♠ ♡

PRÉPARATION ORAUX

PSI 1

MILLÉSIME

2025 / 2026

♢ ♣

EXERCICES PAR THÈME

EXERCICES PAR CONCOURS

- 1 : X .... (2 exercices)

numéros 47-48

- 2 : ENS Cachan / Rennes .... (9 exercices)

numéros 12, 49-51, 104-108

- 3 : Centrale Maths 1 .... (27 exercices)

numéros 1-3, 23-28, 52-53, 59-61, 77-78, 86-89, 109-111, 127-130

- 4 : Mines .... (60 exercices)

numéros 4-9, 13-19, 29-38, 54-58, 62-71, 79-80, 90-95, 112-121, 131-134

- 5 : CCINP .... (20 exercices)

numéros 10, 20-21, 39-42, 72-74, 81-82, 96-98, 122-125, 135

- 6 : Mines-Télécom .... (14 exercices)

numéros 22, 43-46, 75, 83-84, 99-102, 126, 136

- 7 : Navale et Saint-Cyr .... (4 exercices)

numéros 11, 76, 85, 103

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 1
INTÉGRALE ET ANALYSE

1

2

3

4

5

6

7 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto x\sin(x) - c\cos(x)$ est dérivable sur $J_n = \overline{I_n} = \left[n\pi; n\pi + \frac{\pi}{2}\right]$, vérifie $f_n'(x) = \sin(x) + x\cos(x) + c\sin(x)$. Traitons deux cas :

- Si n est pair, f_n' reste strictement positive sur J_n donc f_n est strictement croissante sur J_n et $f_n(n\pi) = -c < 0$ et $f_n\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = n\pi + \frac{\pi}{2} > 0$ donc, par le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection strictement croissante de J_n dans $\left[-c; n\pi + \frac{\pi}{2}\right]$. Comme 0 est à l'intérieur de cet intervalle, il existe un unique réel $x_n \in \overset{\circ}{J}_n = I_n$ tel que $f_n(x_n) = 0$, c'est-à-dire tel que $x_n\sin(x_n) - c\cos(x_n) = 0$.
- Si n est impair, f_n' reste strictement négative sur J_n donc f_n est strictement décroissante sur J_n et $f_n(n\pi) = c > 0$ et $f_n\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -n\pi - \frac{\pi}{2} < 0$ donc, par le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection strictement décroissante de J_n dans $\left[-n\pi - \frac{\pi}{2}; c\right]$. Comme 0 est à l'intérieur de cet intervalle, il existe un unique réel $x_n \in \overset{\circ}{J}_n = I_n$ tel que $f_n(x_n) = 0$, c'est-à-dire tel que $x_n\sin(x_n) - c\cos(x_n) = 0$.

Dans les deux cas, pour $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in \left]n\pi; n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $x_n\sin(x_n)c\cos(x_n) = 0$ d'où l'existence et l'unicité de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions de l'énoncé.

b. Comme $x_n\sin(x_n) - c\cos(x_n) = 0$ et $\cos(x_n) \neq 0$, on a $\tan(x_n) = \frac{c}{x_n} = \tan(x_n - n\pi)$ car $\tan$ est π-périodique. Or $x_n - n\pi \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\subset \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Par définition de la fonction Arctan, on a donc $x_n - n\pi = \mathrm{Arctan}\left(\frac{c}{x_n}\right)$. Mais $n\pi < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$ et $n\pi + \frac{\pi}{2} \underset{+\infty}{\sim} n\pi$ donc, par encadrement, $x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{c}{x_n} = 0$, de sorte que $x_n - n\pi \underset{+\infty}{\sim} \frac{c}{x_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{c}{n\pi} = y_n$ ou $x_n \underset{+\infty}{=} n\pi + \frac{c}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

c. En reprenant plus loin le développement limité précédent, $x_n - n\pi = \mathrm{Arctan}\left(\frac{c}{x_n}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{c}{x_n} - \frac{c^3}{3x_n^3} + o\left(\frac{1}{x_n^3}\right)$. Or $x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi$ donc $\frac{c^3}{3x_n^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{c^3}{3n^3\pi^3}$ qui s'écrit aussi $\frac{c^3}{3x_n^3} \underset{+\infty}{=} \frac{c^3}{3n^3\pi^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ et, pour la même raison, on peut aussi remplacer $o\left(\frac{1}{x_n^3}\right)$ par $o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ de sorte que $x_n - n\pi \underset{+\infty}{=} \frac{c}{n\pi + \frac{c}{n\pi} + o(\frac{1}{n})} - \frac{c^3}{3n^3\pi^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Ainsi, on obtient $x_n - n\pi \underset{+\infty}{=} \frac{c}{n\pi} \times \frac{1}{1+\frac{c}{n^2\pi^2}+o(\frac{1}{n^2})} - \frac{c^3}{3n^3\pi^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big) \underset{+\infty}{=} \frac{c}{n\pi}\Big(1 - \frac{c}{n^2\pi^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big) - \frac{c^3}{3n^3\pi^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)$ qui se réduit en $x_n - n\pi \underset{+\infty}{=} \frac{c}{n\pi}\Big(1 - \frac{c}{n^2\pi^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big) - \frac{c^3}{3n^3\pi^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big) \underset{+\infty}{=} \frac{c}{n\pi} - \frac{c^2(3+c)}{3n^3\pi^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)$. On peut donc conclure que $x_n - n\pi - \frac{c}{n\pi} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{c^2(3+c)}{3n^3\pi^3}$.

8 **a.** Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\alpha : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f_\alpha(x) = x^\alpha \ln\Big(1+\frac{1}{x^{2\alpha+2}}\Big)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 1+\frac{1}{x^{2\alpha+2}} > 1$. Déterminons un équivalent simple de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 0 :

- Si $\alpha > -1$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{2\alpha+2}} = 0$ donc $\ln\Big(1+\frac{1}{x^{2\alpha+2}}\Big) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{2\alpha+2}}$ et $f_\alpha(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^\alpha}{x^{2\alpha+2}} = \frac{1}{x^{\alpha+2}}$.
- Si $\alpha = -1$, $f_{-1}(x) = \frac{\ln(2)}{x}$.
- Si $\alpha < -1$, on écrit $\ln\Big(1+\frac{1}{x^{2\alpha+2}}\Big) = -(2\alpha+2)\ln(x) + \ln(1+x^{2\alpha+2}) \underset{+\infty}{=} -(2\alpha+2)\ln(x) + o(\ln(x))$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2\alpha+2} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+x^{2\alpha+2}) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $f_\alpha(x) \underset{+\infty}{\sim} -(2\alpha+2)x^\alpha \ln(x)$.

Et maintenant quand x tend vers 0^+ :

- Si $\alpha > -1$, on a $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x^{2\alpha+2}} = +\infty$ et $\ln\Big(1+\frac{1}{x^{2\alpha+2}}\Big) = -(2\alpha+2)\ln(x) + \ln(1+x^{2\alpha+2})$ donc $\ln\Big(1+\frac{1}{x^{2\alpha+2}}\Big) \underset{0}{=} -(2\alpha+2)\ln(x) + o(\ln(x))$ donc $f_\alpha(x) \underset{0}{\sim} -(2\alpha+2)x^\alpha\ln(x)$ car $\ln(1+x^{2\alpha+2}) \underset{0}{\sim} o(\ln(x))$.
- Si $\alpha = -1$, $f_{-1}(x) = \frac{\ln(2)}{x}$.
- Si $\alpha < -1$, $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x^{2\alpha+2}} = 0$ donc $\ln\Big(1+\frac{1}{x^{2\alpha+2}}\Big) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^{2\alpha+2}}$ et $f_\alpha(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^\alpha}{x^{2\alpha+2}} = \frac{1}{x^{\alpha+2}}$.

On peut passer à l'intégrabilité de la fonction f_α sur $\mathbb{R}_+^*$:

- Si $\alpha > -1$, $f_\alpha(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha+2}}$ avec $\alpha+2 > 1$ donc f_α est intégrable en $+\infty$ par Riemann et $f_\alpha(x) \underset{0}{=} o\Big(\frac{1}{x^{\frac{1-\alpha}{2}}}\Big)$ par croissances comparées donc f_α est intégrable en 0^+ par Riemann car $\frac{1-\alpha}{2} < 1$.
- Si $\alpha = -1$, $f_{-1}(x) = \frac{\ln(2)}{x}$ donc, d'après Riemann, f_{-1} n'est ni intégrable en 0^+, ni en $+\infty$.
- Si $\alpha < -1$, $f_\alpha(x) \underset{+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{x^{\frac{1-\alpha}{2}}}\Big)$ par croissances comparées donc f_α est intégrable en $+\infty$ par Riemann car $\frac{1-\alpha}{2} > 1$ et $f_\alpha(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha+2}}$ avec $\alpha+2 < 1$ donc f_α est intégrable en 0^+ par Riemann.

Ainsi, f_α est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\alpha \neq -1$, et comme f_α est positive, on en déduit que $\int_0^{+\infty} x^\alpha \ln\Big(1+\frac{1}{x^{2\alpha+2}}\Big)dx$ converge si et seulement si $\alpha \neq -1$.

b. <u>Méthode 1</u> : pour calculer $I_\alpha = \int_0^{+\infty} x^\alpha \ln\Big(1+\frac{1}{x^{2\alpha+2}}\Big)dx$ dans le cas où $\alpha \neq -1$, on pose $u_\alpha : x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ et $v_\alpha : x \mapsto \ln\Big(1+\frac{1}{x^{2\alpha+2}}\Big)$ qui sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Traitons deux cas :

- Si $\alpha > -1$, on a $u_\alpha(x)v_\alpha(x) \underset{0}{\sim} -2x^{\alpha+1}\ln(x)$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} u_\alpha(x)v_\alpha(x) = 0$ par croissances comparées car $\alpha+1 > 0$ et $u_\alpha(x)v_\alpha(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha+1}}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u_\alpha(x)v_\alpha(x) = 0$. Ainsi, par intégration par parties, $I_\alpha = -\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big(\frac{-(2\alpha+2)x^{-2\alpha-3}}{1+x^{-(2\alpha+2)}}\Big)dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{x^{-\alpha-2}dx}{1+(x^{-\alpha+1})^2} = \Big[-\frac{1}{\alpha+1}\mathrm{Arctan}(x^{-\alpha-1})\Big]_0^{+\infty}$. Comme $\lim\limits_{x\to0^+} x^{-\alpha-1} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-\alpha-1} = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{Arctan}(t) = \frac{\pi}{2}$, on a $I_\alpha = \frac{\pi}{\alpha+1}$.
- Si $\alpha < -1$, $u_\alpha(x)v_\alpha(x) \underset{+\infty}{\sim} -2x^{\alpha+1}\ln(x)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u_\alpha(x)v_\alpha(x) = 0$ par croissances comparées car

$\alpha+1 < 0$ et $u_\alpha(x)v_\alpha(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x^{\alpha+1}}$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} u_\alpha(x)v_\alpha(x) = 0$. Par conséquent, par intégration par parties, $I_\alpha = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\frac{-(2\alpha+2)x^{-2\alpha-3}}{1+x^{-(2\alpha+2)}}\right)dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{x^{-\alpha-2}dx}{1+(x^{-\alpha+1})^2} = \left[-\frac{1}{\alpha+1}\operatorname{Arctan}(x^{-\alpha-1})\right]_0^{+\infty}$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{-\alpha-1} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-\alpha-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \operatorname{Arctan}(t) = \dfrac{\pi}{2}$, on a $I_\alpha = -\dfrac{\pi}{\alpha+1}$.

On peut unifier cette formule, $\forall \alpha \neq -1,\ I_\alpha = \dfrac{\pi}{|\alpha+1|}$.

<u>Méthode 2</u> : on effectue, pour $\alpha \neq -1$, on pose $u = x^{\alpha+1}$, ou $x = \varphi_\alpha(u) = u^{\frac{1}{\alpha+1}}$. Traitons deux cas :

- Si $\alpha > -1$, φ_α est une bijection strictement croissante et de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, donc, par linéarité, $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} u^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \ln\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\left(\frac{1}{\alpha+1}u^{\frac{-\alpha}{\alpha+1}}\right)du = \frac{1}{\alpha+1}\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{u^2}\right)du$.
- Si $\alpha < -1$, φ_α est une bijection strictement décroissante et de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, donc, par linéarité, $I_\alpha = \displaystyle\int_{+\infty}^{0} u^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \ln\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\left(\frac{1}{\alpha+1}u^{\frac{-\alpha}{\alpha+1}}\right)du = -\frac{1}{\alpha+1}\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{u^2}\right)du$.

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{u^2}\right)du$ ne dépend pas de u, se calcule facilement par le même type d'intégration par parties que ci-dessus, et vaut π, on en déduit à nouveau que $\forall \alpha \neq -1,\ I_\alpha = \dfrac{\pi}{|\alpha+1|}$.

Il est à noter que cette méthode montrait que, pour $\alpha \neq -1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha \ln\left(1+\frac{1}{x^{2\alpha+2}}\right)dx$ était de même nature que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{u^2}\right)du$, c'est-à-dire convergente car $h : u \mapsto \ln\left(1+\dfrac{1}{u^2}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, vérifie $h(u) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{u^2}$ et $h(u) \underset{0}{\sim} -2\ln(u) \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{u}}\right)$, donc h est intégrable en 0 et en $+\infty$ par Riemann.

9

10

11

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 2
ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉNÉRALE

12 **a.** Soit $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $x^T = (x_1 \ \cdots \ x_n)$ tel que $Ax \geqslant 0$. On a donc les inégalités $2x_1 - x_2 \geqslant 0$, $\forall i \in [\![2; n-1]\!], \ -x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} \geqslant 0$ et $-x_{n-1} + 2x_n \geqslant 0$.

Soit un indice $i_0 \in [\![1; n]\!]$ tel que $x_{i_0} = \underset{i \in [\![1;n]\!]}{\mathrm{Min}}(x_i)$. Distinguons trois cas :

- si $i_0 = 1$, on a $x_1 \geqslant x_2 - x_1 \geqslant 0$ par minimalité de x_{i_0}.
- si $i_0 \in [\![2; n-1]\!]$, on a $(x_{i_0-1} - x_{i_0}) + (x_{i_0+1} - x_{i_0}) \leqslant 0$ alors que $x_{i_0-1} - x_{i_0} \geqslant 0$ et $x_{i_0+1} - x_{i_0} \geqslant 0$ donc $x_{i_0-1} - x_{i_0} = x_{i_0+1} - x_{i_0} = 0$ et $x_{i_0-1} = x_{i_0} = x_{i_0+1}$. On continue de proche en proche pour obtenir $x_1 = \cdots = x_n$ et on se ramène au premier ou au dernier cas pour avoir $x_{i_0} \geqslant 0$.
- si $i_0 = n$, on a $x_n \geqslant x_{n-1} - x_n \geqslant 0$.

Dans tous les cas, on a donc $x_{i_0} \geqslant 0$ donc $\forall k \in [\![1; n]\!], \ x_k \geqslant 0$ donc $x \geqslant 0$.

b. Si $x \in \mathrm{Ker}(A)$, $Ax = 0 \geqslant 0$ donc $x \geqslant 0$ d'après **a.** et $A(-x) = 0 \geqslant 0$ donc, de même, $-x \geqslant 0$ et on en déduit que $x = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ donc, comme $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est carrée, A est inversible.

c. La j-ième colonne de A^{-1} est $A^{-1}e_j$, et comme $A(A^{-1}e_j) = e_j \geqslant 0$, par définition de la monotonie d'une matrice, on a $A^{-1}e_j \geqslant 0$ donc tous les coefficients de la matrice A^{-1} sont positifs, ce qui s'écrit $A^{-1} \geqslant 0$.

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22 **a.** Pour $(M, M') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on écrit $M = A + \lambda I_n$ et $M' = B + \lambda' I_n$ avec $(A, B) \in F^2$ et $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2$ puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = F \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$, alors $p(M) = \lambda I_n$ et $p(M') = \lambda' I_n$ et $MM' = (AB + \lambda B + \lambda' A) + \lambda\lambda' I_n$. Comme $AB + \lambda B + \lambda' A \in F$ car F est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par produit matriciel, on obtient $p(MM') = \lambda\lambda' I_n$ donc $p(MM') = p(M)p(M')$.

b. De même, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si on écrit $M = A + \lambda I_n$ avec $A \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $M^2 = (A^2 + 2\lambda A) + \lambda^2 I_n$ avec $A^2 + 2\lambda A \in F$. Si $M^2 \in F$, alors $p(M^2) = \lambda^2 I_n = 0$ donc $\lambda = 0$ et $M \in F$.

c. D'après le cours, $\forall (i, j, k, \ell) \in [\![1; n]\!]^2, \ E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$.

d. Pour $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, traitons deux cas :

Si $i \neq j$, $E_{i,j}^2 = E_{i,j}E_{i,j} = \delta_{j,i}E_{i,j} = 0$ donc $E_{i,j}^2 \in F$ car $0 \in F$ donc, d'après la question précédente, $E_{i,j} \in F$.

Si $i = j$, avec $k \in [\![1;n]\!] \setminus \{i\}$ $(n \geqslant 2)$, $E_{i,k}E_{k,i} = E_{i,i} \in F$ car $E_{i,k} \in F$ et $E_{k,i} \in F$ et d'après le premier cas.

Ainsi, toutes les matrices élémentaires sont dans F, ce qui montre que $\mathrm{Vect}(E_{i,j} \mid (i,j) \in [\![1;n]\!]^2) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset F$ donc que $F = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Mais ceci contredit le fait que F soit un hyperplan de E.

Il n'existe donc aucun hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par produit dont $\mathrm{Vect}(I_n)$ soit un supplémentaire.

Pour $n = 1$, un tel hyperplan existerait bien et ce serait $F = \{0\}$, mais ça n'a que peu d'intérêt.

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 3 SÉRIES NUMÉRIQUES, SÉRIES DE FONCTIONS ET SÉRIES ENTIÈRES

23

24

25

26

27

28

29

30

31

32

33

34

35 **a.** Posons $u_n = H_n - \ln(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\forall n \geqslant 2,\ u_n - u_{n-1} = \dfrac{1}{n} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ donc, avec les développements limités, $u_n - u_{n-1} \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc, par comparaison, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2}(u_n - u_{n-1})$ converge. Par dualité suite-série, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Si on note γ sa limite, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(H_n - \ln(n)) = \gamma$, ce qui s'écrit aussi $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

b. D'après **a.**, $H_{2n} - H_n \underset{+\infty}{=} \ln(2n) + \gamma - \ln(n) - \gamma + o(1)$ donc $H_{2n} - H_n \underset{+\infty}{=} \ln(2) + o(1)$ et on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(H_{2n} - H_n) = \ln(2)$. On pouvait aussi, comme $H_{2n} - H_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k} = \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{1}{n+j}$ en posant $k = n + j$, obtenir cette limite avec les sommes de Riemann. En effet, $H_{2n} - H_n = \dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)$ en posant $a = 0$, $b = 1$ et $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ qui est continue sr le segment $[0;1]$. Par théorème, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(H_{2n} - H_n) = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$ avec la même conclusion.

c. La fraction rationnelle $\dfrac{1}{2X^3 + 3X^2 + X}$ est de degré -3, est écrite sous forme irréductible, et admet 0, -1 et $\dfrac{1}{2}$ comme pôles simples car $2X^3 + 3X^2 + X = 2X\left(X^2 + \dfrac{3}{2}X + \dfrac{1}{2}\right) = 2X(X+1)\left(X - \dfrac{1}{2}\right)$. En écrivant donc

$\dfrac{1}{2X^3+3X^2+X} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X+1} + \dfrac{c}{2X+1}$, on obtient $a = 1$, $b = 1$ et $c = -4$ par des méthodes usuelles ou par identification, de sorte que $\dfrac{1}{2X^3+3X^2+X} = \dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{X+1} - \dfrac{4}{2X+1}$.

d. La série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{a_n}$ converge par critère de RIEMANN car $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $a_n \neq 0$ et que l'on a la formule classique $a_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ donc $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^3}{3}$ et $\dfrac{1}{a_n} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$. Si on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a_k}$, d'après **c.**, il vient $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{6}{k} + \dfrac{6}{k+1} - \dfrac{24}{2k+1}\right) = 6H_n + 6\left(H_n + \dfrac{1}{n+1} - 1\right) - 24\left(-1 + \sum_{k=1}^{2n+1} \dfrac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k}\right)$, donc $S_n = 6H_n + 6\left(H_n + \dfrac{1}{n+1} - 1\right) - 24\left(-1 + H_{2n} + \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{H_n}{2}\right) = 18 - 24(H_{2n} - H_n) + \dfrac{6}{n+1} - \dfrac{24}{2n+1}$.

En passant à la limite avec **b.**, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} S_n = 18 - 24\ln(2) \sim 1,36$.

36

37

38

39 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$. Traitons trois cas :

- Si $x = 0$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est alternée, que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge par le critère spécial des séries alternées.
- Si $x > 0$, $|u_n| = \dfrac{e^{-nx}}{n} \underset{+\infty}{=} o((e^{-x})^n)$ et la série géométrique $\sum_{n\geqslant 1} (e^{-x})^n$ converge car $|e^{-x}| < 1$ donc, par comparaison, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge absolument donc converge.
- Si $x < 0$, $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$ donc $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge grossièrement.

Ainsi, le domaine de définition D de S est $D = \mathbb{R}_+$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

(H_1) la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ d'après **a.**.

(H_2) les fonctions f_n sont toutes continues sur $\mathbb{R}_+$ par opérations.

(H_3) Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, comme $(|f_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0, par le critère spécial des séries alternées, si $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$, on a $|R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| = \dfrac{e^{-(n+1)x}}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Ainsi, R_n est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et $||R_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ par encadrement car $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$.

Ainsi, par le théorème de continuité des séries de fonctions, S est continue sur $\mathbb{R}_+$.

c. S est continue sur $[0;+\infty[$ et, comme la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge par le critère spécial des séries alternées car la suite $(|f_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0 pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on sait majorer le reste et avoir, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $|S(x)| = |R_0(x)| \leqslant |f_1(x)| = e^{-x}$. Comme $S(x) \underset{+\infty}{=} O(e^{-x})$, par comparaison à une intégrale de référence, S est intégrable en $+\infty$.

d. Utilisons cette fois-ci le théorème de dérivation des séries de fonctions :

(H_1) la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}_+$.

(H_2) les fonctions f_n sont toutes de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations et $f_n'(x) = (-1)^{n+1}e^{-nx}$.

(H_3) pour $a > 0$, $x \in [a;+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n'(x)| = e^{-nx} \leqslant e^{-na} = (e^{-a})^n = |f_n'(a)|$. Ainsi, $||f_n'||_{\infty[a;+\infty[} = (e^{-a})^n$ et, comme la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 1}(e^{-a})^n$ converge, $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ on peut remplacer $[a;+\infty[$ par $[a;b]$ sans rien changer.

Par ce théorème, la fonction S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

e. Pour $x > 0$, on a $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}e^{-nx} = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ car $|e^{-x}| < 1$. Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle et que $x \mapsto -\ln(1+e^{-x})$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0,\ S(x) = C - \ln(1+e^{-x})$.

Par convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$, comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0 = \ell_n$, le théorème de la double limite permet de conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 0$. Ainsi, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$, on conclut que $C = 0$ donc que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ S(x) = -\ln(1+e^{-x})$. Mais comme S et $x \mapsto -\ln(1+e^{-x})$ sont continues en 0 d'après **b.**, on a donc $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ S(x) = -\ln(1+e^{-x})$. C'était direct avec les séries entières car on sait que $\forall u \in]-1;1[,\ \ln(1+u) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}u^n}{n}$. Restait à prolonger en 0.

f. Utilisons le théorème d'intégration terme à terme.

(H_1) la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ d'après **a.**.

(H_2) les fonctions f_n sont toutes continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+$ car $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x) \underset{+\infty}{=} O(e^{-x})$.

(H_3) la fonction S est continue sur $\mathbb{R}_+$ d'après **b.**.

(H_4) pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}|f_n(x)|dx = \frac{1}{n}\Big[-\frac{e^{-nx}}{n}\Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{n^2}$ et la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$ converge.

Ainsi, S est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (on le savait déjà) et $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$. Posons $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ et $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\dfrac{(-1)^{k+1}}{k^2} \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{k^2}\Big)$, par comparaison, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ converge donc la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $T_{2n} = S_{2n} - 2\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(2k)^2}S_{2n} - \dfrac{S_n}{2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \lim\limits_{n\to+\infty} T_{2n} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi^2}{6} = \dfrac{\pi^2}{12}$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(x)dx = -\frac{\pi^2}{12}$.

40

41

42

43

44 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \dfrac{e^{-nx}}{n}$. Traitons trois cas :

• Si $x = 0$, $u_n = \dfrac{1}{n}$ et la série harmonique de RIEMANN $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge.

• Si $x > 0$, $u_n = \dfrac{e^{-nx}}{n} \underset{+\infty}{=} o((e^{-x})^n)$ et la série géométrique $\sum\limits_{n \geqslant 1} (e^{-x})^n$ converge car $|e^{-x}| < 1$ donc, par comparaison, la série à termes positifs $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge aussi.

• Si $x < 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ donc $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ diverge grossièrement.

Ainsi, le domaine de définition D de S est $D = \mathbb{R}_+^*$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{n}$.

Limite en $+\infty$:

(H_1) la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ d'après **a.**.

(H_2) les fonctions f_n admettent des limites finies en $+\infty$ qui sont $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0 = \ell_n$.

(H_3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $||f_n||_{\infty,[1;+\infty[} = |f_n(1)| = \dfrac{e^{-n}}{n} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ par croissances comparées donc, comme la série de RIEMANN $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[1;+\infty[$.

Ainsi, par le théorème de double limite, $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 0$.

Limite en 0^+ : pour $n \in \mathbb{N}^*$, en notant $S_n : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{e^{-kx}}{k}$, on a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leqslant S_n(x) \leqslant S(x)$ car on ne somme que des quantités positives. Comme toutes les f_n sont décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$, S est aussi décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par le théorème de la limite monotone, S admet une limite ℓ, finie ou $+\infty$, en 0^+. En passant à la limite quand x tend vers 0^+ dans l'inégalité $0 \leqslant S_n(x) \leqslant S(x)$, on obtient $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = H_n \leqslant \ell$ (valable même si $\ell = +\infty$). Or on sait que la série harmonique diverge donc que $\lim\limits_{n \to +\infty} H_n = +\infty$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, on a $\ell = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0^+} S(x) = +\infty$.

c. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, comme $|e^{-x}| < 1$ et que $\forall t \in]-1;1[$, $\ln(1-t) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{t^n}{n}$, on a $S(x) = -\ln(1 - e^{-x})$.

d. Utilisons le théorème d'intégration terme à terme.

(H_1) la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après **a.**.

(H_2) les fonctions f_n sont toutes continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) \underset{+\infty}{=} O(e^{-x})$ et f_n se prolonge par continuité en 0 en posant $f_n(0) = \dfrac{1}{n}$.

(H_3) la fonction S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ car toutes les fonctions f_n le sont et que, comme en **c.**, on a convergence normale de $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

(H_4) pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx = \dfrac{1}{n}\Big[-\dfrac{e^{-nx}}{n}\Big]_0^{+\infty} = \dfrac{1}{n^2}$ et la série de RIEMANN $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

45

46

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 4
ESPACES VECTORIELS NORMÉS

47

48 **a.** Images des multiples : $\Psi(0_E) = \Psi(0_E + 0_E) = \Psi(0_E) + \Psi(0_E)$ donc $\Psi(0_E) = 0_E$. Ainsi, pour $x \in E$, on a $\Psi(0.x) = \Psi(0_E) = 0_E = 0.\Psi(x)$ mais aussi $\Psi(1.x) = 1.\Psi(x)$. Si, pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\Psi(n.x) = n.\Psi(x)$, alors $\Psi((n+1).x) = \Psi(n.x + x) = \Psi(n.x) + \Psi(x) = n.\Psi(x) + \Psi(x)$ par hypothèse de récurrence donc $\Psi((n+1).x) = (n+1).\Psi(x)$. On a établi par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \Psi(n.x) = n.\Psi(x)$.

Continuité en 0_E : soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{M}{n} \leqslant \varepsilon$. Alors, en posant $\alpha = \dfrac{1}{n} > 0$, on a $\forall x \geqslant E,\ ||x|| \leqslant \alpha \Longrightarrow ||n.x|| \leqslant 1 \Longrightarrow ||\Psi(n.x)|| \leqslant M \Longleftrightarrow n||\Psi(x)|| \leqslant M \Longleftrightarrow ||\Psi(x)|| \leqslant \dfrac{M}{n} \leqslant \varepsilon$. La fonction Ψ est bien continue en 0_E.

Continuité sur E : soit $x_0 \in E$, d'après l'équation fonctionnelle vérifiée par Ψ, $\Psi(x) - \Psi(x_0) = \Psi(x - x_0)$ pour $x \in E$. Par continuité de Ψ en 0_E, on a $\lim\limits_{x\to x_0} \Psi(x - x_0) = \lim\limits_{h\to 0_E} \Psi(h) = 0_E$ donc $\lim\limits_{x\to x_0} \big(\Psi(x) - \Psi(x_0)\big) = 0_E$ ce qui montre $\lim\limits_{x\to x_0} \Psi(x) = \Psi(x_0)$ et la continuité de Ψ en x_0.

La fonction Ψ est donc continue sur E.

b. Pour tout vecteur $x \in E$, on sait déjà d'après la question **a.** que $\forall n \in \mathbb{N},\ \Psi(n.x) = n.\Psi(x)$ donc $\Psi(0_E) = 0_E = \Psi(n.x + (-n).x) = \Psi(n.x) + \Psi((-n).x)$ puis $\Psi((-n).x) = -\Psi(n.x) = -n.\Psi(x) = (-n).\Psi(x)$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in E,\ \Psi(n.x) = n.\Psi(x)$. Pour $q \in \mathbb{N}^*$, en posant $y = \dfrac{1}{q}.x$, on a $\Psi(q.y) = q\Psi(y)$ donc $\Psi\Big(\dfrac{1}{q}.x\Big) = \dfrac{1}{q}.\Psi(x)$ et, pour $p \in \mathbb{Z}$, on a $\Psi\Big(\dfrac{p}{q}.x\Big) = \Psi\Big(p.\Big(\dfrac{1}{q}.x\Big)\Big) = p.\Big(\Psi\Big(\dfrac{1}{q}.x\Big)\Big) = \dfrac{p}{q}.\Psi(x)$. Par conséquent, on a $\forall r \in \mathbb{Q},\ \Psi(r.x) = r.\Psi(x)$. Reste à passer des rationnels aux réels.

Pour tout réel λ, si on pose $a_n = \dfrac{\lfloor n\lambda \rfloor}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, par définition de la partie entière, $n\lambda - 1 < \lfloor n\lambda \rfloor \leqslant n\lambda$ donc $\lambda - \dfrac{1}{n} < a_n \leqslant \lambda$ et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lambda$ par encadrement. Comme $||a_n.x - \lambda.x|| = |a_n - \lambda|\,||x||$, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n.x = \lambda.x$ puis, par continuité de Ψ, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \Psi(a_n.x) = \Psi(\lambda.x)$. Or $\Psi(a_n.x) = a_n.\Psi(x)$ car a_n est un rationnel donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \Psi(a_n.x) = \lambda.\Psi(x)$. Par unicité de la limite, il vient $\Psi(\lambda.x) = \lambda.\Psi(x)$. Ceci étant valable pour tout réel λ et tout vecteur $x \in E$, et comme on a déjà $\forall (x,y) \in E^2,\ \Psi(x+y) = \Psi(x) + \Psi(y)$ par hypothèse, on peut conclure que Ψ est un endomorphisme de E.

49

50

51

52

53

54

55

56

57 **a.** Soit $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) =< u(x), x >$. On peut décomposer $f = g \circ h$ avec $h : E \to \mathbb{E}^2$ définie par $h(x) = (u(x), x)$ qui est linéaire donc continue en dimension finie et $g : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) =< x, y >$ qui est bilinéaire en dimension finie donc continue. Par composition, f est donc continue sur E. Comme la sphère unité $S = \{x \in E \mid ||x|| = 1\}$ est un fermé borné de E en dimension finie, la fonction f étant continue sur S, elle y est bornée et y atteint ses bornes par le théorème des bornes atteintes. Par conséquent, il existe un vecteur unitaire $x_0 \in S$ tel que $\forall x \in S,\ f(x) =< u(x), x >\geqslant < u(x_0), x_0 >= f(x_0)$.

b. Pour $t \in \mathbb{R}$, $||\gamma(t)||^2 = ||\cos(t)x_0 + \sin(t)y_0||^2 = ||\cos(t)x_0||^2 + ||\sin(t)y_0||^2$ par PYTHAGORE car $x_0 \perp y_0$ et, comme x_0 et y_0 sont unitaires, on a $||\gamma(t)||^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ donc $||\gamma(t)|| = 1$.

c. $\forall t \in \mathbb{R},\ \phi(t) = \cos^2(t) < u(x_0), x_0 > +2\cos(t)\sin(t) < u(x_0), y_0 > +\sin^2(t) < u(y_0), y_0 >$ par linéarité de u, bilinéarité du produit scalaire et car u est autoadjoint donc ϕ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ où elle est π-périodique. De plus, $\forall t \in \mathbb{R},\ \phi(t) =< u(\gamma(t)), \gamma(t) >\geqslant< u(x_0), x_0 >$ d'après **a.** et **b.** donc $\forall t \in \mathbb{R},\ \phi(t) \geqslant \phi(0)$. Comme ϕ est dérivable en 0 où elle admet un minimum absolu, $\phi'(0) = 0$.

d. D'après l'expression de **c.**, $\phi'(t) = \sin(2t)(< u(y_0), y_0 > - < u(x_0), x_0 >) + 2\cos(2t) < u(x_0), y_0 >$ pour tout t réel donc $\phi'(0) = 2 < u(x_0), y_0 >= 0$. On a bien montré que $y_0 \perp u(x_0)$.

e. Soit l'hyperplan $H = \text{Vect}(x_0)^\perp$ et soit y_0 un vecteur unitaire quelconque de H, alors $u(x_0) \perp y_0$ d'après la question **d.** donc $u(x_0) \in H^\perp = \text{Vect}(x_0)$, ce qui signifie qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u(x_0) = \lambda x_0$, donc que x_0 est un vecteur propre de u.

f. Soit $x \in F^\perp$ et $y \in F$, alors $< u(x), y >=< x, u(y) >$ car u est autoadjoint donc, comme $u(y) \in F$ car F est stable par u et que $x \in F^\perp$, on a $< u(x), y >= 0$. Comme ceci est vrai pour tout vecteur $y \in F$, on a bien $u(x) \in F^\perp$, donc $F^\perp$ est aussi stable par u.

g. On démontre le théorème spectral par récurrence sur la dimension n de E, et sous la forme suivante : pour tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien de dimension n, il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u.

<u>Initialisation</u> : soit E un espace euclidien de dimension 1 et u un endomorphisme autoadjoint de E, alors u est une homothétie de E comme tout endomorphisme en dimension 1 ; toute base orthonormale de E est une base de E formée de vecteurs propres de u.

<u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons le résultat prouvé pour des espaces euclidiens de dimension $k \in [\![1; n]\!]$. Soit E un espace euclidien de dimension $n+1$ et u un endomorphisme autoadjoint de E. D'après **e.**, il existe un vecteur propre x_0 de u associé à une valeur propre réelle λ. Posons $F = E_\lambda(u)$. On sait que $\dim(F) \geqslant 1$. Traitons deux cas :

- Si $F = E$, $u = \lambda \mathrm{id}_E$ donc toute base orthonormale de E est une base formée de vecteurs propres de u.

- Si $\mathsf{F} \neq \mathsf{E}$, on a $\dim(\mathsf{F}) \leqslant n$, comme F est stable par u, $\mathsf{G} = \mathsf{F}^{\perp}$ est aussi stable par u d'après **f.** et $\dim(\mathsf{G}) = n + 1 - \dim(\mathsf{F}) \geqslant 1$. Or u induit dans G un endomorphisme autoadjoint de G d'où, par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}_{\mathsf{G}}$ de G formée de vecteurs propres de u_{G}, donc de u. En prenant une base orthonormale $\mathcal{B}_{\mathsf{F}}$ de F, ses vecteurs sont des vecteurs propres de u donc $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathsf{F}} \amalg \mathcal{B}_{\mathsf{G}}$ est une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u.

Par principe de récurrence forte, pour tout endomorphisme autoadjoint u sur un espace euclidien E, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E formée de vecteurs propres de u. On vient de montrer, d'une manière totalement différente de celle du cours, le fameux théorème spectral.

58

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 5 RÉDUCTION

59

60

61

62

63

64

65

66

67

68

69

70

71

72

73

74 **a.** On calcule $\chi_{A_\alpha} = \begin{vmatrix} X-1 & -\alpha & 0 \\ 0 & X-1 & -1 \\ -1 & 0 & X+1 \end{vmatrix} = (X-1)^2(X+1) - \alpha = X^3 - X^2 - X + 1 - \alpha$ par Sarrus. La fonction $f : t \mapsto t^3 - t^2 - t + 1 - \alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(t) = 3t^2 - 2t - 1 = (3t+1)(t-1)$ donc f est croissante sur $\left]-\infty; -\frac{1}{3}\right]$, décroissante sur $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.

Comme $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1 - \alpha = \frac{32}{27} - \alpha$ et $f(1) = -\alpha$, d'après le tableau de variations de f :

- Si $\alpha < 0$, f s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$, en $x_1 \in \left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[$. Alors $\mathrm{Sp}(A_\alpha) = \{x_1\}$.
- Si $\alpha = 0$, $f : t \mapsto (t-1)^2(t+1)$ s'annule en 1 et -1 donc $\mathrm{Sp}(A_0) = \{-1, 1\}$.
- Si $\alpha \in \left]0; \frac{32}{27}\right[$, f s'annule en $x_1 \in \left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[$, $x_2 \in \left]-\frac{1}{3}; 1\right[$ et $x_3 \in]1; +\infty[$ et $\mathrm{Sp}(A_\alpha) = \{x_1, x_2, x_3\}$.
- Si $\alpha = \frac{32}{27}$, $f : t \mapsto t^3 - t^2 - t - \frac{5}{27} = \left(t + \frac{1}{3}\right)^2\left(t - \frac{5}{3}\right)$ s'annule en $-\frac{1}{3}$ et $\frac{5}{3}$ donc $\mathrm{Sp}(A_{32/27}) = \left\{-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right\}$.
- Si $\alpha > \frac{32}{27}$, f s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$, en $x_1 \in]1; +\infty[$. Alors $\mathrm{Sp}(A_\alpha) = \{x_1\}$.

b. Avec le spectre trouvé à la question **a**, on considère cinq cas :

- Si $\alpha < 0$, χ_{A_α} n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ car x_1 est simple donc A_α n'est pas diagonalisable.
- Si $\alpha = 0$, χ_{A_0} est scindé sur $\mathbb{R}$ et $A_0 - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ est de rang 2 donc, avec la formule du rang, $\dim(E_1(A_0)) = 1 \neq 2 = m_1(A_0)$ donc A_0 n'est pas diagonalisable.
- Si $\alpha \in \left]0; \dfrac{32}{27}\right[$, χ_{A_α} est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le cours, A_α est diagonalisable.
- Si $\alpha = \dfrac{32}{27}$, $\chi_{A_{32/27}}$ est scindé sur $\mathbb{R}$ et $A32/27 + \dfrac{I_3}{3} = \begin{pmatrix} 4/3 & 32/27 & 0 \\ 0 & 4/3 & 1 \\ 1 & 0 & -2/3 \end{pmatrix}$ est de rang 2 donc $\dim(E_{-1/3}(A_{32/27})) = 1 \neq 2 = m_{-1/3}(A_{32/27})$ donc $A_{32/27}$ n'est pas diagonalisable.
- Si $\alpha > \dfrac{32}{27}$, χ_{A_α} n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ car x_1 est simple donc A_α n'est pas diagonalisable.

Ainsi, A_α est diagonalisable si et seulement si $\alpha \in \left]0; \dfrac{32}{27}\right[$.

75

76

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 6 THÉORÈMES DE DOMINATION

77

78

79

80

81

82

83 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $h_x : t \mapsto e^{-t}\dfrac{\text{sh}\,(xt)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0 en posant $h_x(0) = x$ car $\text{sh}\,(xt) \underset{0}{=} xt + o(t)$ et $e^{-t} \underset{0}{=} 1 + o(1)$ donc $h_x(t) \underset{0}{=} x + o(1)$.

Comme $h_{-x} = -h_x$, il suffit de traiter le cas $x \geqslant 0$.

Si $x = 0$, il est clair que $h_0 = 0$ donc h_0 est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f(0)$ existe, on a même $f(0) = 0$.

Si $x > 0$, $\text{sh}\,(xt) = \dfrac{e^{xt} - e^{-xt}}{2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{xt}}{2}$ donc $h_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{(x-1)t}}{2t}$ donc h_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $x - 1 < 0$ par comparaison de fonctions de référence. En effet, si $x < 1$, on a $h_x(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-(1-x)t})$, $h_1(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2t}$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} h_x(t) = +\infty$ si $x > 1$. h_x est donc intégrable si et seulement si $x \in]0;1[$ donc, comme h_x est positive, $\displaystyle\int_0^{+\infty} h_x(t)dt$ converge si et seulement si $x \in]0;1[$.

Ainsi, le domaine de définition D de f vaut $D =]-1;1[$ et f est impaire sur D.

b. Soit l'application $g :]-1;1[\times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = e^{-t}\dfrac{\text{sh}\,(xt)}{t}$.

(H_1) Pour tout $t > 0$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur $]-1;1[$.

(H_2) Pour tout $x \in]-1;1[$, $h_x : t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on vient de le voir) et $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \text{ch}\,(xt)e^{-t}$ est continue $\mathbb{R}_+^*$.

(H_3) Soit $a \in]0;1[$, alors $\forall (x,t) \in [-a;a] \times \mathbb{R}_+^*$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \text{ch}\,(xt)e^{-t} \leqslant \text{ch}\,(at)e^{-t} = \varphi_a(t)$ car ch est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et φ_a est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle se prolonge par continuité en 0 en posant $\varphi_a(0) = 1$ et $\varphi_a(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{(a-1)t}}{2}$ avec $a - 1 < 0$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, f est de classe C^1 sur $]-1;1[$ et, avec la formule de Leibniz, on a la relation $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \text{ch}\,(xt)e^{-t}dt$.

c. Pour $x \in]-1;1[$, comme les deux intégrales convergent, $f'(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(x-1)t}dt + \dfrac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{(-x-1)t}dt$ donc $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{e^{(x-1)t}}{x-1}\right]_0^{+\infty} + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{e^{(-x-1)t}}{-x-1}\right]_0^{+\infty} = \dfrac{1}{2(1-x)} + \dfrac{1}{2(1+x)} = \dfrac{1}{1-x^2}$. Comme $]-1;1[$ est un intervalle, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln(1+x) - \dfrac{1}{2}\ln(1-x) + C = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) + C$. Or

$f(0) = 0$ donc $C = 0$ et $\forall x \in]-1;1[,\ f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = \operatorname{Argth}(x)$.

84

85

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 7
ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS ET ESPACES EUCLIDIENS

86

87

88

89

90

91

92

93

94

95

96

97

98

99

100

101

102 **a.** D'après la formule du rang, comme E est de dimension finie et que $f - \mathrm{id}_E \in \mathcal{L}(E)$, on a l'égalité $\dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)) = \dim(E) - \mathrm{rang}(f - \mathrm{id}_E)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)) = \dim(\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)^{\perp})$. De plus, soit $x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$, alors $f(x) = x$. Pour $y \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)$, il existe un vecteur $z \in E$ tel que $y = f(z) - z$ donc $(x|y) = (x|f(z) - z) = (x|f(z)) - (x|z) = (f(x)|f(z)) - (x|z)$ car $f(x) = x$ donc $(x|y) = 0$ car f est une isométrie donc qu'elle conserve le produit scalaire. On vient de montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)^{\perp}$, et on conclut $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)^{\perp}$ avec l'égalité des dimensions.

b. Comme $(f - \mathrm{id}_E)^2 = (f - \mathrm{id}_E) \circ (f - \mathrm{id}_E) = 0$, on a $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ donc, avec **a.**, $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)^{\perp}$. Si $x \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)$, on a donc $(x|x) = ||x||^2 = 0$ donc $x = 0_E$ ce qui prouve que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E) = \{0_E\}$ donc que $f = \mathrm{id}_E$.

103

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 8
PROBABILITÉ ET VARIABLES ALÉATOIRES

104

105 **a.** L'énoncé identifie sans vergogne $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car b défini dans l'énoncé est un vecteur colonne.

Méthode 1 : soit λ une valeur propre de M telle que $\dim(E_\lambda(M)) \geqslant 2$, il existe donc deux vecteurs propres $a = (a_1, \cdots, a_{n+1})$ et $b = (b_1, \cdots, b_{n+1})$ de M associés à λ tels que (a, b) est libre. Traitons deux cas :

- Si $a_{n+1} = 0$, le vecteur $v = a$ répond à la question.
- Si $a_{n+1} \neq 0$, le vecteur $v = b_{n+1}a - a_{n+1}b$ est encore dans $E_\lambda(M)$ car $E_\lambda(M)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{n+1}$, il est non nul car (a, b) est libre et que $(a_{n+1}, b_{n+1}) \neq (0, 0)$ et sa $(n+1)$-ième coordonnée dans la base canonique est nulle par construction donc v convient.

Méthode 2 : soit l'hyperplan $H = \{v = (v_1, \cdots, v_n, 0) \mid (v_1, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n\} = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ et λ une valeur propre de M telle que $\dim(E_\lambda(M)) \geqslant 2$. On a donc $\dim(H) = n + 1 - 1 = n$. Grâce à la formule de Grassmann, $\dim(H \cap E_\lambda(M)) = \dim(E_\lambda(M)) + \dim(H) - \dim(H + E_\lambda(M)) \geqslant 2 + n - (n+1) = 1$ car $H + E_\lambda(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ donc il existe un vecteur non nul $v \in H \cap E_\lambda(M)$, c'est-à-dire un vecteur propre $v = (v_1, \cdots, v_n, v_{n+1})$ de M tel que $v_{n+1} = 0$.

Avec un tel vecteur propre v qu'on écrit par blocs $v = \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $w \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ " = " $\mathbb{R}^n$, l'équation $Mv = \lambda v$ se traduit par $b^T w = 0$ et $Aw = \lambda w$. Ainsi, comme $w \neq 0$ car $v \neq 0$ et que $Aw = \lambda w$, w est un vecteur propre de A associé à la même valeur propre λ.

b. L'équation $b^T w = 0$ se traduit aussi $(b|w) = 0$ avec le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ donc il existe bien un vecteur propre de A orthogonal à b si M n'est pas simple, par exemple le vecteur w.

c. Notons $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & X_5 \\ 0 & X_5 & -1 \end{pmatrix}$, comme $N = \begin{pmatrix} A & b^T \\ b & c \end{pmatrix}$ est symétrique avec $b = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ et $c = X_4$, si on note C l'évènement $C =$ "il existe un vecteur propre de A orthogonal b", on a $\overline{B} \subset C$ donc $P(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}(B) \leqslant \mathbb{P}(C)$ ce qui montre que $\mathbb{P}(B) \geqslant 1 - \mathbb{P}(C)$. Comme $X_5(\omega) = \{0, 1\}$, par la formule des probabilités totales, on a $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(X_5 = 0)\,\mathbb{P}(C|X_5 = 0) + \mathbb{P}(X_5 = 1)\,\mathbb{P}(C|X_5 = 1)$.

Si $X_5 = 0$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonale donc $\mathrm{Sp}(A) = \{2, 1, -1\}$, $E_2(A) = \mathrm{Vect}(e_1)$, $E_1(A) = \mathrm{Vect}(e_2)$ et $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}(e_3)$ donc C est réalisé si et seulement si $(e_1 \perp b)$ ou $(e_2 \perp b)$ ou $(e_3 \perp b)$. Avec la formule du crible, il vient $\mathbb{P}(C|X_5 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_2 = 0) + \mathbb{P}(X_3 = 0) - \mathbb{P}(X_1 = X_2 = 0) - \mathbb{P}(X_1 = X_3 = 0) - \mathbb{P}(X_2 = X_3 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = X_2 = X_3 = 0)$ donc $\mathbb{P}(C|X_5 = 0) = 3(1-p) - 3(1-p)^2 + (1-p)^3$ par indépendance de X_1, X_2, X_3.

Si $X_5 = 1$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et on a facilement $\chi_A = (X-2)(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$. Il est clair que

$E_2(A) = \mathrm{Vect}(e_1)$ et, comme $A - \sqrt{2}\, I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, on a $E_{\sqrt{2}}(A) = \mathrm{Vect}((1+\sqrt{2})e_2 + e_3)$ et, de même, on a $E_{-\sqrt{2}}(A) = \mathrm{Vect}((1-\sqrt{2})e_2 + e_3)$. Ainsi, comme $e_1 \perp b \iff X_1 = 0$, $(1+\sqrt{2})e_2 + e_3 \perp b \iff (1+\sqrt{2})X_2 + X_3 = 0 \iff X_2 = X_3 = 0$ car $\sqrt{2}$ est irrationnel et $(1-\sqrt{2})e_2 + e_3 \perp b \iff (1-\sqrt{2})X_2 + X_3 = 0 \iff X_2 = X_3 = 0$ pour la même raison, C est réalisé si et seulement si $(X_1 = 0)$ ou $(X_2 = X_3 = 0)$ donc, toujours par indépendance de X_1, X_2, X_3, $\mathbb{P}(C|X_5 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_2 = X_3 = 0) - \mathbb{P}(X_1 = X_2 = X_3 = 0) = (1-p) + (1-p)^2 - (1-p)^3$.

Avec tout ceci, on conclut que $\mathbb{P}(C) = (1-p)\big[3(1-p) - 3(1-p)^2 + (1-p)^3\big] + p\big[(1-p) + (1-p)^2 - (1-p)^3\big]$ qui se simplifie bien en $\mathbb{P}(C) = 1 - 3p^3 + 2p^4$. Au final, $\mathbb{P}(B) \geqslant 3p^3 - 2p^4$.

106

107

108

109

110

111

112

113

114

115

116

117

118

119

120

121

122

123

124

125

126

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 9 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET CALCUL DIFFÉRENTIEL

127

128

129

130

131

132

133

134

135 **a.** Par opérations, la fonction f est de classe C^2 (et même C^∞) sur l'ouvert $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Comme $\forall (x,y) \in D,\ |f(x,y)| \leqslant |xy|\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |x||y| \leqslant ||(x,y)||_2^2$ et que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} ||(x,y)||_2 = 0$, par encadrement, on trouve $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ et f est aussi continue en $(0,0)$. Par conséquent, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$ en revenant à la définition et, par un calcul brutal, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{x(y^4+4x^2y^2-x^4)}{(x^2+y^2)^2}$. Le second calcul n'était pas nécessaire puisque $f(x,y) = -f(y,x)$ (1) donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(y,x)$ en dérivant (1) par rapport à x avec la règle de la chaîne.

c. De même, les fonctions rationnelles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur l'ouvert D par opérations. De plus, $\forall (x,y) \in D,\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant \dfrac{|y|(2x^4+4x^2y^2+2y^4)}{(x^2+y^2)^2} = 2|y| \leqslant 2||(x,y)||_2$ et, comme en **a.**, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est aussi continue en $(0,0)$. Comme $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(y,x)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est aussi continue en $(0,0)$.
Ainsi, par définition, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

d. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{t} = 1$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = -1$. On peut aussi calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = 0$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,t) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = 0$. Par contraposée du théorème de SCHWARZ, f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ car $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

136