b]$ sans rien changer.

Par ce théorème, la fonction S est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* .

e. Pour $x > 0$, on a $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ car $|e^{-x}| < 1$. Comme \mathbb{R}_+^* est un intervalle et que $x \mapsto -\ln(1+e^{-x})$ est une primitive de $x \mapsto \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0$, $S(x) = C - \ln(1+e^{-x})$.

Par convergence uniforme de $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur \mathbb{R}_+ , comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0 = l_n$, le théorème de la

double limite permet de conclure que $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} l_n = 0$. Ainsi, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$, on conclut que $C = 0$ donc que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $S(x) = -\ln(1+e^{-x})$. Mais comme S et $x \mapsto -\ln(1+e^{-x})$ sont continues en 0 d'après **b.**, on a donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $S(x) = -\ln(1+e^{-x})$. C'était direct avec les séries entières car on sait que $\forall u \in]-1; 1[$, $\ln(1+u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} u^n}{n}$. Restait à prolonger en 0.

f. Utilisons le théorème d'intégration terme à terme.

(H₁) la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ d'après **a.**

(H₂) les fonctions f_n sont toutes continues et intégrables sur \mathbb{R}_+ car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = O(e^{-x})$.

(H₃) la fonction S est continue sur \mathbb{R}_+ d'après **b.**

(H4) pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx = \frac{1}{n} \left[-\frac{e^{-nx}}{n} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n^2}$ et la série de RIEMANN $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Ainsi, S est intégrable sur \mathbb{R}_+ (on le savait déjà) et $\int_0^{+\infty} S(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Posons

$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ et $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$, par comparaison, la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ converge donc la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $T_{2n} = S_{2n} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} S_{2n} - \frac{S_n}{2}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_{2n} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}$. Ainsi, $\int_0^{+\infty} S(x) dx = -\frac{\pi^2}{12}$.

40

41

42

43

44 a. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \frac{e^{-nx}}{n}$. Traitons trois cas :

- Si $x = 0$, $u_n = \frac{1}{n}$ et la série harmonique de RIEMANN $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.
- Si $x > 0$, $u_n = \frac{e^{-nx}}{n} = o((e^{-x})^n)$ et la série géométrique $\sum_{n \geq 1} (e^{-x})^n$ converge car $|e^{-x}| < 1$ donc, par comparaison, la série à termes positifs $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge aussi.
- Si $x < 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge grossièrement.

Ainsi, le domaine de définition D de S est $D = \mathbb{R}_+^*$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n}$.

Limite en $+\infty$:

(H1) la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ d'après a.

(H2) les fonctions f_n admettent des limites finies en $+\infty$ qui sont $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0 = \ell_n$.

(H3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\|f_n\|_{\infty, [1; +\infty[} = |f_n(1)| = \frac{e^{-n}}{n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées donc, comme la série de RIEMANN $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[1; +\infty[$.

Ainsi, par le théorème de double limite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 0$.

Limite en 0^+ : pour $n \in \mathbb{N}^*$, en notant $S_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{e^{-kx}}{k}$, on a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq S_n(x) \leq S(x)$ car on ne somme que des quantités positives. Comme toutes les f_n sont décroissantes sur \mathbb{R}_+^* , S est aussi décroissante sur \mathbb{R}_+^* . Par le théorème de la limite monotone, S admet une limite ℓ , finie ou $+\infty$, en 0^+ . En passant à la limite quand x tend vers 0^+ dans l'inégalité $0 \leq S_n(x) \leq S(x)$, on obtient $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_n \leq \ell$ (valable même si $\ell = +\infty$). Or on sait que la série harmonique diverge donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, on a $\ell = +\infty$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = +\infty$.

c. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, comme $|e^{-x}| < 1$ et que $\forall t \in]-1; 1[$, $\ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}$, on a $S(x) = -\ln(1-e^{-x})$.

d. Utilisons le théorème d'intégration terme à terme.

(H₁) la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^* d'après **a.**

(H₂) les fonctions f_n sont toutes continues et intégrables sur \mathbb{R}_+^* car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) \underset{+\infty}{=} O(e^{-x})$ et f_n se prolonge par continuité en 0 en posant $f_n(0) = \frac{1}{n}$.

(H₃) la fonction S est continue sur \mathbb{R}_+^* car toutes les fonctions f_n le sont et que, comme en **c.**, on a convergence normale de $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur tout segment de \mathbb{R}_+^* .

(H₄) pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx = \frac{1}{n} \left[-\frac{e^{-nx}}{n} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n^2}$ et la série de RIEMANN $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Ainsi, $\int_0^{+\infty} S(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

45

46

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 4

ESPACES VECTORIELS NORMÉS

47

48 a. Images des multiples : $\Psi(0_E) = \Psi(0_E + 0_E) = \Psi(0_E) + \Psi(0_E)$ donc $\Psi(0_E) = 0_E$. Ainsi, pour $x \in E$, on a $\Psi(0.x) = \Psi(0_E) = 0_E = 0.\Psi(x)$ mais aussi $\Psi(1.x) = 1.\Psi(x)$. Si, pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\Psi(n.x) = n.\Psi(x)$, alors $\Psi((n+1).x) = \Psi(n.x + x) = \Psi(n.x) + \Psi(x) = n.\Psi(x) + \Psi(x)$ par hypothèse de récurrence donc $\Psi((n+1).x) = (n+1).\Psi(x)$. On a établi par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Psi(n.x) = n.\Psi(x)$.

Continuité en 0_E : soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{M}{n} \leq \varepsilon$. Alors, en posant $\alpha = \frac{1}{n} > 0$, on a $\forall x \geq E$, $\|x\| \leq \alpha \implies \|n.x\| \leq 1 \implies \|\Psi(n.x)\| \leq M \iff n\|\Psi(x)\| \leq M \iff \|\Psi(x)\| \leq \frac{M}{n} \leq \varepsilon$. La fonction Ψ est bien continue en 0_E .

Continuité sur E : soit $x_0 \in E$, d'après l'équation fonctionnelle vérifiée par Ψ , $\Psi(x) - \Psi(x_0) = \Psi(x - x_0)$ pour $x \in E$. Par continuité de Ψ en 0_E , on a $\lim_{x \rightarrow x_0} \Psi(x - x_0) = \lim_{h \rightarrow 0_E} \Psi(h) = 0_E$ donc $\lim_{x \rightarrow x_0} (\Psi(x) - \Psi(x_0)) = 0_E$ ce qui montre $\lim_{x \rightarrow x_0} \Psi(x) = \Psi(x_0)$ et la continuité de Ψ en x_0 .

La fonction Ψ est donc continue sur E .

b. Pour tout vecteur $x \in E$, on sait déjà d'après la question a. que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Psi(n.x) = n.\Psi(x)$ donc $\Psi(0_E) = 0_E = \Psi(n.x + (-n).x) = \Psi(n.x) + \Psi((-n).x)$ puis $\Psi((-n).x) = -\Psi(n.x) = -n.\Psi(x) = (-n).\Psi(x)$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in E$, $\Psi(n.x) = n.\Psi(x)$. Pour $q \in \mathbb{N}^*$, en posant $y = \frac{1}{q}.x$, on a $\Psi(q.y) = q\Psi(y)$ donc $\Psi\left(\frac{1}{q}.x\right) = \frac{1}{q}.\Psi(x)$ et, pour $p \in \mathbb{Z}$, on a $\Psi\left(\frac{p}{q}.x\right) = \Psi\left(p.\left(\frac{1}{q}.x\right)\right) = p.\left(\Psi\left(\frac{1}{q}.x\right)\right) = \frac{p}{q}.\Psi(x)$. Par conséquent, on a $\forall r \in \mathbb{Q}$, $\Psi(r.x) = r.\Psi(x)$. Reste à passer des rationnels aux réels.

Pour tout réel λ , si on pose $\alpha_n = \frac{\lfloor n\lambda \rfloor}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, par définition de la partie entière, $n\lambda - 1 < \lfloor n\lambda \rfloor \leq n\lambda$ donc $\lambda - \frac{1}{n} < \alpha_n \leq \lambda$ et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lambda$ par encadrement. Comme $\|\alpha_n.x - \lambda.x\| = |\alpha_n - \lambda|\|x\|$, on a aussi

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n.x = \lambda.x$ puis, par continuité de Ψ , on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Psi(\alpha_n.x) = \Psi(\lambda.x)$. Or $\Psi(\alpha_n.x) = \alpha_n.\Psi(x)$ car α_n est un rationnel donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Psi(\alpha_n.x) = \lambda.\Psi(x)$. Par unicité de la limite, il vient $\Psi(\lambda.x) = \lambda.\Psi(x)$. Ceci

étant valable pour tout réel λ et tout vecteur $x \in E$, et comme on a déjà $\forall (x, y) \in E^2$, $\Psi(x+y) = \Psi(x) + \Psi(y)$ par hypothèse, on peut conclure que Ψ est un endomorphisme de E .

49

50

51

52

53

54

55

56

57

58

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 5

RÉDUCTION

59

60

61

62

63

64

65

66

67

68

69

70

71

72

73

74 a. On calcule $\chi_{A_\alpha} = \begin{vmatrix} X-1 & -\alpha & 0 \\ 0 & X-1 & -1 \\ -1 & 0 & X+1 \end{vmatrix} = (X-1)^2(X+1) - \alpha = X^3 - X^2 - X + 1 - \alpha$ par SARRUS. La

fonction $f : t \mapsto t^3 - t^2 - t + 1 - \alpha$ est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(t) = 3t^2 - 2t - 1 = (3t+1)(t-1)$ donc f est croissante sur $] -\infty; -\frac{1}{3}]$, décroissante sur $[-\frac{1}{3}; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.

Comme $f(-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1 - \alpha = \frac{32}{27} - \alpha$ et $f(1) = -\alpha$, d'après le tableau de variations de f :

- Si $\alpha < 0$, f s'annule une seule fois sur \mathbb{R} , en $x_1 \in] -\infty; -\frac{1}{3}[$. Alors $\text{Sp}(A_\alpha) = \{x_1\}$.
- Si $\alpha = 0$, $f : t \mapsto (t-1)^2(t+1)$ s'annule en 1 et -1 donc $\text{Sp}(A_0) = \{-1, 1\}$.
- Si $\alpha \in]0; \frac{32}{27}[$, f s'annule en $x_1 \in] -\infty; -\frac{1}{3}[$, $x_2 \in] -\frac{1}{3}; 1[$ et $x_3 \in]1; +\infty[$ et $\text{Sp}(A_\alpha) = \{x_1, x_2, x_3\}$.
- Si $\alpha = \frac{32}{27}$, $f : t \mapsto t^3 - t^2 - t - \frac{5}{27} = (t+\frac{1}{3})^2(t-\frac{5}{3})$ s'annule en $-\frac{1}{3}$ et $\frac{5}{3}$ donc $\text{Sp}(A_{32/27}) = \{-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\}$.
- Si $\alpha > \frac{32}{27}$, f s'annule une seule fois sur \mathbb{R} , en $x_1 \in]1; +\infty[$. Alors $\text{Sp}(A_\alpha) = \{x_1\}$.

b. Avec le spectre trouvé à la question a, on considère cinq cas :

- Si $\alpha < 0$, χ_{A_α} n'est pas scindé sur \mathbb{R} car x_1 est simple donc A_α n'est pas diagonalisable.
- Si $\alpha = 0$, χ_{A_0} est scindé sur \mathbb{R} et $A_0 - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ est de rang 2 donc, avec la formule du rang, $\dim(E_1(A_0)) = 1 \neq 2 = m_1(A_0)$ donc A_0 n'est pas diagonalisable.
- Si $\alpha \in \left]0; \frac{32}{27}\right[$, χ_{A_α} est scindé à racines simples sur \mathbb{R} donc, d'après le cours, A_α est diagonalisable.
- Si $\alpha = \frac{32}{27}$, $\chi_{A_{32/27}}$ est scindé sur \mathbb{R} et $A_{32/27} + \frac{1}{3}I_3 = \begin{pmatrix} 4/3 & 32/27 & 0 \\ 0 & 4/3 & 1 \\ 1 & 0 & -2/3 \end{pmatrix}$ est de rang 2 donc $\dim(E_{-1/3}(A_{32/27})) = 1 \neq 2 = m_{-1/3}(A_{32/27})$ donc $A_{32/27}$ n'est pas diagonalisable.
- Si $\alpha > \frac{32}{27}$, χ_{A_α} n'est pas scindé sur \mathbb{R} car x_1 est simple donc A_α n'est pas diagonalisable.

Ainsi, A_α est diagonalisable si et seulement si $\alpha \in \left]0; \frac{32}{27}\right[$.

75

76

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 6

THÉORÈMES DE DOMINATION

77

78

79

80

81

82

83 a. Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $h_x : t \mapsto e^{-t} \frac{\text{sh}(xt)}{t}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* , prolongeable par continuité en 0 en posant $h_x(0) = x$ car $\text{sh}(xt) \underset{0}{=} xt + o(t)$ et $e^{-t} \underset{0}{=} 1 + o(1)$ donc $h_x(t) \underset{0}{=} x + o(1)$.

Comme $h_{-x} = -h_x$, il suffit de traiter le cas $x \geq 0$.

Si $x = 0$, il est clair que $h_0 = 0$ donc h_0 est intégrable sur \mathbb{R}_+^* et $f(0)$ existe, on a même $f(0) = 0$.

Si $x > 0$, $\text{sh}(xt) = \frac{e^{xt} - e^{-xt}}{2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{xt}}{2}$ donc $h_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{(x-1)t}}{2t}$ donc h_x est intégrable sur \mathbb{R}_+^* si et seulement

si $x - 1 < 0$ par comparaison de fonctions de référence. En effet, si $x < 1$, on a $h_x(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-(1-x)t})$,

$h_1(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2t}$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} h_x(t) = +\infty$ si $x > 1$. h_x est donc intégrable si et seulement si $x \in]0; 1[$ donc,

comme h_x est positive, $\int_0^{+\infty} h_x(t) dt$ converge si et seulement si $x \in]0; 1[$.

Ainsi, le domaine de définition D de f vaut $D =]-1; 1[$ et f est impaire sur D.

b. Soit l'application $g :]-1; 1[\times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, t) = e^{-t} \frac{\text{sh}(xt)}{t}$.

(H₁) Pour tout $t > 0$, $x \mapsto g(x, t)$ est de classe C^1 sur $]-1; 1[$.

(H₂) Pour tout $x \in]-1; 1[$, $h_x : t \mapsto g(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* (on vient de le voir) et $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \text{ch}(xt)e^{-t}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .

(H₃) Soit $a \in]0; 1[$, alors $\forall (x, t) \in [-a; a] \times \mathbb{R}_+^*$, $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = \text{ch}(xt)e^{-t} \leq \text{ch}(at)e^{-t} = \varphi_a(t)$ car ch est croissante sur \mathbb{R}_+ et φ_a est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* car elle se prolonge par continuité en 0 en posant $\varphi_a(0) = 1$ et $\varphi_a(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{(a-1)t}}{2}$ avec $a - 1 < 0$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, f est de classe C^1 sur $]-1; 1[$ et, avec la formule de LEIBNIZ, on a la relation $f'(x) = \int_0^{+\infty} \text{ch}(xt)e^{-t} dt$.

c. Pour $x \in]-1; 1[$, comme les deux intégrales convergent, $f'(x) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{(x-1)t} dt + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{(-x-1)t} dt$ donc $f'(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{(x-1)t}}{x-1} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \left[\frac{e^{(-x-1)t}}{-x-1} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{1-x^2}$. Comme $]-1; 1[$ est un intervalle, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{2} \ln(1-x) + C = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + C$. Or

$f(0) = 0$ donc $C = 0$ et $\forall x \in]-1; 1[$, $f(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \operatorname{Argth}(x)$.

84

85

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 7

ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS ET ESPACES EUCLIDIENS

86

87

88

89

90

91

92

93

94

95

96

97

98

99

100

101

- 102** a. D'après la formule du rang, comme E est de dimension finie et que $f - \text{id}_E \in \mathcal{L}(E)$, on a l'égalité $\dim(\text{Ker}(f - \text{id}_E)) = \dim(E) - \text{rang}(f - \text{id}_E) = \dim(E) - \dim(\text{Im}(f - \text{id}_E)) = \dim(\text{Im}(f - \text{id}_E)^\perp)$. De plus, soit $x \in \text{Ker}(f - \text{id}_E)$, alors $f(x) = x$. Pour $y \in \text{Im}(f - \text{id}_E)$, il existe un vecteur $z \in E$ tel que $y = f(z) - z$ donc $(x|y) = (x|f(z) - z) = (x|f(z)) - (x|z) = (f(x)|f(z)) - (x|z)$ car $f(x) = x$ donc $(x|y) = 0$ car f est une isométrie donc qu'elle conserve le produit scalaire. On vient de montrer que $\text{Ker}(f - \text{id}_E) \subset \text{Im}(f - \text{id}_E)^\perp$, et on conclut $\text{Ker}(f - \text{id}_E) = \text{Im}(f - \text{id}_E)^\perp$ avec l'égalité des dimensions.
- b. Comme $(f - \text{id}_E)^2 = (f - \text{id}_E) \circ (f - \text{id}_E) = 0$, on a $\text{Im}(f - \text{id}_E) \subset \text{Ker}(f - \text{id}_E)$ donc, avec **a.**, $\text{Im}(f - \text{id}_E) \subset \text{Im}(f - \text{id}_E)^\perp$. Si $x \in \text{Im}(f - \text{id}_E)$, on a donc $(x|x) = \|x\|^2 = 0$ donc $x = 0_E$ ce qui prouve que $\text{Im}(f - \text{id}_E) = \{0_E\}$ donc que $f = \text{id}_E$.

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 8

PROBABILITÉ ET VARIABLES ALÉATOIRES

104

105 a. L'énoncé identifie sans vergogne \mathbb{R}^n et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car \mathbf{b} défini dans l'énoncé est un vecteur colonne.

Méthode 1 : soit λ une valeur propre de M telle que $\dim(E_\lambda(M)) \geq 2$, il existe donc deux vecteurs propres $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{n+1})$ et $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_{n+1})$ de M associés à λ tels que (\mathbf{a}, \mathbf{b}) est libre. Traitons deux cas :

- Si $a_{n+1} = 0$, le vecteur $\mathbf{v} = \mathbf{a}$ répond à la question.
- Si $a_{n+1} \neq 0$, le vecteur $\mathbf{v} = b_{n+1}\mathbf{a} - a_{n+1}\mathbf{b}$ est encore dans $E_\lambda(M)$ car $E_\lambda(M)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^{n+1} , il est non nul car (\mathbf{a}, \mathbf{b}) est libre et que $(a_{n+1}, b_{n+1}) \neq (0, 0)$ et sa $(n+1)$ -ième coordonnée dans la base canonique est nulle par construction donc \mathbf{v} convient.

Méthode 2 : soit l'hyperplan $H = \{v = (v_1, \dots, v_n, 0) \mid (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n\} = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ de \mathbb{R}^{n+1} et λ une valeur propre de M telle que $\dim(E_\lambda(M)) \geq 2$. On a donc $\dim(H) = n + 1 - 1 = n$. Grâce à la formule de GRASSMANN, $\dim(H \cap E_\lambda(M)) = \dim(E_\lambda(M)) + \dim(H) - \dim(H + E_\lambda(M)) \geq 2 + n - (n + 1) = 1$ car $H + E_\lambda(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ donc il existe un vecteur non nul $\mathbf{v} \in H \cap E_\lambda(M)$, c'est-à-dire un vecteur propre $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n, v_{n+1})$ de M tel que $v_{n+1} = 0$.

Avec un tel vecteur propre \mathbf{v} qu'on écrit par blocs $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $w \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$, l'équation $M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ se traduit par $\mathbf{b}^T w = 0$ et $Aw = \lambda w$. Ainsi, comme $w \neq 0$ car $\mathbf{v} \neq 0$ et que $Aw = \lambda w$, w est un vecteur propre de A associé à la même valeur propre λ .

b. L'équation $\mathbf{b}^T w = 0$ se traduit aussi $(\mathbf{b} | w) = 0$ avec le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n donc il existe bien un vecteur propre de A orthogonal à \mathbf{b} si M n'est pas simple, par exemple le vecteur w .

c. Notons $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & X_5 \\ 0 & X_5 & -1 \end{pmatrix}$, comme $N = \begin{pmatrix} A & \mathbf{b}^T \\ \mathbf{b} & c \end{pmatrix}$ est symétrique avec $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ et $c = X_4$, si on note

C l'évènement $C = \text{"il existe un vecteur propre de } A \text{ orthogonal } \mathbf{b}\text{"}$, on a $\bar{B} \subset C$ donc $\mathbb{P}(\bar{B}) = 1 - \mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(C)$ ce qui montre que $\mathbb{P}(B) \geq 1 - \mathbb{P}(C)$. Comme $X_5(\omega) = \{0, 1\}$, par la formule des probabilités totales, on a $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(X_5 = 0)\mathbb{P}(C|X_5 = 0) + \mathbb{P}(X_5 = 1)\mathbb{P}(C|X_5 = 1)$.

Si $X_5 = 0$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonale donc $\text{Sp}(A) = \{2, 1, -1\}$, $E_2(A) = \text{Vect}(e_1)$, $E_1(A) = \text{Vect}(e_2)$

et $E_{-1}(A) = \text{Vect}(e_3)$ donc C est réalisé si et seulement si $(e_1 \perp \mathbf{b})$ ou $(e_2 \perp \mathbf{b})$ ou $(e_3 \perp \mathbf{b})$.

Avec la formule du crible, il vient $\mathbb{P}(C|X_5 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_2 = 0) + \mathbb{P}(X_3 = 0) - \mathbb{P}(X_1 = X_2 = 0) - \mathbb{P}(X_1 = X_3 = 0) - \mathbb{P}(X_2 = X_3 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = X_2 = X_3 = 0)$ donc $\mathbb{P}(C|X_5 = 0) = 3(1-p) - 3(1-p)^2 + (1-p)^3$ par indépendance de X_1, X_2, X_3 .

Si $X_5 = 1$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et on a facilement $\chi_A = (X-2)(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$. Il est clair que

$E_2(A) = \text{Vect}(e_1)$ et, comme $A - \sqrt{2}I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, on a $E_{\sqrt{2}}(A) = \text{Vect}((1 + \sqrt{2})e_2 + e_3)$
 et, de même, on a $E_{-\sqrt{2}}(A) = \text{Vect}((1 - \sqrt{2})e_2 + e_3)$. Ainsi, comme $e_1 \perp b \iff X_1 = 0$,
 $(1 + \sqrt{2})e_2 + e_3 \perp b \iff (1 + \sqrt{2})X_2 + X_3 = 0 \iff X_2 = X_3 = 0$ car $\sqrt{2}$ est irrationnel et
 $(1 - \sqrt{2})e_2 + e_3 \perp b \iff (1 - \sqrt{2})X_2 + X_3 = 0 \iff X_2 = X_3 = 0$ pour la même raison, C est réalisé
 si et seulement si $(X_1 = 0)$ ou $(X_2 = X_3 = 0)$ donc, toujours par indépendance de X_1, X_2, X_3 ,
 $\mathbb{P}(C|X_5 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_2 = X_3 = 0) - \mathbb{P}(X_1 = X_2 = X_3 = 0) = (1-p) + (1-p)^2 - (1-p)^3$.

Avec tout ceci, on conclut que $\mathbb{P}(C) = (1-p)[3(1-p) - 3(1-p)^2 + (1-p)^3] + p[(1-p) + (1-p)^2 - (1-p)^3]$
 qui se simplifie bien en $\mathbb{P}(C) = 1 - 3p^3 + 2p^4$. Au final, $\mathbb{P}(B) \geq 3p^3 - 2p^4$.

106

107

108

109

110

111

112

113

114

115

116

117

118

119

120

121

122

123

124

125

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 9

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

ET CALCUL DIFFÉRENTIEL

127

128

129

130

131

132

133

134

135 a. Par opérations, la fonction f est de classe C^2 (et même C^∞) sur l'ouvert $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Comme

$\forall (x,y) \in D, |f(x,y)| \leq |xy| \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |x||y| \leq \|(x,y)\|_2^2$ et que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \|(x,y)\|_2 = 0$, par encadrement, on trouve $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ et f est aussi continue en $(0,0)$. Par conséquent, f est continue sur \mathbb{R}^2 .

b. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0$ en revenant à la définition et, par un calcul brutal, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x(y^4 + 4x^2y^2 - x^4)}{(x^2 + y^2)^2}$. Le second calcul n'était pas nécessaire puisque $f(x,y) = -f(y,x)$ (1) donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(y,x)$ en dérivant (1) par rapport à x avec la règle de la chaîne.

c. De même, les fonctions rationnelles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur l'ouvert D par opérations. De plus, $\forall (x,y) \in D, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right| \leq \frac{|y|(2x^4 + 4x^2y^2 + 2y^4)}{(x^2 + y^2)^2} = 2|y| \leq 2\|(x,y)\|_2$ et, comme en a., $\frac{\partial f}{\partial x}$ est aussi continue en $(0,0)$. Comme $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(y,x)$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ est aussi continue en $(0,0)$.

Ainsi, par définition, f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

d. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t} = 1$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = -1$. On

peut aussi calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = 0$. Par

contraposée du théorème de SCHWARZ, f n'est pas de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 car $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

136