



PRÉPARATION ORAUX

PSI 1

MILLÉSIME

2025 / 2026



EXERCICES PAR THÈME

- 1 : intégrales et analyse (11 exercices : 1-11)page 4
- 2 : algèbre linéaire et générale (11 exercices : 12-22).....page 6
- 3 : séries numériques, séries de fonctions, séries entières (24 exercices : 23-46) page 10
- 4 : espaces vectoriels normés (12 exercices : 47-58).....page 16
- 5 : réduction des endomorphismes (18 exercices : 59-76) page 20
- 6 : théorèmes de domination (9 exercices : 77-85) page 24
- 7 : espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens (18 exercices : 86-103) page 26
- 8 : probabilités et variables aléatoires (23 exercices : 104-126).....page 30
- 9 : équations différentielles et calcul différentiel (10 exercices : 127-136) page 38

EXERCICES PAR CONCOURS

- 1 : X (2 exercices)
numéros 47-48
- 2 : ENS Cachan / Rennes (9 exercices)
numéros 12, 49-51, 104-108
- 3 : Centrale Maths 1 (27 exercices)
numéros 1-3, 23-28, 52-53, 59-61, 77-78, 86-89, 109-111, 127-130
- 4 : Mines (60 exercices)
numéros 4-9, 13-19, 29-38, 54-58, 62-71, 79-80, 90-95, 112-121, 131-134
- 5 : CCINP (20 exercices)
numéros 10, 20-21, 39-42, 72-74, 81-82, 96-98, 122-125, 135
- 6 : Mines-Télécom (14 exercices)
numéros 22, 43-46, 75, 83-84, 99-102, 126, 136
- 7 : Navale et Saint-Cyr (4 exercices)
numéros 11, 76, 85, 103

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 1

INTÉGRALE ET ANALYSE

1 a. Pour $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_{n,t} : x \mapsto x^n e^{-\frac{tx^2}{2}}$ est continue sur \mathbb{R} et elle est paire si n est pair et impaire si n est impair. Par conséquent, $g_{n,t}$ est intégrable sur \mathbb{R} si et seulement si elle l'est sur \mathbb{R}_+ . Comme $g_{n,t}(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées car $t > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n+2} e^{-\frac{tx^2}{2}} = 0$, la fonction $g_{n,t}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ et $m_n(t)$ existe. Ainsi, la suite $(m_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

b. Comme la fonction $g_{2n+1,t}$ est impaire, on a $\forall n \in \mathbb{N}, m_{2n+1}(t) = 0$. Posons, pour la suite de l'exercice, $p_n(t) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-\frac{tx^2}{2}} dx$ qui existe d'après **a.** Comme on connaît l'intégrale de GAUSS $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, en effectuant le changement de variable $x = \frac{\sqrt{2}u}{\sqrt{t}} = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection strictement croissante de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ et de classe C^1 , il vient $p_0(t) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{tx^2}{2}} dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{2t}}$. De plus, on a directement $p_1(t) = \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{tx^2}{2}} dx = \left[-\frac{1}{t} e^{-\frac{tx^2}{2}}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{t}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$, on pose $u_n : x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$ et $v : x \mapsto e^{-\frac{tx^2}{2}}$ dans $p_n(t) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-\frac{tx^2}{2}} dx$ avec u_n et v qui sont de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ et telles que $u_n(0)v(0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x)v(x) = 0$ par croissances comparées. Ainsi, par intégration par parties, $p_n(t) = 0 - \int_0^{+\infty} v'(t)u_n(t)dt = \frac{t}{n+1} \int_0^{+\infty} x^{n+2} e^{-\frac{tx^2}{2}} dx = \frac{t}{n+1} p_{n+2}(t)$.

Pour l'expression de $p_n(t)$ en fonction de n , traitons deux cas :

- Si $n = 2k$ est pair avec $k \in \mathbb{N}$, $p_n(t) = p_{2k}(t) = \frac{2k-1}{t} p_{2k-2}(t)$ puis, par une récurrence classique,

$$\text{il vient } p_{2k}(t) = \left(\prod_{i=1}^k \frac{2i-1}{t}\right) p_0(t) = \frac{(2k)!}{2^k k! t^k} \sqrt{\frac{\pi}{2t}} \text{ donc } \frac{p_{2k}(t)}{(2k)!} \sim \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{2t}\right)^k \sqrt{\frac{\pi}{2t}}.$$

- Si $n = 2k+1$ est impair avec $k \in \mathbb{N}$, $p_n(t) = p_{2k+1}(t) = \frac{2k}{t} p_{2k-1}(t)$ puis, par récurrence,

$$\text{on a } p_{2k+1}(t) = \left(\prod_{i=1}^k \frac{2i}{t}\right) p_1(t) = \frac{2^k k!}{t^{k+1}} \text{ donc } \frac{p_{2k+1}(t)}{(2k+1)!} = \frac{2^k k!}{(2k)! t^{k+1} (2k+1)} \text{ et, avec STIRLING,}$$

$$\frac{p_{2k+1}(t)}{(2k+1)!} \sim \frac{2^k \sqrt{2\pi k} k^k e^{2k}}{\sqrt{4\pi k} (2k)^{2k} e^{k+1} t^{k+1} (2k)} \text{ donc } \frac{p_{2k+1}(t)}{(2k+1)!} \sim \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{e^k}{2^k k^{k+1} t^{k+1}} \sim \left(\frac{1}{2t} \times \sqrt{\frac{\pi}{k}}\right) \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{2t}\right)^k.$$

c. La fonction $g_t : x \mapsto e^{-\frac{tx^2}{2}} e^x$ est bien définie sur \mathbb{R} et, comme on sait que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, on a

$$g_t(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} e^{-\frac{tx^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} h_n(x) \text{ en posant } h_n : x \mapsto \frac{x^n}{n!} e^{-\frac{tx^2}{2}} :$$

(H₁) La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} h_n$ converge simplement vers g_t sur \mathbb{R} d'après ce qui précède.

(H₂) Les fonctions h_n , qui sont paires ou impaires en fonction de la parité de n , sont continues et intégrable sur \mathbb{R} car $h_n(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées.

(H₃) La fonction g_t est continue sur \mathbb{R} .

(H₄) La série $\sum_{n \geq 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |h_n(x)| dx$ converge car $\int_{-\infty}^{+\infty} |h_n(x)| dx = \frac{2p_n(t)}{n!}$ par parité de $|h_n|$ et que,

d'après la question précédente, $\frac{2p_{2k}(t)}{(2k)!} = O\left(\frac{1}{k!} \left(\frac{1}{2t}\right)^k\right)$ et $\frac{2p_{2k+1}(t)}{(2k+1)!} = O\left(\frac{1}{k!} \left(\frac{1}{2t}\right)^k\right)$, alors que

la série exponentielle $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{2t}\right)^k$ converge (sa somme vaut $e^{1/(2t)}$). On pouvait aussi utiliser la règle de D'ALEMBERT car si $a_n = \frac{2p_n(t)}{n!}$, on a $\frac{a_{2k+2}}{a_{2k}} = \frac{p_{2k+2}(t)}{(2k+2)(2k+1)p_{2k}(t)} = \frac{1}{(2k+2)t}$ donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{2k+2}}{a_{2k}} = 0 < 1$ donc $\sum_{k \geq 0} a_{2k}$ converge. De plus, $\frac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}} = \frac{p_{2k+1}(t)}{(2k+1)(2k)p_{2k-1}(t)} = \frac{1}{(2k+1)t}$ donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}} = 0 < 1$ donc $\sum_{k \geq 0} a_{2k+1}$ converge.

Par le théorème d'intégration terme à terme, g_t est intégrable sur \mathbb{R} et $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{tx^2}{2}} e^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t) dt$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{tx^2}{2}} e^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{m_{2n}(t)}{(2n)!} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p_{2n}(t)}{(2n)!}$ car $m_{2n+1}(t) = 0$, ce qui donne, avec la question précédente, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{tx^2}{2}} e^x dx = 2 \sqrt{\frac{\pi}{2t}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2t}\right)^n = e^{\frac{1}{2t}} \sqrt{\frac{2\pi}{t}}$.

d. La fonction g_t est continue sur \mathbb{R} , $g_t(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{=} o(e^x)$ alors que $x \mapsto e^x$ est intégrable en $-\infty$ donc, par comparaison, g_t est intégrable en $-\infty$. De plus, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{tx^2}{2}} e^{2x} = 0$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - \frac{tx^2}{2}\right) = -\infty$, on a $g_t(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-x})$ alors que $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable en $+\infty$ donc, encore par comparaison, g_t est intégrable en $+\infty$. Par conséquent, g_t est intégrable sur \mathbb{R} .

On écrit $g_t(x) = e^{-\frac{tx^2}{2}} e^x = e^{x + \frac{-tx^2}{2}}$ et $x - \frac{tx^2}{2} = -\frac{t}{2} \left(x - \frac{1}{t}\right)^2 + \frac{1}{2t}$ donc, par linéarité de l'intégrale, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{tx^2}{2}} e^x dx = e^{\frac{1}{2t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t}{2} \left(x - \frac{1}{t}\right)^2} dx$. Avec le changement de variable $x = u + \frac{1}{t} = \psi(u)$ avec ψ qui est une bijection strictement croissante et de classe C^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , on a l'expression déjà trouvée à la question précédente, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{tx^2}{2}} e^x dx = e^{\frac{1}{2t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{tu^2}{2}} du = e^{\frac{1}{2t}} m_0(t) = e^{\frac{1}{2t}} \sqrt{\frac{2\pi}{t}}$.

2

3 a. Pour $x \geq 0$, la fonction $g_x : t \mapsto \frac{1}{1+x^2+t^2}$ est continue sur \mathbb{R}_+ et $g_x(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ donc, par comparaison aux intégrales de RIEMANN, g_x est intégrable en $+\infty$ donc sur \mathbb{R}_+ , et $F(x)$ existe. De plus, par linéarité de

$$\text{l'intégrale, } F(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2} dt = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left[\text{Arctan} \left(\frac{t}{\sqrt{1+x^2}} \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+x^2}}.$$

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$, la fonction $h_n : t \mapsto \frac{dt}{1+n^\alpha \pi^\alpha \sin^2(t)}$ est continue sur le segment $[0; \pi]$ donc I_n existe. De plus, comme $\forall t \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, $h_n(\pi-t) = h_n(t)$, par symétrie avec le changement de variable $u = \pi-t$ dans la seconde intégrale, on a $I_n = \int_0^{\pi/2} h_n(t) dt + \int_{\pi/2}^\pi h_n(t) dt = 2 \int_0^{\pi/2} h_n(t) dt$. On considère l'intégrale sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ et on effectue le changement de variable $u = \frac{1}{\tan(t)}$, c'est-à-dire $t = \text{Arctan} \left(\frac{1}{u} \right) = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection strictement décroissante et de classe C^1 de \mathbb{R}_+^* dans $]0; \frac{\pi}{2}[$, de sorte que $I_n = 2 \int_{+\infty}^0 \frac{1}{1+n^\alpha \pi^\alpha (1+u^2)^{-1}} \left(-\frac{1}{1+u^2} \right) du$ car $\sin^2(t) = \tan^2(t) \cos^2(t) = \frac{1}{u^2} \times \frac{1}{1+(1/u)^2}$ donc $\sin^2(t) = \frac{1}{1+u^2} = (1+u^2)^{-1}$ et que $\varphi(u) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(u)$ donc $\varphi'(u) = -\frac{1}{1+u^2}$. Ainsi, grâce à la question précédente, on a la relation $I_n = 2F(n^{\alpha/2} \pi^{\alpha/2}) = \frac{\pi}{\sqrt{1+n^\alpha \pi^\alpha}}$.

c. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $g_\alpha : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_\alpha(t) = \frac{1}{1+t^\alpha \sin^2(t)}$ est continue par opérations sur \mathbb{R}_+^* :

- Si $\alpha = -2$, alors $t^\alpha \sin^2(t) = \frac{\sin^2(t)}{t^2} \underset{0}{\sim} 1$ donc g_{-2} se prolonge en 0 en posant $g_{-2}(0) = \frac{1}{2}$.
- Si $\alpha > -2$, alors $t^\alpha \sin^2(t) \underset{0}{\sim} t^{2+\alpha}$ donc $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^\alpha \sin^2(t) = 0$ et g_α se prolonge en 0 en posant $g_\alpha(0) = 1$.
- Si $\alpha < -2$, alors $t^\alpha \sin^2(t) \underset{0}{\sim} t^{2+\alpha}$ donc $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^\alpha \sin^2(t) = +\infty$ et g_α se prolonge en 0 avec $g_\alpha(0) = 0$.

Dans tous les cas, g_α est intégrable en 0 car elle y est continue donc $\int_0^\pi g_\alpha(t) dt$ converge.

Si $\alpha \leq 0$, $\forall t \geq \pi$, $t^\alpha \leq 1$ donc $g_\alpha(t) \geq \frac{1}{1+\sin^2(t)} \geq \frac{1}{2}$ donc $\int_\pi^{+\infty} g_\alpha(t) dt$ diverge "grossièrement".

Prenons pour la suite $\alpha > 0$. Soit $G_\alpha : [\pi; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $G_\alpha(x) = \int_\pi^x g_\alpha(t) dt = \int_\pi^x \frac{dt}{1+t^\alpha \sin^2(t)}$.

Par CHASLES, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $G_\alpha(n\pi) = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dt}{1+t^\alpha \sin^2(t)}$. Posons, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$u_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dt}{1+t^\alpha \sin^2(t)}$. Le changement de variable affine $t = u + k\pi$ (facile à justifier) transforme u_k et

$u_k = \int_0^\pi \frac{du}{1+(u+k\pi)^\alpha \sin^2(u)}$ car $\sin^2(u+k\pi) = \sin^2(u)$. Comme $\forall u \in [0; \pi]$, $k\pi \leq u+k\pi \leq (k+1)\pi$, on a

$k^\alpha \pi^\alpha \leq (u+k\pi)^\alpha \leq (k+1)^\alpha \pi^\alpha$ donc $1+k^\alpha \pi^\alpha \sin^2(u) \leq 1+(u+k\pi)^\alpha \sin^2(u) \leq 1+(k+1)^\alpha \pi^\alpha \sin^2(u)$. Par

croissance de l'intégrale, $\sum_{k=1}^{n-1} I_{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi}{\sqrt{1+(k+1)^\alpha \pi^\alpha}} \leq G_\alpha(n\pi) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi}{\sqrt{1+k^\alpha \pi^\alpha}} = \sum_{k=1}^{n-1} I_k$. Comme

$I_k \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{k^{\alpha/2} \pi^{\alpha/2}}$, la série à termes positifs $\sum_{k \geq 1} I_k$ converge si et seulement si $\alpha > 2$ par le critère de RIEMANN.

Traisons deux cas :

- Si $\alpha \leq 2$, $\sum_{k \geq 1} I_k$ diverge donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} I_{k+1} = +\infty$ donc, par minoration $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_\alpha(n\pi) = +\infty$, ce

qui prouve la divergence de l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} g_\alpha(t) dt$, donc aussi la divergence de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha \sin^2(t)}$.

- Si $\alpha > 2$, $\sum_{k \geq 1} I_k$ converge, notons $S = \sum_{k=1}^{+\infty} I_k$, on a donc $\forall n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n-1} I_k \leq S$ donc $G_\alpha(n\pi) \leq S$ et,

pour tout réel $x \geq \pi$, comme G_α est croissante car g_α est positive, on a $G_\alpha(x) \leq G_\alpha([x] + 1)\pi \leq S$

donc les intégrales partielles étant majorées, $\int_\pi^{+\infty} g_\alpha(t) dt$ converge donc $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha \sin^2(t)}$ aussi.

Par conséquent, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha \sin^2(t)}$ converge si et seulement si $\alpha > 2$.

4

5 D'abord, pour tout polynôme P , la fonction $x \mapsto [P(x)]$ est continue par morceaux sur \mathbb{R}_+ par composition

donc la fonction $f_P : x \mapsto (-1)^{[P(x)]}$ l'est aussi. Comme $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|f_P(x)| = 1$, bien sûr que la fonction f_P

n'est pas intégrable sur \mathbb{R}_+ . Traitons trois cas :

- Si $P = a$ est constant, f_P est constante et vaut ± 1 selon la parité de $[a]$ donc $\int_0^{+\infty} f_P$ diverge.

- Si $P = aX + b$ est de degré 1, prenons par exemple $a > 0$ (l'autre cas se traite de la même manière). En posant $u_n = \frac{n-b}{a}$ pour $n \geq [b] + 1 = n_0$, la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est positive, strictement croissante, tend

vers $+\infty$. Si on avait convergence de $\int_0^{+\infty} f_P(x) dx$, en notant $F_P : x \mapsto \int_0^x f_P(t) dt$ la "primitive" de f_P qui

s'annule en 0, la fonction F_P admettrait une limite finie notée $I = \int_0^{+\infty} (-1)^{[P(x)]} dx$ en $+\infty$. Par la relation

de CHASLES, comme $F_P(u_{n+1}) - F_P(u_n) = \int_{u_n}^{u_{n+1}} f_P(t) dt = \pm(u_{n+1} - u_n)$, on aurait $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$

alors que $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{a}$: NON ! On conclut que $\int_0^{+\infty} (-1)^{\lfloor P(x) \rfloor} dx$ diverge.

• Si $\deg(P) \geq 2$, par exemple $a = \text{dom}(P) > 0$ (l'autre cas est similaire), on a $\deg(P') = \deg(P) - 1 \geq 1$ et $\text{dom}(P) = a \deg(P) > 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} P'(x) = +\infty$. De même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} P''(x) = +\infty$ si $\deg(P) \geq 3$ et $P'' = 2a > 0$ si $\deg(P) = 2$. Ainsi, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \geq A$, $P'(x) > 0$ et $P''(x) > 0$ donc P est strictement croissante et strictement convexe sur $[A; +\infty[$. Posons $N = \lfloor P(A) \rfloor + 1 > P(A)$, comme P réalise une bijection strictement croissante de $[A; +\infty[$ dans $[P(A); +\infty[$ car P est continue sur \mathbb{R} , il existe un unique réel $x_0 > A$ tel que $P(x_0) = N$. Comme f_P est continue sur le segment $[0; x_0]$, l'intégrale $\int_0^{x_0} f_P(x) dx$ converge et le problème se ramène à la convergence de $\int_{x_0}^{+\infty} f_P(x) dx$. De plus, il existe une unique suite strictement croissante $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(x_n) = N + n$ car P est bijective et strictement croissante de $[x_0; +\infty[$ dans $[N; +\infty[$. Posons $a_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} (-1)^{\lfloor P(x) \rfloor} dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

• si $N + n$ est pair, pour $x \in [x_n; x_{n+1}[$, $N + n = P(x_n) \leq P(x) < P(x_{n+1}) = N + n + 1$ donc $f_P(x) = 1$ car $\lfloor P(x) \rfloor = N + n$ est pair. Ainsi, $a_n = x_{n+1} - x_n > 0$. De même, si $N + n$ est impair, on obtient $a_n = -(x_{n+1} - x_n) < 0$. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc alternée.

• Par le théorème des accroissements finis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'existence de $y_n \in]x_n; x_{n+1}[$ tel que $N + n + 1 - (N + n) = 1 = P(x_{n+1}) - P(x_n) = P'(y_n)(x_{n+1} - x_n)$ donc $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{P'(y_n)}$ ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} P'(x) = +\infty$. Ainsi, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

• De plus, comme $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n < y_n < x_{n+1} < y_{n+1} < x_{n+2}$, et que P' est strictement croissante sur $[x_0; +\infty[$ par construction, on obtient $P'(y_n) < P'(y_{n+1})$ donc $|a_n| = \frac{1}{P'(y_n)} > \frac{1}{P'(y_{n+1})} = |a_{n+1}|$. Ainsi, $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

D'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge, ce qui se traduit, en posant la

somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \int_{x_k}^{x_{k+1}} (-1)^{\lfloor P(x) \rfloor} dx = \int_{x_1}^{x_{n+1}} (-1)^{\lfloor P(x) \rfloor} dx$, par $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$.

Soit maintenant $x \geq x_0$, comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$, il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \leq x < x_{n+1}$. Ainsi, $F_P(x) = \int_0^x f_P(t) dt = \int_0^{x_n} f_P(t) dt + \int_{x_n}^x f_P(t) dt$ donc $|F_P(x) - S| = |F_P(x) - S_{n-1} + S_{n-1} - S| \leq |S_{n-1} - S| + \left| \int_{x_n}^x 1 dt \right| \leq |S_{n-1} - S| + (x_{n+1} - x_n)$ par inégalité triangulaire sur les réels et sur les intégrales. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} n = +\infty$ (l'entier n dépend de x), que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{n-1} - S) = 0$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$, par encadrement, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_P(x) = S$.

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} (-1)^{\lfloor P(x) \rfloor} dx$ converge.

Par conséquent, $\int_0^{+\infty} (-1)^{\lfloor P(x) \rfloor} dx$ converge si et seulement si $\deg(P) \geq 2$.

6 a. Il s'agit dans cette question de vérifier que la fonction $g_n : \left[0; 1 - \frac{1}{n}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$ s'annule sur $\left[0; 1 - \frac{1}{n}\right]$. Or cette fonction g_n est continue par opérations sur $\left[0; 1 - \frac{1}{n}\right]$ car f l'est sur $[0; 1]$.

- Pour $n = 1$, en prenant $x_1 = 0 \in \left[0; 1 - \frac{1}{1}\right] = \{0\}$, on a bien $g_1(x_1) = f(1) - f(0) = 0$.
- Pour $n = 2$, $g_2(0) = f(1/2) - f(0)$ et $g_2(1/2) = f(1) - f(1/2) = f(0) - f(1/2) = -g_2(0)$ ce qui montre

que $g_2(0)g_2(1/2) = -g_2(0)^2 \leq 0$ et, par le fameux théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g_2 s'annule en x_2 sur $\left[0; 1 - \frac{1}{2}\right] = \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Dans les deux cas $n = 1$ et $n = 2$, il existe bien $x_n \in \left[0; 1 - \frac{1}{n}\right]$ tel que $f\left(x_n + \frac{1}{n}\right) = f(x_n)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, par télescopage, on a $\sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = f(1) - f(0) = 0$ donc $\sum_{k=0}^{n-1} g_n\left(\frac{k}{n}\right) = 0$. Comme cette somme de quantités réelles est nulle, on a deux cas :

- Il existe un entier $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ tel que $g_n\left(\frac{k}{n}\right) = 0$ et $x_n = \frac{k}{n} \in \left[0; 1 - \frac{1}{n}\right]$ convient.
- Tous les termes de cette somme sont non nuls, comme leur somme est nulle, il en existe deux de signes stricts opposés, donc $\exists(i, j) \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ tel que $i \neq j$, $g_n\left(\frac{i}{n}\right) < 0$ et $g_n\left(\frac{j}{n}\right) > 0$. Par le théorème des

valeurs intermédiaires appliqué, $\exists x_n \in \left[\frac{i}{n}; \frac{j}{n}\right] \subset \left[0; 1 - \frac{1}{n}\right]$, $g_n(x_n) = 0$ donc $f\left(x_n + \frac{1}{n}\right) = f(x_n)$

Dans les deux cas, il existe bien un réel $x_n \in \left[0; 1 - \frac{1}{n}\right]$ tel que $f\left(x_n + \frac{1}{n}\right) = f(x_n)$.

b. En tâtonnant, pour $\alpha \in]0; 1[\setminus \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$, si on pose $f_\alpha : x \mapsto x - \left(\frac{\sin(\pi x/\alpha)}{\sin(\pi/\alpha)}\right)^2$ (somme d'une fonction périodique et d'une fonction affine), la fonction f_α est continue par opérations sur $[0; 1]$ car $\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) \neq 0$ puisque $\frac{\pi}{\alpha}$ n'est pas un multiple de π par hypothèse, elle vérifie bien $f_\alpha(0) = f_\alpha(1) = 1 - 1$. Mais, bizarrement, $\forall x \in [0; 1 - \alpha]$, $f_\alpha(x + \alpha) - f_\alpha(x) = x + \alpha - \left(\frac{\sin(\pi(x/\alpha) + \pi)}{\sin(\pi/\alpha)}\right)^2 - \left(x - \left(\frac{\sin(\pi x/\alpha)}{\sin(\pi/\alpha)}\right)^2\right) = \alpha \neq 0$ donc il n'existe aucun réel $x \in [0; 1 - \alpha]$ tel que $f(x + \alpha) = f(x)$. Amazing !

(7) a. Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto x \sin(x) - c \cos(x)$ est dérivable sur $J_n = \overline{I_n} = \left[n\pi; n\pi + \frac{\pi}{2}\right]$, vérifie $f'_n(x) = \sin(x) + x \cos(x) + c \sin(x)$. Traitons deux cas :

- Si n est pair, f'_n reste strictement positive sur J_n donc f_n est strictement croissante sur J_n et $f_n(n\pi) = -c < 0$ et $f_n\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = n\pi + \frac{\pi}{2} > 0$ donc, par le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection strictement croissante de J_n dans $\left[-c; n\pi + \frac{\pi}{2}\right]$. Comme 0 est à l'intérieur de cet intervalle,

il existe un unique réel $x_n \in \overset{\circ}{J}_n = I_n$ tel que $f_n(x_n) = 0$, c'est-à-dire tel que $x_n \sin(x_n) - c \cos(x_n) = 0$.

- Si n est impair, f'_n reste strictement négative sur J_n donc f_n est strictement décroissante sur J_n et $f_n(n\pi) = c > 0$ et $f_n\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -n\pi - \frac{\pi}{2} < 0$ donc, par le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection strictement décroissante de J_n dans $\left[-n\pi - \frac{\pi}{2}; c\right]$. Comme 0 est à l'intérieur de cet intervalle,

il existe un unique réel $x_n \in \overset{\circ}{J}_n = I_n$ tel que $f_n(x_n) = 0$, c'est-à-dire tel que $x_n \sin(x_n) - c \cos(x_n) = 0$.

Dans les deux cas, pour $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in \left]n\pi; n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $x_n \sin(x_n) - c \cos(x_n) = 0$ d'où l'existence et l'unicité de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les conditions de l'énoncé.

b. Comme $x_n \sin(x_n) - c \cos(x_n) = 0$ et $\cos(x_n) \neq 0$, on a $\tan(x_n) = \frac{c}{x_n} = \tan(x_n - n\pi)$ car \tan est π -périodique. Or $x_n - n\pi \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\subset \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Par définition de la fonction Arctan , on a donc $x_n - n\pi = \text{Arctan}\left(\frac{c}{x_n}\right)$. Mais $n\pi < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$ et $n\pi + \frac{\pi}{2} \underset{+\infty}{\sim} n\pi$ donc, par encadrement, $x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi$ donc

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c}{x_n} = 0$, de sorte que $x_n - n\pi \underset{+\infty}{\sim} \frac{c}{x_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{c}{n\pi} = y_n$ ou $x_n \underset{+\infty}{=} n\pi + \frac{c}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

c. En reprenant plus loin le développement limité précédent, $x_n - n\pi = \operatorname{Arctan}\left(\frac{c}{x_n}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{c}{x_n} - \frac{c^3}{3x_n^3} + o\left(\frac{1}{x_n^3}\right)$.

Or $x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi$ donc $\frac{c^3}{3x_n^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{c^3}{3n^3\pi^3}$ qui s'écrit aussi $\frac{c^3}{3x_n^3} \underset{+\infty}{=} \frac{c^3}{3n^3\pi^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ et, pour la même raison, on peut

aussi remplacer $o\left(\frac{1}{x_n^3}\right)$ par $o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ de sorte que $x_n - n\pi \underset{+\infty}{=} \frac{c}{n\pi + \frac{c}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)} - \frac{c^3}{3n^3\pi^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Ainsi, on

obtient $x_n - n\pi \underset{+\infty}{=} \frac{c}{n\pi} \times \frac{1}{1 + \frac{c}{n^2\pi^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} - \frac{c^3}{3n^3\pi^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{c}{n\pi} \left(1 - \frac{c}{n^2\pi^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{c^3}{3n^3\pi^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

qui se réduit en $x_n - n\pi \underset{+\infty}{=} \frac{c}{n\pi} \left(1 - \frac{c}{n^2\pi^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{c^3}{3n^3\pi^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{c}{n\pi} - \frac{c^2(3+c)}{3n^3\pi^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. On

peut donc conclure que $x_n - n\pi - \frac{c}{n\pi} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{c^2(3+c)}{3n^3\pi^3}$.

8 a. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\alpha : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_\alpha(x) = x^\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{x^{2\alpha+2}}\right)$ est continue et positive sur

\mathbb{R}_+^* car $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $1 + \frac{1}{x^{2\alpha+2}} > 1$. Déterminons un équivalent simple de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 0 :

- Si $\alpha > -1$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{2\alpha+2}} = 0$ donc $\ln\left(1 + \frac{1}{x^{2\alpha+2}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{2\alpha+2}}$ et $f_\alpha(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^\alpha}{x^{2\alpha+2}} = \frac{1}{x^{\alpha+2}}$.

- Si $\alpha = -1$, $f_{-1}(x) = \frac{\ln(2)}{x}$.

- Si $\alpha < -1$, on écrit $\ln\left(1 + \frac{1}{x^{2\alpha+2}}\right) = -(2\alpha+2)\ln(x) + \ln(1+x^{2\alpha+2}) \underset{+\infty}{=} -(2\alpha+2)\ln(x) + o(\ln(x))$

car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2\alpha+2} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x^{2\alpha+2}) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $f_\alpha(x) \underset{+\infty}{\sim} -(2\alpha+2)x^\alpha \ln(x)$.

Et maintenant quand x tend vers 0^+ :

- Si $\alpha > -1$, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2\alpha+2}} = +\infty$ et $\ln\left(1 + \frac{1}{x^{2\alpha+2}}\right) = -(2\alpha+2)\ln(x) + \ln(1+x^{2\alpha+2})$ donc

$\ln\left(1 + \frac{1}{x^{2\alpha+2}}\right) \underset{0}{=} -(2\alpha+2)\ln(x) + o(\ln(x))$ donc $f_\alpha(x) \underset{0}{\sim} -(2\alpha+2)x^\alpha \ln(x)$ car $\ln(1+x^{2\alpha+2}) \underset{0}{\sim} o(\ln(x))$.

- Si $\alpha = -1$, $f_{-1}(x) = \frac{\ln(2)}{x}$.

- Si $\alpha < -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2\alpha+2}} = 0$ donc $\ln\left(1 + \frac{1}{x^{2\alpha+2}}\right) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^{2\alpha+2}}$ et $f_\alpha(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^\alpha}{x^{2\alpha+2}} = \frac{1}{x^{\alpha+2}}$.

On peut passer à l'intégrabilité de la fonction f_α sur \mathbb{R}_+^* :

- Si $\alpha > -1$, $f_\alpha(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha+2}}$ avec $\alpha+2 > 1$ donc f_α est intégrable en $+\infty$ par RIEMANN et

$f_\alpha(x) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{x^{\frac{1-\alpha}{2}}}\right)$ par croissances comparées donc f_α est intégrable en 0^+ par RIEMANN car $\frac{1-\alpha}{2} < 1$.

- Si $\alpha = -1$, $f_{-1}(x) = \frac{\ln(2)}{x}$ donc, d'après RIEMANN, f_{-1} n'est ni intégrable en 0^+ , ni en $+\infty$.

- Si $\alpha < -1$, $f_\alpha(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{\frac{1-\alpha}{2}}}\right)$ par croissances comparées donc f_α est intégrable en $+\infty$ par RIEMANN

car $\frac{1-\alpha}{2} > 1$ et $f_\alpha(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha+2}}$ avec $\alpha+2 < 1$ donc f_α est intégrable en 0^+ par RIEMANN.

Ainsi, f_α est intégrable sur \mathbb{R}_+^* si et seulement si $\alpha \neq -1$, et comme f_α est positive, on en déduit que

$\int_0^{+\infty} x^\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{x^{2\alpha+2}}\right) dx$ converge si et seulement si $\alpha \neq -1$.

b. Méthode 1 : pour calculer $I_\alpha = \int_0^{+\infty} x^\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{x^{2\alpha+2}}\right) dx$ dans le cas où $\alpha \neq -1$, on pose $u_\alpha : x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

et $v_\alpha : x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x^{2\alpha+2}}\right)$ qui sont de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* . Traitons deux cas :

• Si $\alpha > -1$, on a $u_\alpha(x)v_\alpha(x) \sim -2x^{\alpha+1} \ln(x)$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} u_\alpha(x)v_\alpha(x) = 0$ par croissances comparées car $\alpha + 1 > 0$ et $u_\alpha(x)v_\alpha(x) \sim \frac{1}{x^{\alpha+1}}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_\alpha(x)v_\alpha(x) = 0$. Ainsi, par intégration par parties,

$$I_\alpha = - \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left(\frac{-(2\alpha+2)x^{-2\alpha-3}}{1+x^{-(2\alpha+2)}} \right) dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{x^{-\alpha-2} dx}{1+(x^{-\alpha+1})^2} = \left[-\frac{1}{\alpha+1} \operatorname{Arctan}(x^{-\alpha-1}) \right]_0^{+\infty}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-\alpha-1} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\alpha-1} = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{Arctan}(t) = \frac{\pi}{2}$, on a $I_\alpha = \frac{\pi}{\alpha+1}$.

• Si $\alpha < -1$, $u_\alpha(x)v_\alpha(x) \sim -2x^{\alpha+1} \ln(x)$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_\alpha(x)v_\alpha(x) = 0$ par croissances comparées car $\alpha+1 < 0$ et $u_\alpha(x)v_\alpha(x) \sim \frac{1}{x^{\alpha+1}}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} u_\alpha(x)v_\alpha(x) = 0$. Par conséquent, par intégration par parties,

$$I_\alpha = - \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left(\frac{-(2\alpha+2)x^{-2\alpha-3}}{1+x^{-(2\alpha+2)}} \right) dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{x^{-\alpha-2} dx}{1+(x^{-\alpha+1})^2} = \left[-\frac{1}{\alpha+1} \operatorname{Arctan}(x^{-\alpha-1}) \right]_0^{+\infty}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-\alpha-1} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\alpha-1} = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{Arctan}(t) = \frac{\pi}{2}$, on a $I_\alpha = -\frac{\pi}{\alpha+1}$.

On peut unifier cette formule, $\forall \alpha \neq -1$, $I_\alpha = \frac{\pi}{|\alpha+1|}$.

Méthode 2 : on effectue, pour $\alpha \neq -1$, on pose $u = x^{\alpha+1}$, ou $x = \varphi_\alpha(u) = u^{\frac{1}{\alpha+1}}$. Traitons deux cas :

• Si $\alpha > -1$, φ_α est une bijection strictement croissante et de classe C^1 de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R}_+^* , donc, par linéarité, $I_\alpha = \int_0^{+\infty} u^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u^2}\right) \left(\frac{1}{\alpha+1} u^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}\right) du = \frac{1}{\alpha+1} \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{u^2}\right) du$.

• Si $\alpha < -1$, φ_α est une bijection strictement décroissante et de classe C^1 de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R}_+^* , donc, par linéarité, $I_\alpha = \int_{+\infty}^0 u^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u^2}\right) \left(\frac{1}{\alpha+1} u^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}\right) du = -\frac{1}{\alpha+1} \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{u^2}\right) du$.

Comme $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{u^2}\right) du$ ne dépend pas de u , se calcule facilement par le même type d'intégration par parties que ci-dessus, et vaut π , on en déduit à nouveau que $\forall \alpha \neq -1$, $I_\alpha = \frac{\pi}{|\alpha+1|}$.

Il est à noter que cette méthode montrait que, pour $\alpha \neq -1$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{x^{2\alpha+2}}\right) dx$ était de même nature que $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{u^2}\right) du$, c'est-à-dire convergente car $h : u \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{u^2}\right)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* , vérifie $h(u) \sim \frac{1}{u^2}$ et $h(u) \sim -2 \ln(u) = o\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)$, donc h est intégrable en 0 et en $+\infty$ par RIEMANN.

9 a. Comme f est continue, positive et non nulle sur $[a; b]$, d'après la contraposée d'un théorème du cours, il

vient $A = \int_a^b f(x) dx > 0$. Comme f est continue sur $[a; b]$, d'après le théorème fondamental de l'intégration,

$F : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f qui s'annule en a sur $[a; b]$. F est donc de

classe C^1 , strictement croissante car $F' = f > 0$ donc F réalise une bijection de l'intervalle $[a; b]$ dans $[0; A]$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, les conditions imposées à x_0, x_1, \dots, x_n reviennent à $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, F(x_k) - F(x_{k-1}) = \frac{A}{n}$ donc,

puisque $x_0 = a$ est imposé donc $F(x_0) = 0$, les conditions imposées se résument à $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, F(x_k) = \frac{kA}{n}$.

Ceci montre l'existence et l'unicité de la subdivision demandée et qu'on a $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, x_k = F^{-1}\left(\frac{kA}{n}\right)$.

b. Pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f\left(F^{-1}\left(\frac{kA}{n}\right)\right) = \frac{1}{A} \times \left[\frac{A}{n} \sum_{k=0}^n g\left(\frac{kA}{n}\right) \right] = \frac{g(0)}{n} + \frac{1}{A} \times \left[\frac{A}{n} \sum_{k=1}^n g\left(\frac{kA}{n}\right) \right]$ en

définissant $g : [0; A] \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(x) = f \circ F^{-1}(x)$. Comme g est continue sur le segment $[0; A]$ par composition puisque F^{-1} est continue de $[0; A]$ dans $[a; b]$, le théorème sur les sommes de RIEMANN montre que l'on a

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{A} \int_0^A g(x) dx = \frac{1}{A} \int_0^A f \circ F^{-1}(x) dx$. On peut effectuer le changement de variable $x = F(t)$ car F

est de classe C^1 , bijective et strictement croissante de $[a; b]$ dans $[0; A]$ et on obtient la nouvelle expression

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{A} \int_a^b (f \circ F^{-1} \circ F(t)) \times f(t) dt = \frac{1}{A} \int_a^b f(t)^2 dt \text{ car } F'(t) = f(t). \text{ Ainsi, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\int_a^b (f(x))^2 dx}{\int_a^b f(x) dx}.$$

10 a. Soit $f : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \geq 1, f(x) = x - \ln(x)$. La fonction f est dérivable sur $[1; +\infty[$ et $\forall x \geq 1, f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \geq 0$ et f' ne s'annule qu'en 1 donc f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$ et, comme $f(1) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par croissances comparées, la fonction f réalise une bijection strictement croissante de $[1; +\infty[$ dans $[1; +\infty[$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comme $n \in [1; +\infty[$, il existe un unique réel $u_n \in [1; +\infty[$ tel que $f(u_n) = u_n - \ln(u_n) = n$.

b. Limite : comme $f(n) = n - \ln(n) < n = f(u_n)$ et que f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$, on en déduit que $n < u_n$. Par minoration, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Équivalent : si $v_n = n + \sqrt{n}$, on a $f(v_n) = n + \sqrt{n} - \ln(n + \sqrt{n})$ donc $f(v_n) - n = \sqrt{n} - \ln(n) - \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ donc, par croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(v_n) - n) = +\infty$. Ainsi, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, f(v_n) > n = f(u_n)$ donc $u_n \leq v_n$. Ainsi, $\forall n \geq n_0, n \leq u_n \leq n + \sqrt{n}$. Par encadrement, on a donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} n$ car $n + \sqrt{n} \underset{+\infty}{\sim} n$.

c. Posons $x_n = u_n - n$, on a $x_n \underset{+\infty}{=} o(n)$ d'après b.. Comme $n + x_n - \ln(n + x_n) = n$, on en déduit que $x_n = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{x_n}{n}\right)$ donc $x_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + o(1)$ d'où $x_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$. On a déjà $u_n \underset{+\infty}{=} n + \ln(n) + o(1)$.

Reprenons, la relation $x_n = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{x_n}{n}\right)$ montre que $x_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \frac{x_n}{n} + o\left(\frac{x_n}{n}\right)$ par développements limités donc $x_n - \ln(n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x_n}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$. On a déjà $u_n \underset{+\infty}{=} n + \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.

Revenons à la charge, $x_n = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{x_n}{n}\right)$ donc $x_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \frac{x_n}{n} - \frac{x_n^2}{2n^2} + o\left(\frac{x_n^2}{n^2}\right)$. Or on a vu que $x_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$ donc $x_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)}{n^2} - \frac{x_n^2}{2n^2} + o\left(\frac{x_n^2}{n^2}\right) + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$. On peut simplifier car $\frac{\ln(n)}{n^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{x_n^2}{n^2}\right)$ car $x_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)^2$ et $o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{x_n^2}{n^2}\right)$ pour la même raison, on peut donc réduire à $x_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} - \frac{x_n^2}{2n^2} + o\left(\frac{x_n^2}{n^2}\right)$, ce qui garantit que $x_n - \ln(n) - \frac{\ln(n)}{n} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{x_n^2}{2n^2} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)^2}{2n^2}$.

Tout ceci montre qu'on a le développement asymptotique $u_n \underset{+\infty}{=} n + \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln^2(n)}{2n^2} + o\left(\frac{\ln^2(n)}{n^2}\right)$.

11 a. Soit $x \geq a$, la fonction $g_x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $g_x(t) = f(t)e^{-xt}$ est continue sur \mathbb{R}_+ puisque f l'est et $\forall t \in \mathbb{R}_+, |g_x(t)| = f(t)e^{-xt} \leq f(t)e^{-at}$ alors que la fonction $t \mapsto f(t)e^{-at}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ par hypothèse. Ainsi, par comparaison, la fonction g_x est intégrable sur \mathbb{R}_+ donc $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-at} dt$ est absolument convergente donc convergente.

b. Comme $h : t \mapsto e^{-at}f(t)$ est continue sur l'intervalle \mathbb{R}_+ , par le théorème fondamental de l'intégration, la fonction $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(t) = \int_0^t f(u)e^{-au} du$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ car c'est la primitive de h qui s'annule en 0. Comme $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-at} dt$ converge par hypothèse, la fonction F admet une limite finie $I = \int_0^{+\infty} e^{-at}f(t) dt$ en $+\infty$ par définition. Il est alors classique que F est bornée sur \mathbb{R}_+ . En effet, en prenant $\varepsilon = 1 > 0$, il existe un réel $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall t \geq A, |F(t) - I| \leq \varepsilon = 1$ ce qui montre que

$|F(t)| = |(F(t) - I) + I| \leq |F(t) - I| + |I| \leq |I| + 1$. Comme F est continue sur le segment $[0; A]$, elle y est bornée par le théorème des bornes atteintes donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall t \in [0; A]$, $|F(t)| \leq M$. Par conséquent $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $|F(t)| \leq \text{Max}(|I| + 1, M)$ et F est bien bornée sur \mathbb{R}_+ . Traitons deux cas :

- Si $x = a$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$ converge par hypothèse.
- Si $x > a$, en posant $u_x : t \mapsto e^{-(x-a)t}$ et $v = F$ qui sont C^1 sur \mathbb{R}_+ avec $\lim_{t \rightarrow +\infty} u_x(t)v(t) = 0$ car F est bornée, $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} u_x(t)v'(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} u_x'(t)v(t) dt = \int_0^{+\infty} (a-x)e^{-(x-a)t}F(t) dt$ ont même nature par intégration par parties. Or, la fonction $a_x : t \mapsto e^{-(x-a)t}F(t)$ est continue sur \mathbb{R}_+ et $|a_x(t)| = |e^{-(x-a)t}F(t)| \underset{+\infty}{=} O(|e^{-(x-a)t}|)$ d'après ce qui précède donc a_x est intégrable sur \mathbb{R}_+ par comparaison à des intégrales de référence. Ainsi, $\int_0^{+\infty} (a-x)e^{-(x-a)t}F(t) dt$ est absolument convergente donc convergente et, par suite, $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$ converge.

Par conséquent, $\forall x \geq a$, $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$ converge.

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 2

ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉNÉRALE

12 a. Soit $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $x^T = (x_1 \cdots x_n)$ tel que $Ax \geq 0$. On a donc les inégalités $2x_1 - x_2 \geq 0$,

$$\forall i \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket, -x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} \geq 0 \text{ et } -x_{n-1} + 2x_n \geq 0.$$

Soit un indice $i_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $x_{i_0} = \min_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} (x_i)$. Distinguons trois cas :

- si $i_0 = 1$, on a $x_1 \geq x_2 - x_1 \geq 0$ par minimalité de x_{i_0} .
- si $i_0 \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket$, on a $(x_{i_0-1} - x_{i_0}) + (x_{i_0+1} - x_{i_0}) \leq 0$ alors que $x_{i_0-1} - x_{i_0} \geq 0$ et $x_{i_0+1} - x_{i_0} \geq 0$ donc $x_{i_0-1} - x_{i_0} = x_{i_0+1} - x_{i_0} = 0$ et $x_{i_0-1} = x_{i_0} = x_{i_0+1}$. On continue de proche en proche pour obtenir $x_1 = \cdots = x_n$ et on se ramène au premier ou au dernier cas pour avoir $x_{i_0} \geq 0$.
- si $i_0 = n$, on a $x_n \geq x_{n-1} - x_n \geq 0$.

Dans tous les cas, on a donc $x_{i_0} \geq 0$ donc $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_k \geq 0$ donc $x \geq 0$.

b. Si $x \in \text{Ker}(A)$, $Ax = 0 \geq 0$ donc $x \geq 0$ d'après **a.** et $A(-x) = 0 \geq 0$ donc, de même, $-x \geq 0$ et on en déduit que $x = 0$. Ainsi, $\text{Ker}(A) = \{0\}$ donc, comme $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est carrée, A est inversible.

c. La j -ième colonne de A^{-1} est $A^{-1}e_j$, et comme $A(A^{-1}e_j) = e_j \geq 0$, par définition de la monotonie d'une matrice, on a $A^{-1}e_j \geq 0$ donc tous les coefficients de la matrice A^{-1} sont positifs, ce qui s'écrit $A^{-1} \geq 0$.

13

14

15 a. Posons S_n l'ensemble de toutes les permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$ et \mathcal{D}_n l'ensemble des dérangements de $\llbracket 1; n \rrbracket$.

Méthode 1 : pour un entier $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, soit F_i l'ensemble des permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$ qui fixent l'élément i , c'est-à-dire $F_i = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i\}$. Par définition, une permutation qui n'est pas un dérangement fixe

au moins un entier i de $\llbracket 1; n \rrbracket$ donc $\overline{\mathcal{D}_n} = \bigcup_{i=1}^n F_i$. Par la formule du crible (hors programme), on a donc

$$\text{card}(\overline{\mathcal{D}_n}) = \sum_{i=1}^n \text{card}(F_i) - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \text{card}(F_i \cap F_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \text{card}(F_i \cap F_j \cap F_k) - \cdots + (-1)^{n-1} \text{card}(F_1 \cap \cdots \cap F_n).$$

Pour $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, quelle que soit la famille (i_1, \dots, i_j) telle que $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_j$, il y a $(n-j)!$

permutations dans $\bigcap_{k=1}^j F_{i_k}$ car les éléments i_1, \dots, i_j sont fixes par une permutation de cet ensemble et

les images des $n-j$ autres sont quelconques, ce qui fait $(n-j)!$ manières de les permuter. Comme il y

a $\binom{n}{j}$ façons de prendre une telle famille (i_1, \dots, i_j) telle que $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_j$ car il faut juste

choisir j éléments parmi n , on a donc $\text{card}(\overline{\mathcal{D}_n}) = n! - \text{card}(\mathcal{D}_n) = n! - D_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)!$.

On a donc $D_n = n! + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)!$ car $(-1)^0 \binom{n}{0} (n-0)! = n!$. Mais

$$\binom{n}{k} (n-k)! = \frac{n!(n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!} \text{ donc } D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Méthode 2 : si on note \mathcal{D}_n^k l'ensemble des permutations de $[[1; n]]$ qui ont exactement k points fixes pour tout $k \in [[0; n]]$, il est clair que $\{\mathcal{D}_n^0, \dots, \mathcal{D}_n^n\}$ est une partition de S_n donc $\text{card}(S_n) = n! = \sum_{k=0}^n \text{card}(\mathcal{D}_n^k)$. Or, $\mathcal{D}_n^0 = \mathcal{D}_n$ donc $\text{card}(\mathcal{D}_n^0) = D_n$, $\mathcal{D}_n^n = \{\text{id}_{[[1; n]]}\}$ donc $\text{card}(\mathcal{D}_n^n) = 1 = D_0$ en posant $D_0 = 1$ par convention et $\mathcal{D}_n^{n-1} = \emptyset$ donc $\text{card}(\mathcal{D}_n^{n-1}) = 0 = \binom{n}{1} D_1$ car $D_1 = 0$. En général, pour $k \in [[1; n-1]]$, pour choisir une permutation σ de \mathcal{D}_n^k , on choisit de $\binom{n}{k}$ manières les k éléments de $[[1; n]]$ qui vont être fixes par σ . Ensuite il faut décaler les $n-k$ autres, et on a D_{n-k} façons de le faire. Ainsi, on en déduit que $\text{card}(\mathcal{D}_n^k) = \binom{n}{k} D_{n-k}$ ce qui donne $n! = \sum_{j=0}^n \binom{n}{n-j} D_j = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} D_j$ en posant $k = n-j$ car $\binom{n}{n-j} = \binom{n}{j}$. Par conséquent, on a $\forall i \in [[0; n]]$, $i! = \sum_{j=0}^n \binom{i}{j} D_j$, ce qui se traduit matriciellement par $AX = Y$ avec $A = \left(\binom{i}{j} \right)_{0 \leq i, j \leq n}$,

$X^T = (D_0 \ D_1 \ \dots \ D_n)$ et $Y^T = (0! \ 1! \ \dots \ n!)$. La matrice $A^T = \left(\binom{j}{i} \right)_{0 \leq i, j \leq n}$ est triangulaire supérieure

et "contient" le triangle de PASCAL, c'est surtout la matrice de l'endomorphisme $f : P \mapsto P(X+1)$ de $E = \mathbb{R}_n[X]$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$. Comme f est un automorphisme de E avec $f^{-1} : P \mapsto P(X-1)$, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \left((-1)^{j-i} \binom{j}{i} \right)_{0 \leq i, j \leq n}$ donc $A^{-1} = \left((-1)^{i-j} \binom{i}{j} \right)_{0 \leq i, j \leq n}$.

Alors, $X = A^{-1}Y$ donc, en regardant sur la dernière ligne de cette relation matricielle, on a la relation $D_n = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j! = n! \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \frac{1}{(n-j)!} = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ en posant $k = n-j$.

b. D'après a., $\frac{D_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ est la somme partielle de la série numérique $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!}$. Or on sait que $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Pour $z = -1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^{-1} = \frac{1}{e}$. Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{D_n}{n!} = \frac{1}{e} \sim 0,37$ qui représente la probabilité limite qu'une permutation quelconque a d'être un dérangement, ou la proportion limite de dérangements parmi les permutations de $[[1; n]]$.

c. Méthode 1 : A est symétrique réelle donc, d'après le théorème spectral elle est diagonalisable. Comme $A + I_n = (1)_{1 \leq i, j \leq n}$ est de rang 1, $\text{Ker}(A + I_n) = E_{-1}(A)$ est un hyperplan de \mathbb{R}^n par la formule du rang, il est d'équation $x_1 + \dots + x_n = 0$ et est l'hyperplan orthogonal au vecteur $(1, \dots, 1)$. Comme $\text{Tr}(A) = 0$, la dernière valeur propre de A est $n-1$ et elle est simple. En posant $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $U^T = (1 \ \dots \ 1)$, on a $AU = (n-1)U$ donc $E_{n-1}(A) = \text{Vect}(U)$. A est donc semblable à $D = \text{diag}(-1, \dots, -1, n-1)$ donc $\det(A) = \det(D) = (-1)^{n-1}(n-1)$.

Méthode 2 : avec l'opération de GAUSS $C_n \leftarrow C_n + \dots + C_1$ et par linéarité par rapport à la dernière

colonne, $\det(A) = (n-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$, puis, avec les opérations $C_1 \leftarrow C_1 - C_n$, $C_2 \leftarrow C_2 - C_n$,

$$\dots, C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_n, \text{ on obtient } \det(A) = (n-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (n-1)(-1)^{n-1}.$$

d. Avec la formule du déterminant clairement hors programme, on a $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n a_{\sigma(k),k}$ où S_n est l'ensemble de toutes les permutations de $[[1; n]]$ et $\varepsilon(\sigma)$ la signature de la permutation σ . Pour $\sigma \in S_n$, s'il existe $k \in [[1; n]]$ tel que $\sigma(k) = k$, on a $a_{\sigma(k),k} = 0$ donc $\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i} = 0$. Ainsi, les seules permutations qui contribuent à $\det(A)$ sont les dérangements σ pour lesquels $\prod_{k=1}^n a_{\sigma(k),k} = 1$. Si on note \mathcal{D}_n les dérangements de S_n , \mathcal{D}_n^+ les dérangements de S_n de signature $+1$ et \mathcal{D}_n^- les dérangements de S_n de signature -1 , on a $\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{D}_n} \varepsilon(\sigma) = \sum_{\sigma \in \mathcal{D}_n^+} 1 - \sum_{\sigma \in \mathcal{D}_n^-} 1 = D_n^+ - D_n^-$.

e. D'après **a.**, **c.** et **d.**, $D_n^+ + D_n^- = D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ et $D_n^+ - D_n^- = (-1)^{n-1}(n-1)$. Par conséquent, on trouve $D_n^+ = \frac{1}{2} \left((-1)^{n-1}(n-1) + n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right)$ et $D_n^- = \frac{1}{2} \left((-1)^n(n-1) + n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right)$.

16 a. Si $x \in \text{Ker}(g)$, $x = (f+g)(x) = f(x)$ donc $x \in \text{Im}(f)$. Ainsi, $\text{Ker}(g) \subset \text{Im}(f)$ d'où $\dim(\text{Ker}(g)) \leq \dim(\text{Im}(f))$. Par la formule du rang, $\dim(\text{Ker}(g)) = n - \text{rang}(g) \geq \text{rang}(f) = \dim(\text{Im}(f))$ d'après l'énoncé. On en conclut que $\dim(\text{Ker}(g)) = \dim(\text{Im}(f))$ et, par inclusion et égalité des dimensions, on a $\text{Ker}(g) = \text{Im}(f)$.

b. Comme $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$, on a $g \circ f = 0$. En effet, si $x \in E$, $f(x) \in \text{Im}(f)$ donc $f(x) \in \text{Ker}(g)$ et $g(f(x)) = 0_E$. Par symétrie des rôles joués par f et g , on a aussi $f \circ g = 0$.

c. D'après la question précédente, $g = g \circ \text{id}_E = g \circ (f+g) = g \circ f + g \circ g = g^2$ ce qui prouve que g est un projecteur de E . Par symétrie encore, f est aussi un projecteur de E . Comme $f = \text{id}_E - g$, f est le projecteur associé à g , et g est le projecteur associé à f , ce qui signifie que si g est la projection sur G parallèlement à F , alors f est la projection sur F parallèlement à G .

d. Pour $x \in E$, on a $x = \text{id}_E(x) = \sum_{k=1}^p f_k(x)$ avec $f_k(x) \in \text{Im}(f_k)$ donc $E = \sum_{k=1}^p \text{Im}(f_k)$. Comme on sait que $\dim \left(\sum_{k=1}^p \text{Im}(f_k) \right) \leq \sum_{k=1}^p \dim(\text{Im}(f_k)) = \sum_{k=1}^p \text{rang}(f_k)$, on a $n \leq \sum_{k=1}^p \text{rang}(f_k) \leq n$ et donc $\sum_{k=1}^p \text{rang}(f_k) = n$. Comme $E = \sum_{k=1}^p \text{Im}(f_k)$ et que $\dim(E) = n = \sum_{k=1}^p \dim(\text{Im}(f_k))$, on peut conclure d'après le cours que cette

somme est directe et donc que $E = \bigoplus_{k=1}^p \text{Im}(f_k)$.

Pour $k \in [[1; p]]$ et $x \in \text{Ker}(\text{id}_E - f_k)$, on a $x = f_k(x) \in \text{Im}(f_k)$, ce qui montre que $\text{Ker}(\text{id}_E - f_k) \subset \text{Im}(f_k)$ donc $\dim(\text{Ker}(\text{id}_E - f_k)) \leq \text{rang}(f_k)$ et, avec la formule du rang, que $\text{rang}(\text{id}_E - f_k) \geq \dim(\text{Ker}(f_k))$.

Or $\text{rang}(\text{id}_E - f_k) = \text{rang} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p f_i \right) \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p \text{rang}(f_i)$ donc $\text{rang}(\text{id}_E - f_k) \leq n - \text{rang}(f_k) = \dim(\text{Ker}(f_k))$

avec la formule du rang. Ainsi, $\text{rang}(\text{id}_E - f_k) = \dim(\text{Ker}(f_k))$ et $\dim(\text{Ker}(\text{id}_E - f_k)) = \text{rang}(f_k)$ donc $\text{Ker}(\text{id}_E - f_k) \subset \text{Im}(f_k)$ devient l'égalité $\text{Ker}(\text{id}_E - f_k) = \text{Im}(f_k)$. Par conséquent, $(\text{id}_E - f_k) \circ f_k = 0$ donc $f_k^2 = f_k$, ce qui justifie que f_k est un projecteur de E .

17 Raisonnons par récurrence sur p .

Initialisation : si $p = 1$ et F une droite de $\mathbb{K}[X]$. Alors $F = \text{Vect}(P_0)$ avec $P_0 \neq 0 \in \mathbb{K}[X]$.

Hérédité : soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons que tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ de dimension p admette une base composée de polynômes de degrés deux à deux distincts. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ de dimension $p + 1$. Soit $\mathcal{B} = (P_1, \dots, P_{p+1})$ une base de F , notons $d = \text{Max}(\text{deg}(P_1), \dots, \text{deg}(P_{p+1}))$, il existe donc un indice $j \in \llbracket 1; p+1 \rrbracket$ tel que $\text{deg}(P_j) = d$. Quitte à réordonner les vecteurs de \mathcal{B} , on peut supposer que $j = p + 1$. Posons $\alpha_d \neq 0$ le coefficient dominant de P_{p+1} et posons, pour $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $Q_k = P_k$ si $\text{deg}(P_k) < d$ et $Q_k = P_k - \frac{\text{dom}(P_k)}{\alpha_d} P_{p+1}$. Par construction, tous les polynômes Q_1, \dots, Q_p sont de degrés strictement inférieurs à d . Posons $\mathcal{B}' = (Q_1, \dots, Q_p, P_{p+1})$. Tous les polynômes de \mathcal{B}' sont des combinaisons linéaires de polynômes de \mathcal{B} et vice-versa, ainsi $\text{Vect}(\mathcal{B}) = \text{Vect}(\mathcal{B}') = F$. Si on note $G = \text{Vect}(Q_1, \dots, Q_p)$, on a $G \subset \mathbb{R}_{d-1}[X]$ d'après ce qui précède et, comme (Q_1, \dots, Q_p) est une sous-famille de \mathcal{B}' , elle est libre donc (Q_1, \dots, Q_p) est une base de G donc $\dim(G) = p$. Par hypothèse de récurrence, il existe une base (U_1, \dots, U_p) de G composée de polynômes de degrés deux à deux distincts, ces degrés étant strictement inférieurs à d car $G \subset \mathbb{R}_{d-1}[X]$. Ainsi, en notant $\mathcal{B}'' = (U_1, \dots, U_p, P_{p+1})$ est, comme avant, une base de F et elle est formée de polynômes de degrés deux à deux distincts.

Conclusion : par principe de récurrence, tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ admet une base composée de polynômes de degrés deux à deux distincts.

18

19 a. Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifie $X \in \text{Ker}(B)$, alors $BX = 0$ donc $AX = A^2BX = A^2 \cdot 0 = 0$ donc $X \in \text{Ker}(A)$. Ainsi, $\text{Ker}(B) \subset \text{Ker}(A)$. De plus, par la formule du rang, $\dim(\text{Ker}(B)) = n - \text{rang}(B) = n - \text{rang}(A) = \dim(\text{Ker}(A))$ donc, par inclusion et égalité des dimensions, on a $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(B)$.

b. Soit $X \in \text{Im}(B) \cap \text{Ker}(B) = \text{Im}(B) \cap \text{Ker}(A)$, alors $AX = 0$ et $\exists Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X = BY$. Ainsi, $ABY = AX = 0$ donc $AY = A^2BY = A \cdot 0 = 0$ donc $Y \in \text{Ker}(A)$. Mais $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(B)$ donc $BY = 0$ d'où $X = 0$. Ainsi, $\text{Im}(B) \cap \text{Ker}(B) = \{0\}$ donc $\text{Im}(B)$ et $\text{Ker}(B)$ sont en somme directe. Mais $\dim(\text{Im}(B)) + \dim(\text{Ker}(B)) = n$ par la formule du rang donc $\text{Im}(B)$ et $\text{Ker}(B)$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^n , ce qui s'écrit $\mathbb{R}^n = \text{Im}(B) \oplus \text{Ker}(B)$.

c. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qu'on décompose $X = X_1 + X_2$ avec $X_1 \in \text{Im}(B)$ et $X_2 \in \text{Ker}(B)$ grâce à **b.**

- comme $X_1 \in \text{Im}(B)$, il existe $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X_1 = BU$ et on a alors $B^2AX_1 - BX_1 = B^2(AB - I_n)U$ or $A(AB - I_n) = 0$ donc $\text{Im}(AB - I_n) \subset \text{Ker}(A) = \text{Ker}(B)$ donc $B(AB - I_n) = 0$, ou $BAB = B$ et on a donc la relation $B^2AX_1 = BX_1$.

- comme $X_2 \in \text{Ker}(B)$, on a $BX_2 = 0$ et $B^2AX_2 = 0$ aussi car $X_2 \in \text{Ker}(A)$ d'après **a.**, ainsi $B^2AX_2 = BX_2$.

Par conséquent, $B^2AX = B^2A(X_1 + X_2) = B^2AX_1 + B^2AX_2 = BX_1 + BX_2 = BX$. Ceci étant vrai pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a l'égalité matricielle $B^2A = B$.

20 a. Comme $f^2 - 3f + 2\text{id}_E = 0$, $f \circ \left(\frac{1}{2}(3\text{id}_E - f)\right) = f \circ \left(\frac{1}{2}(3\text{id}_E - f)\right) = \text{id}_E$ donc $f \in \text{GL}(E)$ et $f^{-1} = \frac{1}{2}(3\text{id}_E - f)$.

Puisque $P = X^2 + 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$ est annulateur de f et scindé à racines simples sur \mathbb{R} ou sur \mathbb{C} ,

f est diagonalisable, que E soit un \mathbb{R} -espace vectoriel ou un \mathbb{C} -espace vectoriel. En plus les sous-espaces $E_1(f) = \text{Ker}(f - \text{id}_E)$ et $E_2(f) = \text{Ker}(f - 2\text{id}_E)$ sont supplémentaires dans E .

b. Initialisation : on a $f^0 = \text{id}_E = 0.f + 1.\text{id}_E$ donc $x_0 = 0, y_0 = 1$ conviennent.

Hérédité : si on suppose l'existence de $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f^n = x_n f + y_n \text{id}_E$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on a alors $f^{n+1} = f^n \circ f = (x_n f + y_n \text{id}_E) \circ f = x_n f^2 + y_n f = x_n(3f - 2\text{id}_E) + y_n f = (3x_n + y_n)f - 2x_n \text{id}_E$ donc $x_{n+1} = 3x_n + y_n$ et $y_{n+1} = -2x_n$ conviennent.

Par principe de récurrence, les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $x_0 = 0, y_0 = 1$ et les relations de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = 3x_n + y_n$ et $y_{n+1} = -2x_n$ vérifient bien $\forall n \in \mathbb{N}, f^n = x_n f + y_n \text{id}_E$.

Pour $n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = 3x_{n+1} + y_{n+1} = 3x_{n+1} - 2x_n$ et l'équation caractéristique associée à cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 étant $z^2 - 3z + 2 = 0$ et ayant pour racines 1 et 2, il existe des réels A et B tels que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = A.1^n + B.2^n$. Les valeurs $x_0 = 0 = A + B$ et $x_1 = 3x_0 + y_0 = 1 = A + 2B$ donnent $A = -1$ et $B = 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = 2^n - 1$. De plus, pour $n \geq 1$, on a $y_n = -2x_{n-1} = 2 - 2^n$ et on vérifie que $y_0 = 1 = 2 - 2^0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = 2 - 2^n$.

En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}, f^n = (2^n - 1)f - (2^n - 2)\text{id}_E$.

c. S'il n'y a pas unicité pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $(x_n, y_n) \neq (x'_n, y'_n)$ tels que $f^n = x_n f + y_n \text{id}_E = x'_n f + y'_n \text{id}_E$. Si $x_n \neq x'_n$, on a donc $f = \frac{y'_n - y_n}{x_n - x'_n} \text{id}_E$ donc f est une homothétie. Si $x_n = x'_n$, on a $(y_n - y'_n)\text{id}_E = 0$ donc $y_n = y'_n$ ce qui est exclus. Cherchons donc les homothéties qui vérifient les hypothèse de l'énoncé. Si $f = \lambda \text{id}_E$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $f^2 - 3f + 2\text{id}_E = (\lambda^2 - 3\lambda + 1)\text{id}_E = 0$ donc $(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$ et $f = \text{id}_E$ ou $f = 2\text{id}_E$. Traitons donc trois cas :

- Si $f = \text{id}_E, f^n = \text{id}_E = f^n = x_n f + y_n \text{id}_E$ pour l'infinité de couples $(x_n, y_n) \in \mathbb{K}^2$ tels que $x_n + y_n = 1$.
- Si $f = 2\text{id}_E, f^n = 2^n \text{id}_E = x_n f + y_n \text{id}_E$ pour l'infinité de couples $(x_n, y_n) \in \mathbb{K}^2$ tels que $x_n + y_n = 2^n$.
- Si n'est pas une homothétie, donc si $f \neq \text{id}_E$ et $f \neq 2\text{id}_E$, si on a $f^n = x_n f + y_n \text{id}_E = x'_n f + y'_n \text{id}_E$, alors $(x_n - x'_n)f + (y_n - y'_n)\text{id}_E$ et la famille (id_E, f) est libre donc $x_n - x'_n = y_n - y'_n = 0$ et $(x_n, y_n) = (x'_n, y'_n)$ et on a unicité de l'écriture de f^n en fonction de f et id_E .

Par conséquent, il y a unicité de (x_n, y_n) dans $f^n = x_n f + y_n \text{id}_E$ si et seulement si f n'est pas une homothétie.

d. Pour $p_1 = \alpha(f - 2\text{id}_E), p_1^2 = \alpha^2(f^2 - 4f + 4\text{id}_E) = \alpha^2(3f - 2\text{id}_E - 4f + 4\text{id}_E) = -\alpha^2(f - 2\text{id}_E) = -\alpha p_1$ pour tout scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$. Pour que p_1 soit un projecteur, on a trois cas :

- Si $\alpha = 0, p_1$ est l'endomorphisme nul donc un projecteur.
- Si $\alpha = -1, p_1^2 = p_1$ donc p_1 est la projection sur $\text{Im}(p_1) = \text{Ker}(p_1 - \text{id}_E) = \text{Ker}(\text{id}_E - f) = \text{Ker}(f - \text{id}_E) = E_1(f)$ parallèlement à $\text{Ker}(p_1) = \text{Ker}(2\text{id}_E - f) = \text{Ker}(f - 2\text{id}_E) = E_2(f)$.
- Si $f = 2\text{id}_E$, alors p_1 est l'endomorphisme nul quelle que soit la valeur de α .

Pour $p_2 = \beta(f - \text{id}_E), p_2^2 = \beta^2(f^2 - 2f + \text{id}_E) = \beta^2(3f - 2\text{id}_E - 2f + \text{id}_E) = \beta^2(f - \text{id}_E) = \beta p_2$ pour tout scalaire $\beta \in \mathbb{K}$. Pour que p_2 soit un projecteur, on a trois cas :

- Si $\beta = 0, p_2$ est l'endomorphisme nul donc un projecteur.
- Si $\beta = 1, p_2^2 = p_2$ donc p_2 est la projection sur $\text{Im}(p_2) = \text{Ker}(p_2 - \text{id}_E) = \text{Ker}(f - 2\text{id}_E) = E_2(f)$ parallèlement à $\text{Ker}(p_2) = \text{Ker}(f - \text{id}_E) = E_1(f)$.

- Si $f = \text{id}_E$, alors p_2 est l'endomorphisme nul quelle que soit la valeur de β .

Pour la suite, seul nous intéresse le cas où f n'est pas une homothétie et où $\alpha = -1$ et $\beta = 1$, auquel cas $p_1 = 2\text{id}_E - f$ et $p_2 = f - \text{id}_E$ sont des projecteurs spectraux associés à l'endomorphisme diagonalisable f .

e. Méthode 1 : avec **a.**, $f^n = (2^n - 1)f - (2^n - 2)\text{id}_E = p_1 + 2^n p_2$ mais ce n'est pas l'esprit. Il s'agit surtout de retrouver cette relation par une méthode plus directe, ne faisant pas intervenir de récurrence.

Méthode 2 : si $f = \text{id}_E$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n = \text{id}_E$ et si $f = 2\text{id}_E$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n = 2^n \text{id}_E$ (cas peu intéressants). Si f n'est pas une homothétie, en écrivant $X^n = (X - 1)(X - 2)Q + a_n X + b_n$ la division euclidienne de X^n par P , en évaluant en 1 et en 2, on a $a_n + b_n = 1$ et $2a_n + b_n = 2^n$ donc $a_n = 2^n - 1$ et $b_n = 2 - 2^n$ donc, en remplaçant X par f dans cette division euclidienne, $f^n = (2^n - 1)f + (2 - 2^n)\text{id}_E = p_1 + 2^n p_2$.

Méthode 3 : on a $f = 2p_1 + p_2$ et $(f - \text{id}_E) \circ (f - 2\text{id}_E) = (f - 2\text{id}_E) \circ f(-\text{id}_E) = f^2 - 3f + 2\text{id}_E = 0$ donc $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$ donc, par le binôme de NEWTON, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k p_1^k p_2^{n-k}$. Si $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, il va rester $p_1 \circ p_2$ dans le terme de la somme donc ce terme sera nul, il ne reste donc que les termes $k = 0$ et $k = n$, d'où $f^n = \binom{n}{0} 2^0 p_2^n + \binom{n}{n} p_1^n = 2^n p_2 + p_1$.

21 a. Comme F est stable par D et que $P \in D$, les polynômes $P, D(P), \dots, D^d(P)$ appartiennent à F . Or $\forall k \in \llbracket 0; d \rrbracket$, $D^k(P) = P^{(k)}$ est de degré $d - k$. La famille $\mathcal{B} = (P, P', \dots, P^{(d)})$ est de degrés échelonnés donc elle est libre et elle comporte $d + 1$ vecteurs tous inclus dans $\mathbb{K}_d[X]$ de dimension $d + 1$, ainsi \mathcal{B} est une base de $\mathbb{K}_d[X]$. Par conséquent, $\text{Vect}(P, P', \dots, P^{(d)}) = \mathbb{K}_d[X] \subset F$.

b. (C) Si $F = \{0\}$, F est stable par D . Si $F = \mathbb{K}_d[X]$ pour $d \in \mathbb{N}$, alors $\forall P \in F$, $D(P) = P'$ vérifie $\deg(D(P)) < \deg(P) \leq d$ donc $D(P) \in F$ et F est encore stable par D .

(D) Soit F un sous-espace de $\mathbb{K}[X]$ stable par D . Posons $A = \{\deg(P) \mid P \in F \setminus \{0\}\}$. Traitons trois cas :

- Si A est vide, alors F ne contient que le polynôme nul et $F = \{0\}$.
- Si $A \neq \emptyset$ et A n'est pas majoré, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$ il existe $d \in A$ tel que $d \geq m$ donc F contient un polynôme de degré d et $\mathbb{K}_d[X] \subset F$ d'après **a.** Or $\mathbb{K}_m[X] \subset \mathbb{K}_d[X]$ donc $\mathbb{K}_m[X] \subset F$. Comme ceci est vrai pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $F = \mathbb{K}[X]$.
- Si $A \neq \emptyset$ et A est majoré, comme A est une partie de \mathbb{N} , on peut poser $d = \text{Max}(A)$. Il existe donc un polynôme $P \in F$ tel que $\deg(P) = d$. On a vu en **a.** que $\mathbb{K}_d[X] \subset F$ et, par maximalité de d , on a aussi $F \subset \mathbb{K}_d[X]$. Ainsi, par double inclusion, on a $F = \mathbb{K}_d[X]$.

Les sous-espaces de $\mathbb{K}[X]$ stables par D sont $\{0\}$ et $\mathbb{K}[X]$, mais aussi tous les sous-espaces $\mathbb{K}_d[X]$ avec $d \in \mathbb{N}$.

22 a. Pour $(M, M') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on écrit $M = A + \lambda I_n$ et $M' = B + \lambda' I_n$ avec $(A, B) \in F^2$ et $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2$ puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = F \oplus \text{Vect}(I_n)$, alors $p(M) = \lambda I_n$ et $p(M') = \lambda' I_n$ et $MM' = (AB + \lambda B + \lambda' A) + \lambda \lambda' I_n$. Comme $AB + \lambda B + \lambda' A \in F$ car F est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par produit matriciel, on obtient $p(MM') = \lambda \lambda' I_n$ donc $p(MM') = p(M)p(M')$.

b. De même, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si on écrit $M = A + \lambda I_n$ avec $A \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $M^2 = (A^2 + 2\lambda A) + \lambda^2 I_n$ avec $A^2 + 2\lambda A \in F$. Si $M^2 \in F$, alors $p(M^2) = \lambda^2 I_n = 0$ donc $\lambda = 0$ et $M \in F$.

c. D'après le cours, $\forall (i, j, k, \ell) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $E_{i,j} E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$.

d. Pour $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, traitons deux cas :

Si $i \neq j$, $E_{i,j}^2 = E_{i,j}E_{i,j} = \delta_{j,i}E_{i,j} = 0$ donc $E_{i,j}^2 \in F$ car $0 \in F$ donc, d'après la question précédente, $E_{i,j} \in F$.
 Si $i = j$, avec $k \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{i\}$ ($n \geq 2$), $E_{i,k}E_{k,i} = E_{i,i} \in F$ car $E_{i,k} \in F$ et $E_{k,i} \in F$ et d'après le premier cas.
 Ainsi, toutes les matrices élémentaires sont dans F , ce qui montre que $\text{Vect}(E_{i,j} \mid (i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset F$
 donc que $F = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Mais ceci contredit le fait que F soit un hyperplan de E .
 Il n'existe donc aucun hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par produit dont $\text{Vect}(I_n)$ soit un supplémentaire.
 Pour $n = 1$, un tel hyperplan existerait bien et ce serait $F = \{0\}$, mais ça n'a que peu d'intérêt.

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 3

SÉRIES NUMÉRIQUES, SÉRIES DE FONCTIONS ET SÉRIES ENTIÈRES

23 a. D'abord, le fait que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge impose que le rayon de convergence R de cette série entière

$\sum_{n \geq 0} a_n t^n$ vérifie $R \geq 1$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $u_n : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $u_n(t) = a_n t^n$.

Premier cas : si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes positifs, comme on a $\|u_n\|_{\infty, [-1; 1]} = a_n$, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge normalement sur $[-1; 1]$, intervalle sur lequel toutes les u_n sont continues ainsi, par théorème, la fonction S est bien définie et continue sur $[-1; 1]$. Alors, $\lim_{t \rightarrow 1^-} S(t) = S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Second cas : si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alternée et $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elle tend aussi vers 0 puisque la série numérique $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées. Mieux, pour $t \in [0; 1]$, la suite $(a_n t^n)_{n \geq 0}$ est alternée et $(|a_n t^n|)_{n \geq 0}$ est décroissante et tend vers 0 donc, par le critère spécial des séries alternées, en posant $R_n : t \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(t)$ pour $n \geq -1$, on peut majorer $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0; 1], |R_n(t)| \leq |a_{n+1} t^{n+1}| \leq |a_{n+1}|$ donc R_n est bornée sur $[0; 1]$ et $\|R_n\|_{\infty, [0; 1]} \leq |a_{n+1}|$ ce qui montre par encadrement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty, [0; 1]} = 0$, donc que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge uniformément sur $[0; 1]$.

Comme les u_n sont continues sur $[0; 1]$, S l'est aussi par théorème et, comme avant, $\lim_{t \rightarrow 1^-} S(t) = S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. Comme $a_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n^3}$, la série à termes positifs $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge

par critère de RIEMANN. Ainsi, d'après la question a. (premier cas), en notant $S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n(n+1)(n+2)}$

pour $t \in [-1; 1]$, on a $\lim_{t \rightarrow 1^-} S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. On a classiquement $a_n = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}$ en décomposant

en éléments simples donc, pour $t \in]0; 1[$, avec les développements classiques en série entière, on obtient la relation $S(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n+1} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n+2} = -\frac{\ln(1-t)}{2} + \frac{1}{t} (\ln(1-t) + t) - \frac{1}{2t^2} (\ln(1-t) + t + \frac{t^2}{2})$.

On a donc $\forall t \in]0; 1[, S(t) = \frac{\ln(1-t)}{2t^2} (-t^2 + 2t - 1) - \frac{1}{4} - \frac{1}{2t} = -\frac{(1-t)^2 \ln(1-t)}{2t^2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2t}$. Par croissances

comparées, $\lim_{t \rightarrow 1^-} (1-t)^2 \ln(1-t) = 0$ donc $\lim_{t \rightarrow 1^-} S(t) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Autre méthode : $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} \right) = \frac{H_n}{2} - \left(H_n + \frac{1}{n+1} - 1 \right) + \frac{1}{2} \left(H_n + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - 1 - \frac{1}{2} \right)$

si on pose $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ avec la définition habituelle de $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ (somme partielle de la série

harmonique). On a donc $S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Comme la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alternée et que $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

et tend vers 0, d'après la question a. (second cas), en notant $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^n}{2n+1}$ pour $t \in [0; 1]$, on a

$\lim_{t \rightarrow 1^-} S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. Or, $\forall t \in [0; 1[$, $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^n}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{t})^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\text{Arctan}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$ donc, en passant à la limite quand t tend vers 1^- , $\lim_{t \rightarrow 1^-} S(t) = \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Autre méthode : en posant $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$, comme $\frac{1}{2k+1} = \int_0^1 t^{2k} dt$, par linéarité de l'intégrale, on a $S_n = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n (-t^2)^k \right) dt = \int_0^1 \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1+t^2} dt$. Comme $\forall t \in [0; 1]$, $\frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2} \leq t^{2(n+1)}$, par inégalité triangulaire, $\left| S_n - \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \right| = \left| \int_0^1 \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} dt \right| = \int_0^1 \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 t^{2(n+1)} dt = \frac{1}{2n+3}$ donc, par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\text{Arctan}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

d. Comme on parle de la limite de S en 1^- , S est définie sur $[0; 1[$, donc que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ vérifie $R \geq 1$. Posons $S_n : [0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $S_n(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On ne somme que des quantités positives, donc $0 \leq S_n(t) \leq S(t)$ pour $t \in [0; 1[$ et $n \in \mathbb{N}$. Comme S_n est polynomiale donc continue en 1, en passant à la limite quand t tend vers 1^- dans cette inégalité, on obtient $0 \leq \sum_{k=0}^n a_k \leq \ell$. Ainsi, les sommes partielles de la série numérique à termes positifs $\sum_{n \geq 0} a_n$ sont majorées donc la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge. D'après le premier cas de la question **a.**, on a donc $\lim_{t \rightarrow 1^-} S(t) = \ell = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

24 a. Pour $\beta \in]1; \alpha[$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{(n+1)^\beta u_{n+1}}{n^\beta u_n} > 0$, alors $\ln(v_n) = \beta \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ donc $\ln(v_n) = \frac{\beta}{+\infty} + o\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\beta}{+\infty} - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\beta - \alpha}{n}$ car $\beta - \alpha \neq 0$ donc $\ln(v_n)$ est négatif pour n assez grand. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $v_n \leq 1$ donc $\forall n \geq n_0$, $(n+1)^\beta u_{n+1} \leq n^\beta u_n$ et la suite $(n^\beta u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante. Ainsi, $\forall n \geq n_0$, $n^\beta u_n \leq n_0^\beta u_{n_0}$ donc $u_n = O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$ ce qui montre, par comparaison à une série de RIEMANN, que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

b. D'après le cours, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $x \in]-1; 1[$, on a $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)$ donc, pour $\alpha = \frac{1}{2}$, comme $\forall n \geq 1$, $\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \prod_{k=1}^{n-1} (2k-1) = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \times \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!} = \frac{(-1)^{n-1} (2n)!}{(2n-1)4^n n!}$, $\forall x \in]-1; 1[$, $\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n)! x^n}{(2n-1)(n!)^2 4^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_0 = 1$ et $a_n = \frac{(-1)^{n-1} (2n)!}{(2n-1)(n!)^2 4^n}$ si $n \in \mathbb{N}^*$.

Méthode 1 : si on pose $u_n = |a_n| = \frac{(2n)!}{(2n-1)4^n (n!)^2} > 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n-1)}{4(2n+1)(n+1)^2}$ qui se simplifie en $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ de sorte que, avec la question **a.**, on a la convergence absolue des séries $\sum_{n \geq 0} a_n$ et de $\sum_{n \geq 0} a_n (-1)^n$.

Méthode 2 : si $u_n = |a_n| = \frac{(2n)!}{(2n-1)4^n (n!)^2} > 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n} (2n)^{2n} e^{2n}}{(2\pi n) e^{2n} (2n) 4^n n^{2n}}$ avec STIRLING donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{2\pi n}^{3/2}}$ et $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge. Ainsi, $\sum_{n \geq 0} a_n$ et de $\sum_{n \geq 0} a_n (-1)^n$ convergent absolument.

Le domaine de définition de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est donc $[-1; 1]$.

c. Pour $x \in]-R; R[$, on a $xS(x)^2 = x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \right)^2 = x \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n u_k u_{n-k} \right) x^n$ par produit de CAUCHY qu'on

peut effectuer dans l'intervalle ouvert de convergence, ainsi $xS(x)^2 = x \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = S(x) - 1$.

Comme $S(x)$ est racine réelle du polynôme $X^2 - xX + 1 \in \mathbb{R}[X]$, son discriminant $\Delta = 1 - 4x$ est positif de sorte que $x \leq \frac{1}{4}$ pour tout $x \in] -R; R[$. Ceci impose $R \leq \frac{1}{4}$.

De plus, $\forall x \in] -R; R[$, $S(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$ ou $S(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2x}$. Comme $f : x \mapsto 2xS(x) - 1$ est développable en série entière sur $] -R; R[$, elle y est continue et $\forall x \in] -R; R[$, $f(x) = \pm\sqrt{1 - 4x}$ d'après ce qui précède. La continuité de f et le fait que f ne s'annule pas sur $] -R; R[$ montre que l'on a soit $\forall x \in] -R; R[$, $f(x) = \sqrt{1 - 4x}$ soit $\forall x \in] -R; R[$, $f(x) = -\sqrt{1 - 4x}$. Mais comme f vaut -1 en 0 , elle est négative sur $] -R; R[$ et on a donc $\forall x \in] -R; R[$, $f(x) = -\sqrt{1 - 4x}$ donc $S(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$.

d. Soit $T :] -\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $T(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$. D'après la question **b.**, T est développable en série entière sur $] -\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[$ (et même sur $[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}]$ mais on n'en a pas besoin) et, avec les calculs précédents, on a $\forall x \in] -\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[$, $T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!x^{n-1}}{2(2n-1)(n!)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+2)!x^n}{2(2n+1)((n+1)!)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!x^n}{(n+1)(n!)^2}$. On a bien sûr, pour $\forall x \in] -\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[$, la relation $T(x)^2 - T(x) + x = \frac{1 - 2\sqrt{1 - 4x} + (1 - 4x)}{4} - \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2} + x = 0$.

En effectuant un produit de CAUCHY sur $] -\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[$, et en identifiant les coefficients, on trouve $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \sum_{k=0}^n v_k v_{n-k}$. Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient les mêmes conditions initiales et la même relation de récurrence donc, par récurrence forte, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n = \frac{(2n)!}{(n+1)(n!)^2} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

On reconnaît les nombres de CATALAN : $u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 5, u_4 = 14, u_5 = 42, \dots$

25

26

27

28

29 **a.** Si $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} (1 - q^k x) = 1$ donc on ne peut pas utiliser le critère de D'ALEMBERT. Traitons deux cas :

- S'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 - q^k x = 0$, alors $\forall n \geq k+1$, $(x, q)_n = 0$ donc la suite $((x, q)_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire (elle devient nulle à partir d'un certain rang) donc converge et on a $(x, q)_\infty = 0$.

- Si $\forall k \in \mathbb{N}$, $1 - q^k x \neq 0$, comme $\lim_{k \rightarrow +\infty} q^k x = 0$, il existe un entier k_0 tel que $\forall k \geq k_0$, $1 - q^k x > 0$ (ceci est le cas en particulier si $x \leq 0$ avec la valeur $k_0 = 0$ car on a alors $\forall k \geq 0$, $1 - q^k x \geq 1 > 0$). Pour $n \geq k_0 + 1$, $(x, q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - q^k x) = \left(\prod_{k=0}^{k_0-1} (1 - q^k x) \right) \times \left(\prod_{k=k_0}^{n-1} (1 - q^k x) \right) = (x, q)_{k_0} \prod_{k=k_0}^{n-1} (1 - q^k x)$.

Posons $v_n = \prod_{k=k_0}^{n-1} (1 - q^k x) > 0$ pour $n \geq k_0 + 1$, alors $\ln(v_n) = \sum_{k=k_0}^{n-1} \ln(1 - q^k x)$. Si on pose

$w_k = \ln(1 - q^k x)$, on a $w_k \underset{+\infty}{\sim} -q^k x$ et $\sum_{k \geq k_0} q^k x$ converge absolument car $|q| < 1$ donc $\sum_{k \geq k_0} w_k$ converge aussi absolument par comparaison ce qui montre la convergence de la suite de sommes

partielles $(u_n)_{n \geq k_0+1}$ si $u_n = \sum_{k=k_0}^{n-1} \ln(1 - q^k x)$. Par continuité de l'exponentielle, comme $v_n = e^{u_n}$,

la suite $(v_n)_{n \geq k_0}$ converge donc la suite $((x, q)_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel qu'on note $(x, q)_\infty$.

b. On veut à nouveau passer au \ln car on n'a de théorème de continuité que sur les séries de fonctions. Pour $b > 0$, soit $I_b =]-\infty; b]$. Comme avant, il existe un entier $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq k_0, 1 - q^k b > 0$. Alors, pour $x \in I_b$, on a $\forall k \in \mathbb{N}, 1 - q^k x \geq 1 > 0$ si $x \leq 0$ et $\forall k \geq k_0, 1 - q^k x \geq 1 - q^k b > 0$ si $x \in]0; b]$. Ainsi, pour tout $x \in I_b$, en écrivant encore, pour $n \geq k_0 + 1, \forall x \in I_b, (x, q)_n = (x, q)_{k_0} \prod_{k=k_0}^{n-1} (1 - q^k x)$ comme la fonction $h : x \mapsto (x, q)_{k_0}$ est continue sur I_b car elle est polynomiale, il ne reste plus qu'à montrer la continuité de $q : x \mapsto \prod_{k=k_0}^{+\infty} (1 - q^k x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=k_0}^{n-1} (1 - q^k x)$ sur I_b pour avoir, par produit, la continuité de p sur I_b . Pour $n \geq k_0 + 1$, posons $q_n(x) = \prod_{k=k_0}^{n-1} (1 - q^k x)$ et $g_n(x) = \ln(q_n(x)) = \sum_{k=k_0}^{n-1} f_k(x)$ avec $f_k(x) = \ln(1 - q^k x)$ pour tout $x \in I_b$. Utilisons maintenant le théorème de continuité des séries de fonctions :

- Toutes les fonctions f_k sont continues sur I_b par opérations.
- Comme f_k n'est pas bornée sur I_b car $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = +\infty$, on fixe $a \in]-\infty; b[$ et, par décroissance de f_k sur $[a; b]$, on a $\|f_k\|_{\infty, [a; b]} = \text{Max}(|f_k(a)|, |f_k(b)|) = \text{Max}(f_k(a), -f_k(b))$. Plus simplement, $\|f_k\|_{\infty, [a; b]} \leq |f_k(a)| + |f_k(b)|$ et les séries $\sum_{n \geq k_0} |f_n(a)|$ et $\sum_{n \geq k_0} |f_n(b)|$ convergent d'après **a.**, la série $\sum_{n \geq k_0} f_n$ convergent normalement sur $[a; b]$ donc sur tout segment de I_b .

Par ce théorème, $g : x \mapsto \sum_{n=k_0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I_b donc $q = e^g$ est continue sur I_b par continuité de \exp . Par produit, $p = hq$ est continue sur $I_b =]-\infty; b]$ pour tout réel $b > 0$, donc p est continue sur \mathbb{R} .

c. (\implies) on vient de voir en question **b.** que la fonction p est continue sur \mathbb{R} , de plus $p(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (0, q)_n = 1$

car $\forall n \in \mathbb{N}, (0, q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - q^k \cdot 0) = 1$. Ensuite, pour tout réel x et tout entier naturel n , on a la relation $(1 - x)(qx, q)_n = (1 - x) \prod_{k=0}^{n-1} (1 - q^k \cdot (qx)) = (1 - x) \prod_{k=0}^{n-1} (1 - q^{k+1} x) = \prod_{k=0}^n (1 - q^k x) = (x, q)_{n+1}$ donc, en passant à la limite dans $(1 - x)(qx, q)_n = (x, q)_{n+1}$ (elles existent d'après **a.**), on a $(1 - x)p(qx) = p(x)$.

(\impliedby) Réciproquement, soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue vérifie $f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (1 - x)f(qx)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = (1 - x)f(qx) = (1 - x)(1 - qx)f(q^2x)$ et, par une récurrence simple, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}, f(x) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} (1 - q^k x) \right) f(q^n x)$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n x = 0$ et que f est continue en 0, on a

$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(q^n x) = f(0) = 1$ donc, en passant à la limite dans $f(x) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} (1 - q^k x) \right) f(q^n x)$, on a $f(x) = p(x) \cdot 1 = p(x)$.

Ainsi, p est l'unique fonction continue f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant $f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (1 - x)f(qx)$.

30 a. D'après l'énoncé, on ne peut aller que vers le nord (N), vers l'est (E) ou vers le sud (S). Après un pas, on ne peut avoir fait que N, E, S donc $u_1 = 3$. Avec les conditions de marche, après deux pas le chemin ne peut qu'être en NN, NE, EN, EE, ES, SE, SS donc $u_2 = 7$. Et après trois pas, on ne avoir fait que NNN, NNE, NEN, NEE, NES, ENN, ENE, EEN, EEE, EES, ESE, ESS, SEN, SEE, SES, SSE, SSS donc $u_3 = 17$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour dénombrer les u_{n+1} chemins possibles, on fait une disjonction de cas selon les premiers

pas. Le nombre de chemins possibles jusqu'à l'étape $n + 1$ sachant qu'on commence par :

- E est u_n (on peut faire ce qu'on veut après N).
- NE (ou SE) est u_{n-1} (on peut faire ce qu'on veut après NE (ou SE)).
- NNE (ou SSE) est u_{n-2} (on revient "au point de départ" avec deux pas déjà effectués).
- $N \cdots NE$ où il y a $k \in \llbracket 3; n \rrbracket$ fois N (ou $S \cdots SE$) est u_{n-k} pour les mêmes raisons (même si $k = n$).
- $N \cdots N$ (ou $S \cdots S$) toujours vers le nord (ou le sud) est 1.

Ainsi, $\forall n \geq 1$, $u_{n+1} = u_n + 2 \left(\sum_{k=1}^n u_{n-k} \right) + 2 = u_n + 2 \left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k \right) + 2$. Cette relation est encore vraie pour $n = 0$ car $3 = u_1 = u_0 + 0 + 2 = 1 + 0 + 2$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2 \left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k \right) + 2 = 2 \left(\sum_{k=0}^n u_k \right) + 2 - u_n$.

c. Initialisation : $u_0 = 1 \leq 3^0$, $u_1 = 3 \leq 3^1$, $u_2 = 7 \leq 3^2 = 9$ et $u_3 = 17 \leq 3^3 = 27$.

Hérédité : soit un entier $n \geq 3$ tel que $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $u^k \leq 3^k$. On a alors $u_{n+1} \leq 3^n + 2 \left(\sum_{k=0}^{n-1} 3^k \right) + 2$ d'où $u_{n+1} \leq 3^n + 2 \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} + 2 \leq 2(3^n + 1) \leq 3^{n+1}$ car $3^n \geq 2$.

Ainsi, par principe de récurrence forte, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 3^n$ donc le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$ est supérieur à celui de $\sum_{n \geq 0} 3^n x^n$ qui vaut $\frac{1}{3}$. Comme $R \geq \frac{1}{3}$, on a bien $R > 0$. On pouvait dire directement que $u_n \leq 3^n$ car à chaque pas, on n'a que trois possibilités, N, E ou S, et il y a n pas.

d. Pour tout $x \in] - \text{Min}(R, 1); \text{Min}(R, 1)[$, par produit de CAUCHY à l'intérieur des intervalles ouverts de convergence, $\frac{2}{1-x} \times S(x) = 2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \right) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n u_k \right) x^n$. Avec la relation de récurrence de la question **b.**, on a la relation $\frac{2S(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} + u_n - 2)x^n$, qu'on peut multiplier par x pour avoir $\frac{2xS(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} + u_n - 2)x^{n+1} = S(x) - 1 + xS(x) - \frac{2x}{1-x}$. Ainsi, $(1 - 2x - x^2)S(x) = 1 + x$ donc, comme $1 + x \neq 0$ car $x \in] - \text{Min}(R, 1); \text{Min}(R, 1)[$, $1 - 2x - x^2 \neq 0$ donc $S(x) = \frac{1+x}{1-2x-x^2}$, si $x \in] - \frac{1}{3}; \frac{1}{3}[$ au moins.

e. Les racines de $X^2 + 2X - 1$ sont $\alpha = -1 + \sqrt{2} > 0$ et $\beta = -1 - \sqrt{2} < 0$ qui vérifient $\alpha + \beta = -2$ et $\alpha\beta = -1$. Soit la fonction $f :] - \alpha; -\alpha[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1+x}{1-2x-x^2} = \frac{1+x}{(\alpha-x)(x-\beta)}$, comme cette fraction rationnelle est mise sous forme irréductible et qu'elle est de degré strictement négatif, on sait qu'il existe deux réels a et b tels que $f(x) = \frac{a}{\alpha-x} + \frac{b}{\beta-x}$. On trouve classiquement $a = \frac{1+\alpha}{\alpha-\beta} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1+\beta}{\beta-\alpha} = \frac{-\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$. Ainsi, $\forall x \in] - \alpha; \alpha[$, $f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{1-(x/\alpha)} + \frac{1}{\beta} \times \frac{1}{1-(x/\beta)} \right)$ et, comme $\left| \frac{x}{\alpha} \right| < 1$ et $\left| \frac{x}{\beta} \right| < 1$ car $\alpha < |\beta|$, on arrive à $f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\alpha^n} + \frac{1}{\beta} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\beta^n} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^{-n-1} + \beta^{-n-1}}{2} x^n$ puis $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\beta)^{n+1} + (-\alpha)^{n+1}}{2} x^n$ car $\alpha\beta = -1$ donc $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}}{2} x^n$. Comme $\alpha > \frac{1}{3}$, $\forall x \in] - \frac{1}{3}; \frac{1}{3}[$, $f(x) = S(x)$ donc, par unicité du développement en série entière, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}}{2}$.

Comme $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1}}{2} > 0$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \sqrt{2}$ donc, par D'ALEMBERT, le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$ vaut $R = \frac{1}{-\beta} = \alpha = \sqrt{2} - 1 \sim 0,41$. De plus, pour calculer la limite de $u_n^{1/n}$, on écrit

$$u_n^{1/n} = \frac{1}{2^{1/n}} \exp \left(\frac{\ln \left((1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1} \right)}{n} \right) = \frac{1}{2^{1/n}} e^{\frac{n+1}{n} \ln(1+\sqrt{2})} \exp \left(\frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{(1-\sqrt{2})^{n+1}}{(1+\sqrt{2})^{n+1}} \right) \right)$$

ce qui montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^{1/n} = e^{\ln(1+\sqrt{2})} = 1 + \sqrt{2}$.

C'est le critère de CAUCHY, si cette limite existe, on a $R = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$ (cela ressemble à D'ALEMBERT).

31

32

33

34

35 a. Posons $u_n = H_n - \ln(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\forall n \geq 2$, $u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ donc, avec

les développements limités, $u_n - u_{n-1} \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc, par comparaison, la série $\sum_{n \geq 2} (u_n - u_{n-1})$ converge. Par dualité suite-série, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. Si on note γ sa limite, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (H_n - \ln(n)) = \gamma$, ce qui s'écrit aussi $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

b. D'après a., $H_{2n} - H_n \underset{+\infty}{=} \ln(2n) + \gamma - \ln(n) - \gamma + o(1)$ donc $H_{2n} - H_n \underset{+\infty}{=} \ln(2) + o(1)$ et on a donc

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (H_{2n} - H_n) = \ln(2)$. On pouvait aussi, comme $H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{n+j}$ en posant $k = n+j$,

obtenir cette limite avec les sommes de RIEMANN. En effet, $H_{2n} - H_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$ en posant $a = 0$, $b = 1$ et $f : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ qui est continue sur le segment $[0; 1]$. Par théorème, on a donc

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (H_{2n} - H_n) = \int_0^1 f(t) dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$ avec la même conclusion.

c. La fraction rationnelle $\frac{1}{2X^3 + 3X^2 + X}$ est de degré -3 , est écrite sous forme irréductible, et admet 0 , -1

et $\frac{1}{2}$ comme pôles simples car $2X^3 + 3X^2 + X = 2X\left(X^2 + \frac{3}{2}X + \frac{1}{2}\right) = 2X(X+1)\left(X - \frac{1}{2}\right)$. En écrivant donc

$\frac{1}{2X^3 + 3X^2 + X} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{2X+1}$, on obtient $a = 1$, $b = 1$ et $c = -4$ par des méthodes usuelles ou par

identification, de sorte que $\frac{1}{2X^3 + 3X^2 + X} = \frac{1}{X} + \frac{1}{X+1} - \frac{4}{2X+1}$.

d. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{a_n}$ converge par critère de RIEMANN car $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$ et que l'on a la formule classique

$a_n = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ donc $a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^3}{3}$ et $\frac{1}{a_n} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Si on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$, d'après c.,

il vient $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{6}{k} + \frac{6}{k+1} - \frac{24}{2k+1}\right) = 6H_n + 6\left(H_n + \frac{1}{n+1} - 1\right) - 24\left(-1 + \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}\right)$, donc

$S_n = 6H_n + 6\left(H_n + \frac{1}{n+1} - 1\right) - 24\left(-1 + H_{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{H_n}{2}\right) = 18 - 24(H_{2n} - H_n) + \frac{6}{n+1} - \frac{24}{2n+1}$.

En passant à la limite avec b., on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 18 - 24 \ln(2) \sim 1,36$.

36

37 a. Initialisation : pour $n = 2$, comme $a_2 = a_1 + a_0 = 1$, on a bien $(2-2)! = 0! = 1 \leq a_2 \leq 2! = 2$. Mais on

a aussi $a_3 = 2(a_2 + a_1) = 2$ et $(3-2)! = 1 \leq a_3 \leq 6 = 3!$.

Hérédité : Soit $n \geq 2$ tel que $(n-2)! \leq a_n \leq n!$ et $(n-1)! \leq a_{n+1} \leq (n+1)!$, alors $a_{n+2} = (n+1)(a_{n+1} + a_n)$

donc $(n+1)((n-1)!+(n-2)!) \leq a_{n+2} \leq (n+1)((n+1)!+n!)$, qui se factorise, comme $(n-1)! = (n-1)(n-2)!$ et $(n+1)! = (n+1)n!$, en $(n-2)!n(n+1) \leq a_{n+2} \leq (n+2)!$ et on a bien $n! \leq a_{n+2} \leq (n+2)!$ car $(n-2)!n(n+1) \geq n!$ puisque $n+1 \geq n-1$.

Conclusion : par principe de récurrence double on a $\forall n \geq 2, (n-2)! \leq a_n \leq n!$.

b. Comme $\forall n \geq 2, 0 \leq \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)} \leq \frac{a_n}{n!} \leq 1 = \frac{n!}{n!}$, on sait d'après le cours que le rayon de convergence R est compris entre celui des séries entières $\sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$ et $\sum_{n \geq 2} x^n$. Comme ces deux rayons valent 1 car $(x^n)_{n \geq 2}$ et $\left(\frac{x^n}{n(n-1)}\right)_{n \geq 2}$ sont bornées si et seulement si $|x| \leq 1$, on en déduit que $R = 1$.

c. On peut dériver terme à terme la fonction somme d'une série entière dans l'intervalle ouvert de convergence donc $\forall x \in]-1; 1[$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{n+1} x^n}{n!}$. Ainsi, en n'écrivant que des termes en x^n , on trouve $(1-x)S'(x) - xS(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{n+1} x^n}{n!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1} x^n}{(n-1)!} = a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+1} - n(a_n + a_{n-1})}{n!} x^n = 0$ car $a_1 = 0$ et avec la relation de récurrence définissant la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

d. S est donc solution de (E) : $y' - \frac{x}{1-x}y = 0$ sur $] -1; 1[$. En posant $a : x \mapsto \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$, une primitive de a sur $] -1; 1[$ est $A : x \mapsto -x - \ln(1-x)$, les solutions de (E) sur $] -1; 1[$ sont les fonctions $y : x \mapsto \lambda e^{-x - \ln(1-x)} = \frac{e^{-x}}{1-x}$. Comme $S(0) = a_0 = 1$, on a $\forall x \in] -1; 1[$, $S(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} = e^{-x} \times \frac{1}{1-x}$. On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$ et $\forall x \in] -1; 1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. Par produit de CAUCHY de séries entières, on en déduit que $\forall x \in] -1; 1[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right) x^n$. Par unicité du développement en série entière (comme $R > 0$), on a $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{a_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ donc $a_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

On reconnaît en a_n l'expression du nombre de dérangements de $[[1; n]]$. Posons donc \mathcal{D}_n l'ensemble des dérangements de $[[1; n]]$ et $a_n = \text{card}(\mathcal{D}_n)$ et expliquons d'où vient la relation de récurrence de l'énoncé. D'abord, $a_0 = 1$ est conventionnel et $a_1 = 0$ car $\mathcal{D}_1 = \emptyset$. De plus, si $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}_{n+2} = \mathcal{D}_{n+2}^0 \sqcup \mathcal{D}_{n+2}^1$ avec \mathcal{D}_{n+2}^0 qui contient les dérangements σ de $[[1; n+2]]$ tel que $\sigma(n+2) = k$ et $\sigma(k) = n+2$ et \mathcal{D}_{n+2}^1 contient les dérangements σ de $[[1; n+2]]$ tels que $\sigma(n+2) = k$ et $\sigma(k) \neq n+2$.

- Pour choisir un dérangement de \mathcal{D}_{n+2}^0 , il faut d'abord choisir $k \in [[1; n+1]]$, cela fait $n+1$ choix, et ensuite σ induit un dérangement de $[[1; n+1]] \setminus \{k\}$ qui est de cardinal n donc il a a_n choix pour les images par σ des éléments de $[[1; n+1]] \setminus \{k\}$. Ainsi, $\text{card}(\mathcal{D}_{n+2}^0) = (n+1)a_n$.
- Pour choisir un dérangement de \mathcal{D}_{n+2}^1 , il faut d'abord choisir $k \in [[1; n+1]]$, cela fait $n+1$ choix. En posant τ la transposition qui échange k et $n+2$, on vérifie que la permutation $\tau \circ \sigma$ est un dérangement de $[[1; n+1]]$. Réciproquement, pour un dérangement σ' de $[[1; n+1]]$, la permutation $\sigma = \tau^{-1} \circ \sigma' = \tau \circ \sigma'$ appartient à \mathcal{D}_{n+2}^1 . Ainsi, $\text{card}(\mathcal{D}_{n+2}^1) = (n+1)\text{card}(\mathcal{D}_{n+1}) = (n+1)a_{n+1}$.

Ainsi, $\text{card}(\mathcal{D}_{n+2}) = a_{n+2} = (n+1)a_n + (n+1)a_{n+1} = (n+1)(a_{n+1} + a_n) = \text{card}(\mathcal{D}_{n+2}^0) + \text{card}(\mathcal{D}_{n+2}^1)$.

39 a. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$. Traitons trois cas :

- Si $x = 0$, $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et, comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est alternée, que la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge par le critère spécial des séries alternées.
- Si $x > 0$, $|u_n| = \frac{e^{-nx}}{n} = o((e^{-x})^n)$ et la série géométrique $\sum_{n \geq 1} (e^{-x})^n$ converge car $|e^{-x}| < 1$ donc, par comparaison, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge absolument donc converge.
- Si $x < 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = +\infty$ donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge grossièrement.

Ainsi, le domaine de définition D de S est $D = \mathbb{R}_+$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

(H₁) la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ d'après a..

(H₂) les fonctions f_n sont toutes continues sur \mathbb{R}_+ par opérations.

(H₃) Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, comme $(|f_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0, par le critère spécial des séries alternées, si $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$, on a $|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$. Ainsi, R_n est bornée sur \mathbb{R}_+ et $\|R_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \leq \frac{1}{n+1}$ donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}_+ par encadrement car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

Ainsi, par le théorème de continuité des séries de fonctions, S est continue sur \mathbb{R}_+ .

c. S est continue sur $[0; +\infty[$ et, comme la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge par le critère spécial des séries alternées car la suite $(|f_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0 pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on sait majorer le reste et avoir, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $|S(x)| = |R_0(x)| \leq |f_1(x)| = e^{-x}$. Comme $S(x) = O(e^{-x})$, par comparaison à une intégrale de référence, S est intégrable en $+\infty$.

d. Utilisons cette fois-ci le théorème de dérivation des séries de fonctions :

(H₁) la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}_+$.

(H₂) les fonctions f_n sont toutes de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* par opérations et $f'_n(x) = (-1)^{n+1} e^{-nx}$.

(H₃) pour $a > 0$, $x \in [a; +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $|f'_n(x)| = e^{-nx} \leq e^{-na} = (e^{-a})^n = |f'_n(a)|$. Ainsi, $\|f'_n\|_{\infty, [a; +\infty[} = (e^{-a})^n$ et, comme la série géométrique $\sum_{n \geq 1} (e^{-a})^n$ converge, $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge normalement sur tout segment de \mathbb{R}_+^* on peut remplacer $[a; +\infty[$ par $[a; b]$ sans rien changer.

Par ce théorème, la fonction S est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* .

e. Pour $x > 0$, on a $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$ car $|e^{-x}| < 1$. Comme \mathbb{R}_+^* est un intervalle et que $x \mapsto -\ln(1 + e^{-x})$ est une primitive de $x \mapsto \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0$, $S(x) = C - \ln(1 + e^{-x})$.

Par convergence uniforme de $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur \mathbb{R}_+ , comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0 = \ell_n$, le théorème de la

double limite permet de conclure que $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 0$. Ainsi, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0$, on

conclut que $C = 0$ donc que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $S(x) = -\ln(1 + e^{-x})$. Mais comme S et $x \mapsto -\ln(1 + e^{-x})$ sont continues en 0 d'après **b.**, on a donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $S(x) = -\ln(1 + e^{-x})$. C'était direct avec les séries entières car on sait que $\forall u \in]-1; 1[$, $\ln(1 + u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} u^n}{n}$. Restait à prolonger en 0 .

f. Utilisons le théorème d'intégration terme à terme.

(H₁) la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ d'après **a.**

(H₂) les fonctions f_n sont toutes continues et intégrables sur \mathbb{R}_+ car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) \underset{+\infty}{=} O(e^{-x})$.

(H₃) la fonction S est continue sur \mathbb{R}_+ d'après **b.**

(H₄) pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx = \frac{1}{n} \left[-\frac{e^{-nx}}{n} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n^2}$ et la série de RIEMANN $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Ainsi, S est intégrable sur \mathbb{R}_+ (on le savait déjà) et $\int_0^{+\infty} S(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Posons

$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ et $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{k^2}\right)$, par comparaison, la série

$\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ converge donc la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $T_{2n} = S_{2n} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} S_{2n} - \frac{S_n}{2}$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_{2n} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}$. Ainsi, $\int_0^{+\infty} S(x) dx = -\frac{\pi^2}{12}$.

40

41

42

43 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{P}_n = "0 \leq u_{n+2} \leq 2^{n+2}, 0 \leq u_{n+1} \leq 2^{n+1}, 0 \leq u_n \leq 2^n"$.

Initialisation : $0 \leq u_2 = 3 \leq 4 = 2^2, 0 \leq u_1 = 2 \leq 2 = 2^1$ et $0 \leq u_0 = 0 \leq 1 = 2^0$ donc \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que \mathcal{P}_n est vraie, on a déjà $0 \leq u_{n+2} \leq 2^{n+2}, 0 \leq u_{n+1} \leq 2^{n+1}$. De plus, $0 = 0 + 0 \leq u_{n+3} = u_{n+1} + u_n \leq 2^{n+1} + 2^n = 3 \cdot 2^n \leq 2^{n+3}$ car $3 \leq 8$. Ainsi, \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Par principe de récurrence, on a bien $\forall n \in \mathbb{N}$, \mathcal{P}_n est vraie donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 2^n$.

b. Pour $x \in \mathbb{R}$, d'après **a.**, $|u_n x^n| \leq |2x|^n$ donc $(u_n x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si $|x| \leq \frac{1}{2}$ ce qui prouve, par définition du rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$, que $R \geq \frac{1}{2}$. On a donc bien $R > 0$.

c. Pour $x \in]-R; R[$, on a $x^3 f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+3} = \sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+3} - u_{n+1}) x^{n+3}$ ce qui s'écrit aussi, en rajoutant les termes manquants $x^3 f(x) = [f(x) - u_0 - u_1 x - u_2 x^2] - x^2 [f(x) - u_0]$ ou encore $(1 - x^2 - x^3) f(x) = 2x + 3x^2$. Si on avait $1 - x^2 - x^3 = 0$, alors on aurait aussi $2x + 3x^2 = 0$ donc $x = 0$ ou $x = -\frac{2}{3}$. Or ni 0 , ni $-\frac{2}{3}$ ne sont racines du polynôme $P = X^3 + X^2 - 1$ car $P(0) = -1 \neq 0$ et $P\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27} + \frac{4}{9} - 1 = \frac{-8 + 12 - 27}{27} = -\frac{23}{27} \neq 0$.

Ainsi, $\forall x \in]-R; R[$, $1 - x^2 - x^3 \neq 0$ donc $f(x) = \frac{2x + 3x^2}{1 - x^2 - x^3}$.

d. Le polynôme P admet trois racines complexes r_1, r_2, r_3 d'après le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS. La fonction polynomiale P vérifie $P'(x) = 3x^2 + 2x = x(3x + 2)$ donc P est strictement croissante sur $] -\infty; -\frac{2}{3}]$,

strictement croissante sur $\left[-\frac{2}{3}; 0\right]$ et strictement croissante sur \mathbb{R}_+ . Comme $P\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{23}{27} < 0$ et $P(0) = -1 < 0$, P ne s'annule qu'une seule fois sur \mathbb{R} en un réel $\alpha \in]0; 1[$ ($\alpha \sim 0,755$) car $P(1) = 1 > 0$. Prenons $r_1 = \alpha$, les deux autres racines de P sont donc complexes conjuguées car P est un polynôme à coefficients réels, donc $r_3 = \bar{r}_2$. Comme $r_1 r_2 \bar{r}_2 = 1$ avec les relations coefficients-racines, on a $|r_2|^2 = \frac{1}{r_1} > 1$ donc $|r_2| > |r_1| = r_1$. P est donc scindé à racines simples sur \mathbb{C} et $P = (X - r_1)(X - r_2)(X - \bar{r}_2)$.

D'après la question **c.**, $\forall x \in]-R; R[$, $P(x) \neq 0$ donc $r_1 \notin]-R; R[$ ce qui prouve que $R \leq r_1$.

En posant $A = 2X + 3X^2$, la fraction rationnelle $F = -\frac{A}{P} = \frac{2X + 3X^2}{1 - X^2 - X^3}$ est mise sous forme irréductible car les racines de A , 0 et $-\frac{2}{3}$, ne sont pas racines de P . F est de degré -1 strictement négatif et n'a que des pôles

simples donc on sait qu'il existe des constantes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ telles que $F = \frac{\alpha_1}{X - r_1} + \frac{\alpha_2}{X - r_2} + \frac{\alpha_3}{X - r_3}$ (il n'y a pas de partie entière). On sait d'après le cours que $\alpha_i = -\frac{A(r_i)}{P'(r_i)}$ donc, comme $A = P'$, on a $\alpha_i = -1$. Par conséquent, $F = \frac{1}{r_1 - X} + \frac{1}{r_2 - X} + \frac{1}{r_3 - X} = \frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{1 - (X/r_1)} + \frac{1}{r_2} \cdot \frac{1}{1 - (X/r_2)} + \frac{1}{\bar{r}_2} \cdot \frac{1}{1 - (X/\bar{r}_2)}$.

Soit $x \in]-r_1; r_1[$, comme $\left|\frac{x}{r_1}\right| < 1$, $\left|\frac{x}{r_2}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{\bar{r}_2}\right| < 1$, on a $\frac{1}{1 - \frac{x}{r_1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{r_1^n}$, $\frac{1}{1 - \frac{x}{r_2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{r_2^n}$ et

$\frac{1}{1 - \frac{x}{\bar{r}_2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\bar{r}_2^n}$ donc $\frac{2x + 3x^2}{1 - x^2 - x^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{r_1^{n+1}} + \frac{1}{r_2^{n+1}} + \frac{1}{\bar{r}_2^{n+1}} \right) x^n$. Par unicité des coefficients d'une

série entière sur $] -R; R[$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{r_1^{n+1}} + \frac{1}{r_2^{n+1}} + \frac{1}{\bar{r}_2^{n+1}}$ donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{r_1^{n+1}}$ et, par D'ALEMBERT,

$R = r_1$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{r_1}$. C'est général, le rayon de convergence d'une fraction rationnelle qui n'admet pas 0 comme pôle est le plus petit module de ses racines.

44 a. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \frac{e^{-nx}}{n}$. Traitons trois cas :

- Si $x = 0$, $u_n = \frac{1}{n}$ et la série harmonique de RIEMANN $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.
- Si $x > 0$, $u_n = \frac{e^{-nx}}{n} = o((e^{-x})^n)$ et la série géométrique $\sum_{n \geq 1} (e^{-x})^n$ converge car $|e^{-x}| < 1$ donc, par comparaison, la série à termes positifs $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge aussi.
- Si $x < 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge grossièrement.

Ainsi, le domaine de définition D de S est $D = \mathbb{R}_+$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n}$.

Limite en $+\infty$:

(H₁) la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ d'après **a.**

(H₂) les fonctions f_n admettent des limites finies en $+\infty$ qui sont $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0 = \ell_n$.

(H₃) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\|f_n\|_{\infty, [1; +\infty[} = |f_n(1)| = \frac{e^{-n}}{n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées donc, comme la série de RIEMANN $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[1; +\infty[$.

Ainsi, par le théorème de double limite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 0$.

Limite en 0^+ : pour $n \in \mathbb{N}^*$, en notant $S_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{e^{-kx}}{k}$, on a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq S_n(x) \leq S(x)$ car on ne somme que des quantités positives. Comme toutes les f_n sont décroissantes sur \mathbb{R}_+^* , S est aussi décroissante sur \mathbb{R}_+^* . Par le théorème de la limite monotone, S admet une limite ℓ , finie ou $+\infty$, en 0^+ . En passant à la limite quand x tend vers 0^+ dans l'inégalité $0 \leq S_n(x) \leq S(x)$, on obtient $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_n \leq \ell$ (valable même si $\ell = +\infty$). Or on sait que la série harmonique diverge donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, on a $\ell = +\infty$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = +\infty$.

c. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, comme $|e^{-x}| < 1$ et que $\forall t \in]-1; 1[$, $\ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}$, on a $S(x) = -\ln(1-e^{-x})$.

d. Utilisons le théorème d'intégration terme à terme.

(H₁) la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^* d'après **a.**

(H₂) les fonctions f_n sont toutes continues et intégrables sur \mathbb{R}_+^* car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) \underset{+\infty}{=} O(e^{-x})$ et f_n se prolonge par continuité en 0 en posant $f_n(0) = \frac{1}{n}$.

(H₃) la fonction S est continue sur \mathbb{R}_+^* car toutes les fonctions f_n le sont et que, comme en **c.**, on a convergence normale de $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur tout segment de \mathbb{R}_+^* .

(H₄) pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx = \frac{1}{n} \left[-\frac{e^{-nx}}{n} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n^2}$ et la série de RIEMANN $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Ainsi, $\int_0^{+\infty} S(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

45

46 a. Pour $x \in \mathbb{R}$ et par croissances comparées, la suite $\left(\frac{2x^n}{n^2-1} \right)_{n \geq 2}$ est bornée si et seulement si $|x| \leq 1$ donc

$\mathbb{R} = 1$. Par RIEMANN, si $x = \pm 1$, $\frac{2x^n}{n^2-1} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum_{n \geq 2} \frac{2}{n^2-1}$ et $\sum_{n \geq 2} \frac{2(-1)^n}{n^2-1}$ convergent absolument.

Ainsi, le domaine de définition D de S est $[-1; 1]$.

b. Si $x \in]-1; 1[\setminus \{0\}$, comme $\frac{2}{n^2-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$, on a $S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$ (les deux séries convergent) donc $S(x) = x \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} - \frac{1}{x} \left(-x - \frac{x^2}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) = -x \ln(1-x) + 1 + \frac{x}{2} + \frac{\ln(1-x)}{x}$.

c. En définissant, pour tout entier $n \geq 2$, $u_n : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par $u_n(x) = \frac{2x^n}{n^2-1}$, on a $\|u_n\|_{\infty, [-1; 1]} = \frac{2}{n^2-1}$ et $\sum_{n \geq 2} \frac{2}{n^2-1}$ converge donc $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge normalement sur $[-1; 1]$. Comme toutes les u_n sont continues

sur $[-1; 1]$, S est continue sur $[-1; 1]$ donc $S(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x)$ et $S(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} S(x)$.

d. Calcul de $S(1)$: pour $x \in]-1; 1[$, $S(x) = \frac{(1-x)(1+x)}{x} \ln(1-x) + 1 + \frac{x}{2}$ donc, comme $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln(t) = 0$,

on a $S(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, ce qu'on pouvait avoir plus facilement en écrivant

$S_n = \sum_{k=2}^n \frac{2}{k^2-1} = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k+1} = 1 + \frac{1}{2} + H_{n-1} - H_{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

par télescopage. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{3}{2} = S(1)$.

Calcul de $S(-1)$: $S(-1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} S(x) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ car $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(1-x)(1+x)}{x} \ln(1-x) = 0$.

Là encore, si on pose $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k^2-1}$ pour $n \geq 2$, on a $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{2(-1)^k}{k^2-1} = \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k-1} - \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$ donc

$$S_n = \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k-1} - \sum_{k=4}^{n+2} \frac{(-1)^k}{k-1} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{(-1)^{n+1}}{n} - \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} \text{ et on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{2} = S(-1).$$

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 4

ESPACES VECTORIELS NORMÉS

47 D'abord, pour $P \in E$, $f(P)$ est bien un polynôme à coefficients réels donc $f(P) \in E$. Pour $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $f(\lambda P + Q) = \frac{1}{2}((\lambda P + Q)\left(\frac{X}{2}\right) + (\lambda P + Q)\left(\frac{X+1}{2}\right)) = \frac{\lambda}{2}\left(P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(Q\left(\frac{X}{2}\right) + Q\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)$ ce qui donne $f(\lambda P + Q) = \lambda f(P) + f(Q)$ donc f est en endomorphisme de E .

a. Pour $P \in E$ et $a \in \mathbb{R}$, $f^2(P)(a) = f(f(P))(a) = \frac{1}{2}\left(f(P)\left(\frac{a}{2}\right) + f(P)\left(\frac{a+1}{2}\right)\right)$ et, par définition de $f(P)$, on a $f^2(P)(a) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(P\left(\frac{a}{4}\right) + P\left(\frac{a+1}{4}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(P\left(\frac{a+2}{4}\right) + P\left(\frac{a+3}{4}\right)\right)\right)$ ce qui donne l'initialisation suivante : $f^2(P)(a) = \frac{1}{4}\left(P\left(\frac{a}{4}\right) + P\left(\frac{a+1}{4}\right) + P\left(\frac{a+2}{4}\right) + P\left(\frac{a+3}{4}\right)\right)$.

Soit $n \geq 1$ tel que $\forall P \in E, \forall a \in \mathbb{R}, f^n(P)(a) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{a+k}{2^n}\right)$. Par définition, comme $f^{n+1} = f^n \circ f$, on a $f^{n+1}(P)(a) = f^n(f(P))(a) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f(P)\left(\frac{a+k}{2^n}\right)$ par hypothèse de récurrence puis, par définition de f , $f^{n+1}(P)(a) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(P\left(\frac{a+k}{2^{n+1}}\right) + P\left(\frac{a+k+2^n}{2^{n+1}}\right)\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{a+k}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{a+k+2^n}{2^{n+1}}\right)$. En posant $j = k + 2^n$ dans la seconde somme, on a $\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{a+k+2^n}{2^{n+1}}\right) = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{a+j}{2^{n+1}}\right)$ donc, en changeant j en k et en regroupant les deux sommes, on arrive bien à $f^{n+1}(P)(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{a+k}{2^{n+1}}\right)$.

Par principe de récurrence, $\forall P \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R}, f^n(P)(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{a+k}{2^n}\right)$, cette formule étant même valable quand $n = 0$ car $f^0(P)(a) = P(a) = \frac{1}{2^0} \sum_{k=0}^{2^0-1} P\left(\frac{a+k}{2^0}\right)$ puisque $f^0 = \text{id}_E$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons la somme de RIEMANN $R_n(g) = \frac{1-0}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g\left(0 + k \frac{1-0}{n}\right)$ associée à $g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. D'après un théorème du cours, $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(g) = \int_0^1 g(t) dt$. D'après **a.**, $f^n(P)(0) = R_{2^n}(P)$. Comme $(R_{2^n}(P))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(R_n(P))_{n \in \mathbb{N}^*}$, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(P)(0) = \int_0^1 P(t) dt$.

c. Pour $x \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $f^n(P)(x) - f^n(P)(0) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(P\left(\frac{x+k}{2^n}\right) - P\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)$ donc, par inégalité triangulaire, $|f^n(P)(x) - f^n(P)(0)| \leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left|P\left(\frac{x+k}{2^n}\right) - P\left(\frac{k}{2^n}\right)\right|$. Par inégalité des accroissements finis, en posant $M = \|P'\|_{\infty, [0; 2]}$ qui existe puisque la P' est continue sur le segment $[0; 2]$ d'après le théorème des bornes atteintes, $\left|P\left(\frac{x+k}{2^n}\right) - P\left(\frac{k}{2^n}\right)\right| \leq \frac{Mx}{2^n}$ car $\left(\frac{x+k}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right) \in [0; 2]^2$. Ainsi, $|f^n(P)(x) - f^n(P)(0)| \leq \frac{2^n Mx}{2^{2n}} \leq \frac{M}{2^n}$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f^n(P)(x) - f^n(P)(0)) = 0$ dont on déduit que $\forall x \in [0; 1], \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(P)(x) = \int_0^1 P(t) dt$ en écrivant $f^n(P)(x) = (f^n(P)(x) - f^n(P)(0)) + f^n(P)(0)$. On peut donc affirmer que la suite de fonctions (polynomiales) $(f^n(P))_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction constante $c : x \mapsto \int_0^1 P(t) dt$ sur $[0; 1]$. D'ailleurs, avec ce

qui précède, $|f^n(P)(x) - c(x)| = |f^n(P)(x) - f^n(P)(0) + f^n(P)(0) - c(x)| \leq |f^n(P)(x) - f^n(P)(0)| + |f^n(P)(0) - c(x)|$
donc $|f^n(P)(x) - c(x)| \leq \frac{M}{2^n} + \left| f^n(P)(0) - \int_0^1 P(t) dt \right|$. Ainsi, $\|f^n(P) - c\|_{\infty, [0;1]} \leq \frac{M}{2^n} + \left| f^n(P)(0) - \int_0^1 P(t) dt \right|$
et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{M}{2^n} + \left| f^n(P)(0) - \int_0^1 P(t) dt \right| \right) = 0$ donc $(f^n(P))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers c sur $[0;1]$.

d. Comme $f(1) = 1$ et que $1 \neq 0$, 1 est valeur propre de f . Soit $P \in E_1(T)$, alors $f(P) = P$ donc, par une récurrence simple, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n(P) = P$. Ainsi, $\forall x \in [0;1]$, $P(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(P)(x) = \int_0^1 P(t) dt$ ce qui prouve que P est constant. Ainsi, $E_1(f) = \text{Vect}(1)$.

e. Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $|k| > 1$. Supposons qu'il existe $P \in E$ telle que $f(P) = kP$. Par une autre récurrence simple, il vient $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n(P) = k^n P$. Pour $x \in [0;1]$, comme $(f^n(P)(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge d'après **c.** et que $(k^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge, ceci impose que $P(x) = 0$ pour tout $x \in [0;1]$. Seule la fonction nulle est dans $E_k(f)$ donc k n'est pas valeur propre de f si $|k| > 1$. Par le même argument, comme $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge, on en déduit aussi que $E_{-1}(f) = \{0\}$ donc que -1 n'est pas valeur propre de T .

f. Pour $P \in E$, on a $f(P)' = \frac{1}{4} \left(P' \left(\frac{X}{2} \right) + P' \left(\frac{X+1}{2} \right) \right) = \frac{f(P)'}{2}$. Soit $P \in E_{1/2}(f)$, alors $f(P) = \frac{P}{2}$ donc $\frac{P'}{2} = f(P)' = \frac{f(P)'}{2}$ et $f(P)' = P'$ ce qui, d'après **e.**, montre que $P' \in \mathbb{R}_0[X]$ d'où $P \in \mathbb{R}_1[X]$. Réciproquement, si on pose $P = aX + b$, alors $P \in E$ et $f(P) = \frac{1}{2} \left(a \frac{X}{2} + b + a \frac{X+1}{2} + b \right) = \frac{aX}{2} + \frac{a}{4} + b = \frac{aX+b}{2} = \frac{P}{2}$ si et seulement si $a + 2b = 0$ ce qui montre que $P = b(1 - 2X)$. Ainsi, $E_{1/2}(f) = \text{Vect}(1 - 2X)$ et $\frac{1}{2} \in \text{Sp}(f)$.

48 a. Images des multiples : $\Psi(0_E) = \Psi(0_E + 0_E) = \Psi(0_E) + \Psi(0_E)$ donc $\Psi(0_E) = 0_E$. Ainsi, pour $x \in E$, on a $\Psi(0.x) = \Psi(0_E) = 0_E = 0.\Psi(x)$ mais aussi $\Psi(1.x) = 1.\Psi(x)$. Si, pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\Psi(n.x) = n.\Psi(x)$, alors $\Psi((n+1).x) = \Psi(n.x + x) = \Psi(n.x) + \Psi(x) = n.\Psi(x) + \Psi(x)$ par hypothèse de récurrence donc $\Psi((n+1).x) = (n+1).\Psi(x)$. On a établi par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Psi(n.x) = n.\Psi(x)$.

Continuité en 0_E : soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{M}{n} \leq \varepsilon$. Alors, en posant $\alpha = \frac{1}{n} > 0$, on a $\forall x \geq E$, $\|x\| \leq \alpha \implies \|n.x\| \leq 1 \implies \|\Psi(n.x)\| \leq M \iff n\|\Psi(x)\| \leq M \iff \|\Psi(x)\| \leq \frac{M}{n} \leq \varepsilon$. La fonction Ψ est bien continue en 0_E .

Continuité sur E : soit $x_0 \in E$, d'après l'équation fonctionnelle vérifiée par Ψ , $\Psi(x) - \Psi(x_0) = \Psi(x - x_0)$ pour $x \in E$. Par continuité de Ψ en 0_E , on a $\lim_{x \rightarrow x_0} \Psi(x - x_0) = \lim_{h \rightarrow 0_E} \Psi(h) = 0_E$ donc $\lim_{x \rightarrow x_0} (\Psi(x) - \Psi(x_0)) = 0_E$ ce qui montre $\lim_{x \rightarrow x_0} \Psi(x) = \Psi(x_0)$ et la continuité de Ψ en x_0 .

La fonction Ψ est donc continue sur E .

b. Pour tout vecteur $x \in E$, on sait déjà d'après la question **a.** que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Psi(n.x) = n.\Psi(x)$ donc $\Psi(0_E) = 0_E = \Psi(n.x + (-n).x) = \Psi(n.x) + \Psi((-n).x)$ puis $\Psi((-n).x) = -\Psi(n.x) = -n.\Psi(x) = (-n).\Psi(x)$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in E$, $\Psi(n.x) = n.\Psi(x)$. Pour $q \in \mathbb{N}^*$, en posant $y = \frac{1}{q}.x$, on a $\Psi(q.y) = q\Psi(y)$ donc $\Psi\left(\frac{1}{q}.x\right) = \frac{1}{q}.\Psi(x)$ et, pour $p \in \mathbb{Z}$, on a $\Psi\left(\frac{p}{q}.x\right) = \Psi\left(p.\left(\frac{1}{q}.x\right)\right) = p.\left(\Psi\left(\frac{1}{q}.x\right)\right) = \frac{p}{q}.\Psi(x)$. Par conséquent, on a $\forall r \in \mathbb{Q}$, $\Psi(r.x) = r.\Psi(x)$. Reste à passer des rationnels aux réels.

Pour tout réel λ , si on pose $\alpha_n = \frac{\lfloor n\lambda \rfloor}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, par définition de la partie entière, $n\lambda - 1 < \lfloor n\lambda \rfloor \leq n\lambda$

donc $\lambda - \frac{1}{n} < a_n \leq \lambda$ et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lambda$ par encadrement. Comme $\|a_n \cdot x - \lambda \cdot x\| = |a_n - \lambda| \|x\|$, on a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot x = \lambda \cdot x$ puis, par continuité de Ψ , on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Psi(a_n \cdot x) = \Psi(\lambda \cdot x)$. Or $\Psi(a_n \cdot x) = a_n \cdot \Psi(x)$ car a_n est un rationnel donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Psi(a_n \cdot x) = \lambda \cdot \Psi(x)$. Par unicité de la limite, il vient $\Psi(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot \Psi(x)$. Ceci étant valable pour tout réel λ et tout vecteur $x \in E$, et comme on a déjà $\forall (x, y) \in E^2, \Psi(x+y) = \Psi(x) + \Psi(y)$ par hypothèse, on peut conclure que Ψ est un endomorphisme de E .

49

50 a. Par l'absurde, soit un vecteur colonne $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul de $\text{Ker}(A)$, alors $Ax = 0$ et $x \neq 0$, soit un indice $m \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $|x_m| = \|x\|_\infty = \text{Max}_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} (|x_i|) > 0$. La m -ième ligne de Ax donne la relation

$$\sum_{j=1}^n a_{m,j} x_j = 0 \text{ ou } a_{m,m} x_m = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^n a_{m,j} x_j. \text{ Ainsi, } |a_{m,m} x_m| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^n a_{m,j} x_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^n |a_{m,j}| |x_j| \text{ par inégalité triangulaire donc } |a_{m,m}| |x_m| \leq \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^n |a_{m,j}| \right) |x_m|. \text{ En divisant par } |x_m| > 0, \text{ on obtient } |a_{m,m}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^n |a_{m,j}|$$

qui contredit l'énoncé. Par conséquent, $\text{Ker}(A) = \{0\}$ donc, comme A est carrée, A est inversible.

b. Soit $(u, v) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ tel que $Ev = Fu$ et $u \neq 0$. Pour tout indice $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, comme $[Ev]_i = [Fu]_i$, on a la relation $\sum_{k=i}^n a_{i,k} v_k + \sum_{k=1}^{i-1} a_{i,k} u_k = 0$.

Initialisation : pour $i = n$, $a_{n,n} v_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_{n,k} u_k = 0$ donc $|v_n| \leq \frac{1}{|a_{n,n}|} \sum_{k=1}^{n-1} |a_{n,k}| |u_k| \leq \frac{\|u\|_\infty}{|a_{n,n}|} \sum_{k=1}^{n-1} |a_{n,k}|$ par inégalité triangulaire, ce qui donne $|v_n| < \|u\|_\infty$ car A est à diagonale strictement dominante.

Hérédité : soit $\ell \in \llbracket 2; n \rrbracket$ pour lequel on a montré que $\forall i \in \llbracket \ell; n \rrbracket, |v_i| < \|u\|_\infty$. Comme on a la relation $\sum_{k=\ell-1}^n a_{\ell-1,k} v_k + \sum_{k=1}^{\ell-2} a_{\ell-1,k} u_k = 0$, il vient $|v_{\ell-1}| \leq \frac{1}{|a_{\ell-1,\ell-1}|} \left(\sum_{k=1}^{\ell-2} |a_{\ell-1,k}| |u_k| + \sum_{k=\ell}^n |a_{\ell-1,k}| |v_k| \right)$ par inégalité triangulaire donc, par hypothèse de récurrence, $|v_{\ell-1}| \leq \frac{\|u\|_\infty}{|a_{\ell-1,\ell-1}|} \cdot \sum_{k=1, k \neq \ell-1}^n |a_{\ell-1,k}| < \|u\|_\infty$ car A est à diagonale strictement dominante.

Conclusion : par récurrence forte, finie et descendante, $\forall \ell \in \llbracket 1; n \rrbracket, |v_\ell| < \|u\|_\infty$ donc $\|v\|_\infty < \|u\|_\infty$.

c. Avec les notations de la question précédente, comme $\forall \ell \in \llbracket 1; n \rrbracket, \alpha_\ell = \frac{1}{|a_{\ell,\ell}|} \cdot \sum_{j=1, j \neq \ell}^n |a_{\ell,j}| < 1$, on peut poser $k = \text{Min}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) < 1$. Reprenons $(u, v) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ tel que $Ev = Fu$ et $u \neq 0$. À nouveau, $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, [Ev]_i = [Fu]_i$ donc $\sum_{j=i}^n a_{i,j} v_j + \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} u_j = 0$.

Initialisation : pour $i = n$, $a_{n,n} v_n + \sum_{j=1}^{n-1} a_{n,j} u_j = 0$ donc $|v_n| \leq \frac{1}{|a_{n,n}|} \sum_{j=1}^{n-1} |a_{n,j}| |u_j| \leq \frac{\|u\|_\infty}{|a_{n,n}|} \sum_{k=1}^{n-1} |a_{n,k}|$ par inégalité triangulaire, ce qui donne $|v_n| \leq k \|u\|_\infty$ car A est à diagonale strictement dominante.

Hérédité : soit $\ell \in \llbracket 2; n \rrbracket$ pour lequel on a montré que $\forall i \in \llbracket \ell; n \rrbracket, |v_i| \leq k \|u\|_\infty$. Comme on a la relation $\sum_{j=\ell-1}^n a_{\ell-1,j} v_j + \sum_{j=1}^{\ell-2} a_{\ell-1,j} u_j = 0$, il vient $|v_{\ell-1}| \leq \frac{1}{|a_{\ell-1,\ell-1}|} \left(\sum_{j=1}^{\ell-2} |a_{\ell-1,j}| |u_j| + \sum_{j=\ell}^n |a_{\ell-1,j}| |v_j| \right)$ par inégalité triangulaire donc, par hypothèse de récurrence, $|v_{\ell-1}| \leq \frac{\|u\|_\infty}{|a_{\ell-1,\ell-1}|} \cdot \sum_{j=1, j \neq \ell-1}^n |a_{\ell-1,j}| \leq k \|u\|_\infty$ car A est à diagonale strictement dominante.

Conclusion : par récurrence forte, finie et descendante, $\forall \ell \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $|v_\ell| \leq k \|u\|_\infty$ donc $\|v\|_\infty \leq k \|u\|_\infty$.

d. La matrice E est inversible car elle est triangulaire supérieure avec des termes non nuls sur la diagonale donc la bonne définition de la suite est $x_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\forall p \in \mathbb{N}$, $x_{p+1} = E^{-1}(Fx_p + b)$ et, sous cette forme, il est clair que la suite $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est bien définie quelle que soit la valeur de x_0 .

e. Si la suite $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers x , par linéarité de E et F en dimension finie, comme E et F sont donc continues sur \mathbb{R}^n , on a $\lim_{p \rightarrow +\infty} Ex_p = Ex$ et $\lim_{p \rightarrow +\infty} Fx_p = Fx$ donc on a $Ex = Fx + b$, soit $Ax = b$ car $A = E - F$ et $x = A^{-1}b$. Montrons que $\lim_{p \rightarrow +\infty} x_p = A^{-1}b$. Posons $y_p = x_p - A^{-1}b$ pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, de sorte que $\forall p \in \mathbb{N}$, $E(y_{p+1} + A^{-1}b) = F(x_p + A^{-1}b) + b$ mais, comme $EA^{-1}b = FA^{-1}b + b$ car $A = E - F$, on en déduit que $Ey_{p+1} = Fy_p$. Par une récurrence facile, comme d'après la question **c.** on a $\|y_{p+1}\| \leq k \|y_p\|$ (ceci étant vrai même si $y_p = 0$ car alors on aurait $y_{p+1} = 0$), on a $\forall p \in \mathbb{N}$, $\|y_p\| \leq k^p \|y_0\|$. Ainsi, comme $k < 1$, par encadrement, il vient $\lim_{p \rightarrow +\infty} y_p = 0$ donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} x_p = A^{-1}b$, et ceci quelle que soit la valeur de x_0 .

Il s'agit de l'algorithme de GAUSS-SIEDEL.

51

52 a. On dit que f est bornée sur Ω s'il existe un réel $M \geq 0$ tel que $\forall x \in \Omega$, $|f(x)| \leq M$.

b. On dit que f admet un maximum (en $x_0 \in \Omega$) sur Ω s'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $\forall x \in \Omega$, $f(x) \leq f(x_0)$.

c. Si $x \in \mathbb{R}$, $s(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin(x)$ par EULER donc s est bornée sur \mathbb{R} car $\forall x \in \mathbb{R}$, $|s(x)| \leq 1$. Par contre, si $y \in \mathbb{R}$, on a $s(iy) = \frac{e^{-y} - e^y}{2i} = i \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \text{sh}(y)$ et on sait que $\lim_{y \rightarrow +\infty} \text{sh}(y) = +\infty$ donc s n'est pas bornée sur $i\mathbb{R}$. A fortiori, s n'est pas bornée sur \mathbb{C} .

d. Pour $z \in D$, on peut écrire $z = re^{i\theta} \in D$ avec $r \in [0; 1]$ et $\theta \in \mathbb{R}$, ce qui donne $\varphi(z) = \left| \frac{e^{ire^{i\theta}} - e^{-ire^{i\theta}}}{2} \right|^2$ donc $\varphi(z) = \left| \frac{e^{ir \cos(\theta)} e^{-r \sin(\theta)} - e^{-ir \cos(\theta)} e^{r \sin(\theta)}}{2} \right|^2 \leq \left(\frac{e^{-r \sin(\theta)} + e^{r \sin(\theta)}}{2} \right)^2 \leq \text{ch}(r)^2 \leq \text{ch}(1)^2$.

Ainsi, φ est bornée sur D et $\|\varphi\|_{\infty, D} \leq \text{ch}(1)^2$.

e. La fonction s est continue sur \mathbb{C} par composition car les fonctions $z \mapsto iz$, $z \mapsto -iz$ et $z \mapsto e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ sont continues sur \mathbb{C} , les deux premières car elles sont 1-lipschitziennes (par exemple) ou linéaires en dimension finie et, en posant $u_n : z \mapsto \frac{z^n}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\|u_n\|_{\infty, B_f(0, r)} = \frac{r^n}{n!}$ si $r > 0$ donc $\sum_{n \geq 0} u_n$

converge normalement sur toute boule fermée $B_f(0, r)$ et les u_n sont continues comme fonctions polynomiales.

Ainsi, comme $z \mapsto |z|$ est continue sur \mathbb{C} car 1-lipschitzienne et $t \mapsto t^2$ est continue sur \mathbb{R} car polynomiale, la fonction φ est continue sur \mathbb{C} par composition. Comme φ est continue sur $D \subset \mathbb{C}$ et que D est un fermé borné en dimension finie, avec le théorème des bornes atteintes, φ est bornée et atteint ses bornes sur D .

Pour $z \in D$, $\varphi(z) = \left| \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right|^2 = \left| \frac{1}{2i} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} \right) \right|^2 = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right|^2$ car, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $(i)^{2n} - (-i)^{2n} = 0$ et $(i)^{2n+1} - (-i)^{2n+1} = 2i(-1)^n$. Comme cette série converge absolument par le lemme d'ABEL car le rayon de convergence de la série entière exponentielle vaut $+\infty$, $\varphi(z) \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)^2 = \text{sh}(|z|)^2 \leq \text{sh}(1)^2$. Mieux qu'en question **d.**, $\|\varphi\|_{\infty, D} \leq \text{sh}(1)^2$. Si $|z| < 1$, on a $|\varphi(z)| < \text{sh}(1)$ car sh est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ donc le maximum de $|\varphi|$ est atteint sur \mathbb{U} .

Pour que $|1 + iz| = 1 + |z|$, il est nécessaire et suffisant que 1 et iz soient positivement alignés, donc que z soit un imaginaire pur. Ainsi, si $z \in \mathbb{U}$ n'est pas un imaginaire pur, on a $|1 + iz| < 1 + |z|$ donc $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| \leq |1 + iz| + \left| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| < 1 + |z| + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!} = \text{sh}(|z|)$ et $\varphi(z) < \text{sh}(1)^2$. Les deux seuls imaginaires purs de \mathbb{U} sont $\pm i$ et $\varphi(i) = \text{sh}(1)$ et $\varphi(-i) = -\text{sh}(1)$ donc $|\varphi(i)| = |\varphi(-i)| = \text{sh}(1)^2$. Par conséquent, $\|\varphi\|_{\infty, D} \leq \text{sh}(1)^2$ et φ atteint son maximum sur D en i ou $-i$ uniquement.

53 On peut constater que, par une récurrence simple, et pour tout $a > 0$, tous les termes de la suite $(u_n(a))_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont bien définis et strictement positifs.

a. (\implies) Si $a \in E_\infty$, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(a) = +\infty$ par définition, pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq n_0, u_n(a) \geq A$. En prenant $A = 1$, il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq n_0, u_n(a) \geq 1$. Par exemple, pour $n = n_0$, on a bien $u_{n_0}(a) \geq 1$.

(\impliedby) S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n_0}(a) \geq 1$, montrons par récurrence que $\forall n \geq n_0, u_{n+1}(a) > u_n(a) \geq 1$.

Initialisation : $u_{n_0+1}(a) - u_{n_0}(a) = u_{n_0}(a)(u_{n_0}(a) - 1) + \frac{1}{n_0+1}$ et $u_{n_0}(a)(u_{n_0}(a) - 1) \geq 0$ alors que

$\frac{1}{n_0+1} > 0$ donc, par somme $u_{n_0+1}(a) - u_{n_0}(a) > 0$ et $u_{n_0+1}(a) > u_{n_0}(a) \geq 1$.

Hérédité : si $u_{n+1}(a) > u_n(a) \geq 1$ pour $n \geq n_0$, $u_{n+2}(a) - u_{n+1}(a) = u_{n+1}(a)(u_{n+1}(a) - 1) + \frac{1}{n+2}$,

on a encore $u_{n+2}(a) - u_{n+1}(a) > 0$ avec les mêmes arguments donc $u_{n+2}(a) > u_{n+1}(a) \geq 1$.

Par principe de récurrence, on a bien $\forall n \geq n_0, u_{n+1}(a) > u_n(a)$ donc la suite $(u_n(a))_{n \geq n_0}$ est croissante.

Si elle convergeait vers un réel ℓ , en passant à la limite dans $u_{n+1}(a) = u_n^2(a) + \frac{1}{n+1}$, on aurait $\ell^2 = \ell$ donc

$\ell = 0$ ou $\ell = 1$, ce qui contredit le fait que $u_{n_0+1}(a) > 1$ et que la suite $(u_n(a))_{n \geq n_0}$ est croissante. Ainsi, par le théorème de la limite monotone, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(a) = +\infty$ donc $a \in E_\infty$.

b. Initialisation : on a $u_1 : a \mapsto a$ donc la fonction u_1 est croissante sur \mathbb{R}_+^* .

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que u_n est croissante sur \mathbb{R}_+^* , alors $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{1}{n+1}$ donc, comme u_n est positive, on a u_n^2 croissante car $t \mapsto t^2$ est croissante sur \mathbb{R}_+ donc u_{n+1} croissante sur \mathbb{R}_+^* .

Conclusion : par principe de récurrence, toutes les fonctions u_n sont croissantes sur \mathbb{R}_+^* .

Ainsi, si $(a, b) \in E_\infty^2$ avec $a < b$ et si on prend $c \in [a; b]$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n(a) \leq u_n(c) \leq u_n(b)$. Mais, par définition, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(a) = +\infty$ donc, par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(c) = +\infty$. Par conséquent, E_∞ est un intervalle car si $(a, b) \in E_\infty^2$ avec $a < b$, on a $[a; b] \subset E_\infty$.

De plus, si $a \in [1; +\infty[$, $u_1(a) = a \geq 1$ donc, d'après **a.**, $a \in E_\infty$, ce qui montre l'inclusion $[1; +\infty[\subset E_\infty$.

c. Initialisation : $u_1 = \text{id}_{\mathbb{R}_+^*} : t \mapsto t$ donc u_1 est polynomiale de degré $1 = 2^0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que u_n soit une fonction polynomiale de degré 2^n . La relation $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{1}{n+1}$ montre que u_{n+1} est polynomiale et que $\deg(u_{n+1}) = 2 \deg(u_n) = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$.

Par principe de récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est une fonction polynomiale de degré 2^n sur \mathbb{R}_+^* donc elle y est continue. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a > 0, u_n(b) \xrightarrow{b \rightarrow a} u_n(a)$.

d. D'après la question **a.**, $E_\infty = \bigcup_{n=1}^{+\infty} u_n^{-1}([1; +\infty[)$. Dommage, car $[1; +\infty[$ est un fermé de \mathbb{R} donc, par continuité de u_n , $u_n^{-1}([1; +\infty[)$ est un fermé de \mathbb{R} . Mais on ne peut rien dire de la réunion infinie de fermés.

En reprenant la question **a.** avec > 1 à la place de ≥ 1 , on se rend compte facilement qu'on a aussi l'équivalent $a \in E_\infty \iff (\exists n \in \mathbb{N}^*, u_n(a) > 1)$. Ceci prouve que $E_\infty = \bigcup_{n=1}^{+\infty} u_n^{-1}(]1; +\infty[)$. Maintenant, comme $]1; +\infty[$ est un ouvert et que u_n est continue, $u_n^{-1}(]1; +\infty[)$ est un ouvert donc E_∞ , en tant que réunion d'ouverts, est un ouvert. Par conséquent, E_∞ est un intervalle ouvert de \mathbb{R}_+^* .

54

55

56 On va d'abord montrer que pour $A \subset \mathbb{R}$, (A dense dans \mathbb{R}) $\iff (\forall [\alpha; \beta], \alpha < \beta \implies (\exists a \in A, a \in [\alpha; \beta]))$.

(\implies) Si A est dense, $\bar{A} = \mathbb{R}$ donc tout réel est la limite d'une suite d'éléments de A . Soit $[\alpha; \beta]$ avec $\alpha < \beta$, en posant par exemple $x_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}$, il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x_0$. En prenant $\varepsilon = \frac{\beta - \alpha}{2} > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |a_n - x_0| \leq \varepsilon \iff a_n \in [\alpha; \beta]$. Ainsi, $a_{n_0} \in A \cap [\alpha; \beta]$.

(\impliedby) Supposons que $A \cap [\alpha; \beta] \neq \emptyset$ dès que $\alpha < \beta$. Soit un réel x_0 et $n \in \mathbb{N}$, prenons $\alpha_n = x_0 - \frac{1}{2^n}$ et $\beta_n = x_0 + \frac{1}{2^n} > \alpha_n$, alors il existe $a_n \in [\alpha_n; \beta_n] \cap A$ et l'encadrement $-\frac{1}{2^n} \leq x_0 - a_n \leq \frac{1}{2^n}$ montre que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers x_0 . Ainsi, $\bar{A} = \mathbb{R}$ et A est dense dans \mathbb{R} . On a montré par double inclusion que (A dense dans \mathbb{R}) $\iff (\forall [\alpha; \beta], \alpha < \beta \implies (\exists a \in A, a \in [\alpha; \beta]))$.

Montrons que $A = \{f(m) - f(n) \mid (m, n) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans \mathbb{R} . Soit un segment $[\alpha; \beta] \subset \mathbb{R}$ non réduit à un point. On cherche un élément de A dans $[\alpha; \beta]$. Traitons plusieurs cas :

$\alpha \leq 0 \leq \beta$ Prenons $n = m = 0$, alors $0 = f(0) - f(0) \in A \in [\alpha; \beta]$.

$0 < \alpha < \beta$ Posons $\varepsilon = \beta - \alpha > 0$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \geq M, |f'(x)| \leq \varepsilon$. Posons $n = [M] + 1 \in \mathbb{N}$ et $m = \text{Min}(\{k \geq n \mid f(k) \geq f(n) + \alpha\})$. Cet entier m existe bien par propriété fondamentale de \mathbb{N} car la partie $X = \{k \geq n \mid f(k) \geq f(n) + \alpha\} \subset \mathbb{N}$ est non vide puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Montrons que $f(m) - f(n) \in [\alpha; \beta]$:

- Comme $m \in X$, on a $f(m) \geq f(n) + \alpha$ donc $f(m) - f(n) \geq \alpha$.
- On ne peut pas avoir $m = n$ car on aurait $f(m) - f(n) = 0$ contredisant $f(m) - f(n) \geq \alpha > 0$. Ainsi, $m > n$ donc $m - 1 \geq n$ et, par minimalité de m , $m - 1 \notin X$ donc $f(m - 1) < f(n) + \alpha$. D'après le théorème des accroissements finis, comme f est dérivable sur $[m - 1; m]$, il existe un réel $c \in]m - 1; m[$ tel que $f(m) - f(m - 1) = f'(c)(m - (m - 1)) = f'(c)$. Or $c > m - 1 \geq n$ donc $|f'(c)| \leq \varepsilon$ et $f(m) = f(m - 1) + f'(c) < f(n) + \alpha + \varepsilon = f(n) + \beta$ d'où $f(m) - f(n) \leq \beta$.

Le réel $f(m) - f(n)$ appartient donc à $[\alpha; \beta]$ et aussi à A par construction car $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.

$\alpha < \beta < 0$ D'après le cas précédent, comme $0 < -\beta < \alpha$, $A \cap [-\beta; -\alpha] \neq \emptyset$ donc il existe $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $f(m) - f(n) \in [-\beta; -\alpha]$ et $f(n) - f(m) = -(f(m) - f(n)) \in A \cap [\alpha; \beta]$.

Ainsi, $A = \{f(m) - f(n) \mid (m, n) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans \mathbb{R} car $A \cap [\alpha; \beta]$ est non vide dès que $\alpha < \beta$.

57 **a.** Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \langle u(x), x \rangle$. On peut décomposer $f = g \circ h$ avec $h : E \rightarrow \mathbb{E}^2$ définie par $h(x) = (u(x), x)$ qui est linéaire donc continue en dimension finie et $g : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = \langle x, y \rangle$

qui est bilinéaire en dimension finie donc continue. Par composition, f est donc continue sur E . Comme la sphère unité $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ est un fermé borné de E en dimension finie, la fonction f étant continue sur S , elle y est bornée et y atteint ses bornes par le théorème des bornes atteintes. Par conséquent, il existe un vecteur unitaire $x_0 \in S$ tel que $\forall x \in S, f(x) = \langle u(x), x \rangle \geq \langle u(x_0), x_0 \rangle = f(x_0)$.

b. Pour $t \in \mathbb{R}, \|\gamma(t)\|^2 = \|\cos(t)x_0 + \sin(t)y_0\|^2 = \|\cos(t)x_0\|^2 + \|\sin(t)y_0\|^2$ par PYTHAGORE car $x_0 \perp y_0$ et, comme x_0 et y_0 sont unitaires, on a $\|\gamma(t)\|^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ donc $\|\gamma(t)\| = 1$.

c. $\forall t \in \mathbb{R}, \phi(t) = \cos^2(t) \langle u(x_0), x_0 \rangle + 2\cos(t)\sin(t) \langle u(x_0), y_0 \rangle + \sin^2(t) \langle u(y_0), y_0 \rangle$ par linéarité de u , bilinéarité du produit scalaire et car u est autoadjoint donc ϕ est de classe C^1 sur \mathbb{R} où elle est π -périodique. De plus, $\forall t \in \mathbb{R}, \phi(t) = \langle u(\gamma(t)), \gamma(t) \rangle \geq \langle u(x_0), x_0 \rangle$ d'après **a.** et **b.** donc $\forall t \in \mathbb{R}, \phi(t) \geq \phi(0)$. Comme ϕ est dérivable en 0 où elle admet un minimum absolu, $\phi'(0) = 0$.

d. D'après l'expression de **c.**, $\phi'(t) = \sin(2t)(\langle u(y_0), y_0 \rangle - \langle u(x_0), x_0 \rangle) + 2\cos(2t) \langle u(x_0), y_0 \rangle$ pour tout t réel donc $\phi'(0) = 2 \langle u(x_0), y_0 \rangle = 0$. On a bien montré que $y_0 \perp u(x_0)$.

e. Soit l'hyperplan $H = \text{Vect}(x_0)^\perp$ et soit y_0 un vecteur unitaire quelconque de H , alors $u(x_0) \perp y_0$ d'après la question **d.** donc $u(x_0) \in H^\perp = \text{Vect}(x_0)$, ce qui signifie qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u(x_0) = \lambda x_0$, donc que x_0 est un vecteur propre de u .

f. Soit $x \in F^\perp$ et $y \in F$, alors $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$ car u est autoadjoint donc, comme $u(y) \in F$ car F est stable par u et que $x \in F^\perp$, on a $\langle u(x), y \rangle = 0$. Comme ceci est vrai pour tout vecteur $y \in F$, on a bien $u(x) \in F^\perp$, donc F^\perp est aussi stable par u .

g. On démontre le théorème spectral par récurrence sur la dimension n de E , et sous la forme suivante : pour tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien de dimension n , il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u .

Initialisation : soit E un espace euclidien de dimension 1 et u un endomorphisme autoadjoint de E , alors u est une homothétie de E comme tout endomorphisme en dimension 1 ; toute base orthonormale de E est une base de E formée de vecteurs propres de u .

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons le résultat prouvé pour des espaces euclidiens de dimension $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Soit E un espace euclidien de dimension $n + 1$ et u un endomorphisme autoadjoint de E . D'après **e.**, il existe un vecteur propre x_0 de u associé à une valeur propre réelle λ . Posons $F = E_\lambda(u)$. On sait que $\dim(F) \geq 1$.

Traisons deux cas :

- Si $F = E, u = \lambda \text{id}_E$ donc toute base orthonormale de E est une base formée de vecteurs propres de u .
- Si $F \neq E$, on a $\dim(F) \leq n$, comme F est stable par $u, G = F^\perp$ est aussi stable par u d'après **f.** et $\dim(G) = n + 1 - \dim(F) \geq 1$. Or u induit dans G un endomorphisme autoadjoint de G d'où, par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormale \mathcal{B}_G de G formée de vecteurs propres de u_G , donc de u . En prenant une base orthonormale \mathcal{B}_F de F , ses vecteurs sont des vecteurs propres de u donc $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \amalg \mathcal{B}_G$ est une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u .

Par principe de récurrence forte, pour tout endomorphisme autoadjoint u sur un espace euclidien E , il existe une base orthonormale \mathcal{B} de E formée de vecteurs propres de u . On vient de montrer, d'une manière

totalément différente de celle du cours, le fameux théorème spectral.

58

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 5

RÉDUCTION

59 a. Par hypothèse, il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $MX = \lambda X$. Or $M^2X = M(MX) = M(\lambda X) = \lambda MX = \lambda^2 X$

et, par une récurrence classique, $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k X = \lambda^k X$. Si on écrit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, $P(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k M^k$ donc

$P(M)X = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k M^k X = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \lambda^k \right) X = P(\lambda)X$. Ainsi, comme $X \neq 0$, $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(M)$.

b. Avec $b = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, $b^2 = \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 1 - b$ donc b est racine du polynôme $P = X^2 + X - 1$ qui est bien à coefficients dans \mathbb{Z} . Ainsi, b est algébrique.

c. Les quatre coordonnées de X sont $1, b, z, bz$ et $z \cdot 1 = z$, $z \cdot b = bz$, $z \cdot z = z^2 = -bz - 1$ car z est racine de $X^2 + bX + 1$ et $z \cdot (bz) = bz^2 = b(-bz - 1) = -(1 - b)z - b = -b - z + bz$. Ainsi, si on définit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ on a } MX = z \cdot X, \text{ ce qui prouve, comme } X \neq 0, \text{ que } z \text{ est valeur propre de } M$$

avec pour vecteur propre associé le vecteur X . On sait que z est alors racine de χ_M et un calcul direct donne $\chi_M = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$ qui est à coefficients dans \mathbb{Z} donc z est un nombre algébrique.

d. $\chi_M = \begin{vmatrix} X & 3 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ -1 & 1 & X+2 \end{vmatrix} = X^2(X+2) + 3 + X$ avec SARRUS donc $\chi_M = X^3 + 2X^2 + X + 3$. Par hypothèse,

a est donc une racine (éventuellement complexe) de χ_M donc a est une valeur propre de M . D'après la question a., en posant $Q = X^2 + X - 1$, $Q(a)$ est valeur propre de $Q(M) = M^2 + M - I_3$. Après

calculs, on a $Q(M) = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et, à nouveau avec la formule de SARRUS, on parvient à la relation

$$P = \chi_{Q(M)} = \begin{vmatrix} X+1 & 3 & 3 \\ -1 & X+2 & 1 \\ 1 & 2 & X \end{vmatrix} = X(X+1)(X+2) + 3 - 6 - 2(X+1) - 3(X+2) + 3X \text{ qui se simplifie en}$$

$P = X^3 + 3X^2 - 11$ donc $P(a^2 + a - 1) = 0$, ce qui prouve que $a^2 + a - 1$ est aussi algébrique car $P \in \mathbb{Z}[X]$.

60

61 a. Soit $N \in \mathcal{C}_M$, $\exists P \in GL_2(\mathbb{R})$, $N = PMP^{-1}$ et $\text{Tr}(N) = \text{Tr}(PMP^{-1}) = \text{Tr}((MP)P^{-1}) = \text{Tr}(P^{-1}(MP))$ par

propriété de la trace donc $\text{Tr}(N) = \text{Tr}((P^{-1}P)M) = \text{Tr}(M)$. De plus, par multiplicativité du déterminant des matrices carrées, $\det(N) = \det(PMP^{-1}) = \det(P)\det(M)\det(P^{-1}) = \det(M)$ car $\det(P^{-1}) = \frac{1}{\det(P)}$. La

réciproque est fautive comme le montrent les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui ont même trace (0) et même déterminant (0) mais qui ne sont pas semblables car A est de rang 1 et B de rang 0.

b. Comme A est trigonalisable et pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, χ_A est scindé sur \mathbb{R} mais pas à racines simples donc il existe un réel a tel que $\chi_A = (X - a)^2$. Comme A est trigonalisable, la matrice A est semblable

à $T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$. Si on prend $P_n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$, on a $P_n^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $M_n = P_n A P_n^{-1} = \begin{pmatrix} a & 2^{-n}b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C_A^{\mathbb{N}}$ est non bornée car $\|M_n\|_{\infty} \geq 2^n |b|$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n |b| = +\infty$.

Comme $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie, toutes les normes sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont équivalentes donc l'aspect borné de C_A ne dépend pas de la norme employée. De plus, si on prend les matrices $Q_n = P_n^{-1} A P_n \in C_A$, on a $Q_n = \begin{pmatrix} a & 2^{-n}b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ donc, en regardant case par case, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = D$ qui n'est pas dans C_A car A n'est pas diagonalisable alors que D l'est, la diagonalisabilité se conservant par similitude. Comme une suite d'éléments de C_A converge dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mais pas vers un élément de C_A , C_A n'est fermé.

c. Si A est diagonalisable, on a soit $\chi_A = (X - a)^2$ avec un réel a et alors A est semblable à aI_2 donc il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $A = P(aI_2)P^{-1} = aI_2$, soit $\chi_A = (X - a)(X - b)$ avec deux réels $a \neq b$ et A est semblable à $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

- Si $A = aI_2$ est une matrice d'homothétie, et si $M \in C_A$, comme avant, on a $M = A$ donc $C_A = \{aI_2\}$ est un singleton donc C_A est à la fois fermé et borné.

- Si $\text{Sp}(A) = \{a, b\}$ avec $a \neq b$, alors A est semblable à $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et toutes les matrices de C_A sont aussi semblables à D . Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (C_A)^{\mathbb{N}}$ une suite de matrices de C_A qui converge vers une matrice M . D'après **a.**, $\text{Tr}(A_n) = \text{Tr}(A) = \text{Tr}(D) = a + b$ et $\det(A_n) = \det(A) = \det(D) = ab$. Par continuité de l'application linéaire Tr en dimension finie, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Tr}(A_n) = \text{Tr}(M) = a + b$. De même, par continuité de l'application polynomiale \det (par rapport aux coefficients de la matrice) en dimension finie (ou par multilinéarité de \det), on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \det(A_n) = \det(M) = ab$. Par conséquent, $\chi_M = X^2 - \text{Tr}(M)X + \det(M) = X^2 - (a + b)X + ab = (X - a)(X - b)$. Comme χ_M est scindé à racines simples, M est semblable à D , donc $M \in C_A$. Ainsi, C_A est fermé. Par contre, $B_n = \begin{pmatrix} a & n \\ 0 & b \end{pmatrix}$ vérifie $\chi_{B_n} = (X - a)(X - b)$ donc, à nouveau, $B_n \in C_A$ mais $\|B_n\|_{\infty} \geq n$ donc C_A n'est pas borné.

62

63

64

65 a. La famille $\mathcal{F} = (u_0, \dots, u_{n-1})$ comporte n vecteurs dans \mathbb{C}^n qui est de dimension n . La matrice $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ de la famille \mathcal{F} dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de \mathbb{C}^n est, par définition, la matrice de VANDERMONDE $P = (\omega_{i-1}^{j-1})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comme les $\omega_0, \dots, \omega_{n-1}$ sont les n racines n -ièmes de l'unité et qu'elles sont distinctes, on sait qu'alors $\det(P) = \prod_{0 \leq i < j \leq n-1} (\omega_j - \omega_i) \neq 0$ donc P est inversible.

On en conclut que \mathcal{F} est une base de E .

b. Avec la question précédente, on est amené à calculer $J u_p = (\omega_1^p \ \omega_2^p \ \dots \ \omega_{n-1}^p \ \omega_0^p) = \omega_1^p u_p = \omega_p u_p$ pour $p \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. Comme $u_p \neq 0_E$, u_p est un vecteur propre associé à la valeur propre ω_p . Ainsi, il existe une base de E composée de vecteurs propres de J , ce qui prouve que J est diagonalisable et que $J = PDP^{-1}$

avec $D = \text{diag}(\omega_0 = 1, \omega_1, \dots, \omega_{n-1})$. On aurait pu calculer le polynôme caractéristique de J , et trouver sans trop de difficultés $\chi_J = X^n - 1$ pour se lancer sur les recherches des sous-espaces propres associés.

c. La forme classique des matrices J^k se trouve par récurrence, et on peut écrire $C(a_0, \dots, a_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k$.

Or, d'après la question précédente, $J^k = P D^k P^{-1}$ donc $C(a_0, \dots, a_{n-1}) = P \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k \right) P^{-1}$. Comme

$D(a_0, \dots, a_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k$ est diagonale, on peut conclure que $C(a_0, \dots, a_{n-1})$ est diagonalisable et

que son polynôme caractéristique vaut celui de $D(a_0, \dots, a_{n-1})$, donc $\chi_{C(a_0, \dots, a_{n-1})} = \prod_{j=0}^{n-1} \left(X - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega_j^k \right)$.

Ainsi, $\text{Sp}(C(a_0, \dots, a_{n-1})) = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega_0^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k, \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega_1^k, \dots, \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega_{n-1}^k \right\}$ (avec répétition éventuelle).

66 a. $\chi_f = \chi_A = \begin{vmatrix} X & 1 & 0 & 0 \\ -1 & X & 0 & 0 \\ 0 & -1 & X & 2 \\ 0 & 0 & -1 & X \end{vmatrix}$ qui, par blocs, devient $\chi_f = \begin{vmatrix} X & 1 \\ -1 & X \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X & 2 \\ -1 & X \end{vmatrix} = (X^2 + 1)(X^2 + 2)$. Comme

χ_f n'a aucune racine réelle, f n'est pas diagonalisable car χ_f n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

b. S'il existait une droite $D = \text{Vect}(e)$ stable par f , on aurait $f(e) \in D$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $f(e) = \lambda e$ et e serait un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ . Alors λ serait racine de χ_f ce qui est impossible car les racines de χ_f sont dans $\{i, -i, 2i, -2i\}$. Par conséquent, il n'existe aucune droite de \mathbb{R}^4 stable par f .

c. S'il existait un hyperplan H de \mathbb{R}^4 stable par f , en prenant une base $\mathcal{B}' = (a, b, c)$ de H qu'on complète en une base $\mathcal{B} = (a, b, c, d)$ de \mathbb{R}^4 , comme H est stable par f , on aurait $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par blocs, on aurait alors $\chi_f = \chi_A = (X - \lambda)\chi_B$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ serait racine de χ_f ce qui est à nouveau impossible. Ainsi, il n'existe aucun hyperplan de \mathbb{R}^4 stable par f .

d. Comme f et $f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^4}$ commutent car $f \circ (f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^4}) = (f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^4}) \circ f = f^3 + f$, on sait d'après le cours que $\text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^4})$ est stable par f . De même, f et $f^2 + 2\text{id}_{\mathbb{R}^4}$ commutent donc $\text{Ker}(f^2 + 2\text{id}_{\mathbb{R}^4})$ est stable

par f . Or $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ donc $A^2 + I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est clairement de rang 2 et, avec

la formule du rang, $\dim(\text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^4})) = 4 - 2 = 2$ donc $\text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^4}) = \text{Vect}(e_1 + e_3, e_2 + e_4)$ est un plan

stable par f . De même, $A^2 + 2I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est aussi de rang 2 d'où $\dim(\text{Ker}(f^2 + 2\text{id}_{\mathbb{R}^4})) = 4 - 2 = 2$

et $\text{Ker}(f^2 + 2\text{id}_{\mathbb{R}^4}) = \text{Vect}(e_3, e_4)$ est un plan stable par f .

e. Il n'y a qu'un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 de dimension 0 et c'est $\{0\}$ qui est stable par f .

Il n'y a qu'un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 de dimension 4 et c'est \mathbb{R}^4 qui est stable par f .

On a vu en **b.** et **c.** qu'il n'y avait aucun sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 de dimension 1 ou 3 stable par f .

Soit P un plan de \mathbb{R}^4 stable par f et $f_P : P \rightarrow P$ l'endomorphisme induit par f dans P , il est défini par $f_P(x) = f(x)$ pour $x \in P$. On a vu dans le cours qu'alors χ_{f_P} divise χ_f . Or χ_{f_P} est un polynôme réel unitaire de degré 2 car $\dim(P) = \deg(f_P) = 2$ donc, avec la question **a.**, on a soit $\chi_{f_P} = X^2 + 1$, soit $\chi_{f_P} = X^2 + 2$.

- Si $\chi_{f_P} = X^2 + 1$, par CAYLEY-HAMILTON, on a $f_P^2 + \text{id}_P = 0$ donc $\forall x \in P, f^2(x) + x = 0$, ce qui montre que $P \subset \text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^4})$. Par inclusion et égalité des dimensions, on a donc $P = \text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^4})$.
- Si $\chi_{f_P} = X^2 + 2$, par CAYLEY-HAMILTON, on a $f_P^2 + 2\text{id}_P = 0$ donc $\forall x \in P, f^2(x) + 2x = 0$, ce qui montre que $P \subset \text{Ker}(f^2 + 2\text{id}_{\mathbb{R}^4})$. Par inclusion et égalité des dimensions, on a donc $P = \text{Ker}(f^2 + 2\text{id}_{\mathbb{R}^4})$.

Ainsi, il y a seulement 4 sous-espaces de \mathbb{R}^4 stables par f : $\{0\}$, $\text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^4})$, $\text{Ker}(f^2 + 2\text{id}_{\mathbb{R}^4})$ et \mathbb{R}^4 .

67

- 68 a. Pour $P \in \mathbb{R}_4[X]$, on a $\deg(P) \leq 4$ donc $\deg(P') \leq 3$ et, si on écrit $P' = aX^3 + bX^2 + cX + d$, on a $P'(X+1) - P'(X) = a((X+1)^3 - X^3) + b(X+1)^2 + c(X+1) + d - bX^2 - cX - d$ qui se développe pour avoir $P'(X+1) - P'(X) = a(3X^2 + 3X + 1) + b(X+1)^2 + c(X+1) + d - bX^2 - cX - d$ donc $\deg(P'(X+1) - P'(X)) \leq 2$ d'où $\deg(\Phi(P)) = 2 + \deg(P'(X+1) - P'(X)) \leq 4$ et $\Phi(P) \in \mathbb{R}_4[X]$. Comme Φ est linéaire par linéarité de la dérivation des polynômes, Φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.

Pour $P \in \text{Ker}(\Phi)$, comme $X^2 \neq 0$, on a $P'(X+1) = P'(X)$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, P'(n) = P'(0)$ donc le polynôme $P' - P'(0)$ admet une infinité de racines, il est donc nul et $P'(X) = P'(0)$ est constant donc $P \in \mathbb{R}_1[X]$. Réciproquement, si $P = aX + b$, on a $\Phi(P) = X^2(a - a) = 0$ donc $P \in \text{Ker}(\Phi)$.

Par double inclusion, on a donc $\text{Ker}(\Phi) = \mathbb{R}_1[X]$.

- b. $\Phi(1) = \Phi(X) = 0$ avec a. et $\Phi(X^2) = 2X^2, \Phi(X^3) = 6X^3 + 3X^2, \Phi(X^4) = 12X^4 + 12X^3 + 4X^2$ par calculs

donc, en notant $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3, X^4)$ la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$, on a $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

Comme A est triangulaire supérieure, on a $\chi_{\Phi} = \chi_A = X^2(X-2)(X-6)(X-12)$ donc $\text{Sp}(\Phi) = \{0, 2, 6, 12\}$.

- c. Si $P \in F$, on a $\Phi(P) = X^2(P'(X+1) - P'(X)) \in X^2 \mathbb{R}_2[X]$ d'après a. donc $\Phi(P) \in F$ ce qui prouve que $F = \text{Vect}(X^2, X^3, X^4)$ est un sous-espace de $\mathbb{R}_4[X]$ stable par Φ . De plus, comme $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3, X^4)$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$, $\text{Im}(\Phi) = \text{Vect}(\Phi(1), \Phi(X), \Phi(X^2), \Phi(X^3), \Phi(X^4)) = \text{Vect}(X^2, 3X^2 + 6X^3, 4X^2 + 12X^3 + 12X^4) = F$.

- d. D'après a., $\text{Ker}(\Phi) = \text{Vect}(1, X) = \mathbb{R}_1[X]$ et $F = \text{Vect}(X^2, X^3, X^4)$. Comme $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3, X^4)$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$, on en déduit que $\mathbb{R}_4[X] = \text{Ker}(\Phi) \oplus F = \text{Ker}(\Phi) \oplus \text{Im}(\Phi)$.

- e. On a vu en a. que $\dim(E_0(\Phi)) = \dim(\text{Ker}(\Phi)) = 2$ vaut la multiplicité de 0 dans χ_{Φ} . Les autres valeurs propres de Φ , à savoir 2, 6, 12, sont simples donc, d'après le cours, la dimension de l'espace propre associé vaut 1. Ainsi, $E_2(\Phi)$, $E_6(\Phi)$ et $E_{12}(\Phi)$ sont des droites. Comme χ_{Φ} est scindé sur \mathbb{R} et que les ordres de multiplicité de chacune des valeurs propres vaut la dimension du sous-espace propre associé, l'endomorphisme Φ est diagonalisable.

- On a déjà vu que $E_0(\Phi) = \mathbb{R}_1[X] = \text{Vect}(1, X)$.
- Avec les calculs de la question b., on a aussi $E_2(\Phi) = \text{Vect}(X^2)$.

- Comme $A - 6I_5 = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, on "voit" que $E_6(\Phi) = \text{Vect}(3X^2 + 4X^3)$.

- Comme $A - 12I_5 = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $E_{12}(\Phi) = \text{Vect}(X^2 + 2X^3 + X^4)$.

69

70 (\implies) Supposons A diagonalisable et traitons deux cas :

- Soit A n'admet qu'une seule valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $A = P(\lambda I_2)P^{-1}$ avec P inversible donc $A = \lambda I_2$. Soit Q un polynôme complexe non constant. D'après le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS, le polynôme $Q - \lambda$ admet une racine complexe puisqu'il n'est pas constant. Ainsi, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $Q(\alpha) = \lambda$. Il suffit de prendre $M = \alpha I_2$ pour avoir $Q(M) = Q(\alpha)I_2 = \lambda I_2 = A$.

- Soit A admet deux valeurs propres complexes $\lambda_1 \neq \lambda_2$. En notant $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, il existe une matrice inversible $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$. Soit Q un polynôme complexe non constant, comme ci-dessus il existe des complexes α_1 et α_2 tels que $Q(\alpha_1) = \lambda_1$ et $Q(\alpha_2) = \lambda_2$ (autrement dit $Q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est surjective). Il suffit de prendre $M = P \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} P^{-1}$ pour avoir $Q(M) = P \begin{pmatrix} Q(\alpha_1) & 0 \\ 0 & Q(\alpha_2) \end{pmatrix} P^{-1} = PDP^{-1} = A$.

(\impliedby) Supposons A non diagonalisable, alors χ_A ne peut pas être scindé à racines simples donc $\text{Sp}(A) = \{\lambda\}$, $\chi_A = (X - \lambda)^2$ et $\dim(E_\lambda(A)) = 1$. Comme χ_A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ A est trigonalisable donc il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\mu \neq 0$.

Pour réduire "à la JORDAN" et avoir 1 à la place de μ : si on note $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A , on a donc par CAYLEY-HAMILTON $(u - \text{id}_{\mathbb{C}^2})^2 = 0$ donc $\text{Im}(u - \text{id}_{\mathbb{C}^2}) \subset \text{Ker}(u - \text{id}_{\mathbb{C}^2})$. Puisque $\dim(E_\lambda(A)) = 1$, par le théorème du rang, on a $\dim(\text{Im}(u - \text{id}_{\mathbb{C}^2})) = \dim(\text{Ker}(u - \text{id}_{\mathbb{C}^2})) = 1$ donc $\text{Im}(u - \text{id}_{\mathbb{C}^2}) = \text{Ker}(u - \text{id}_{\mathbb{C}^2})$. Si on prend $v_1 \in \mathbb{C}^2$ tel que $\text{Ker}(u - \text{id}_{\mathbb{C}^2}) = \text{Vect}(v_1)$, alors il existe donc $v_2 \in \mathbb{C}^2$ tel que $(u - \text{id}_{\mathbb{C}^2})(v_2) = v_1$. Comme $v_2 \notin \text{Ker}(u - \text{id}_{\mathbb{C}^2})$, la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ est libre donc c'est une base de \mathbb{C}^2 . Par construction, comme $u(v_1) = \lambda v_1$ et $u(v_2) - \lambda v_2 = v_1$, il vient $T = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. En notant P la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{C}^2 à \mathcal{B} , on a par la formule de changement de base, on a $A = PTP^{-1}$.

Prenons le polynôme non constant $Q = X^2 + \lambda$ et supposons l'existence d'une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $Q(M) = A$. Posons $N = P^{-1}MP$ de sorte que $M = PNP^{-1}$. On a la suite suivante d'équivalences : $Q(M) = M^2 + \lambda I_2 = A \iff P(N^2 + \lambda I_2)P^{-1} = PTP^{-1} \iff N^2 + \lambda I_2 = A \iff N^2 = \mu E_{2,1}$. Comme $E_{2,1}^2 = 0$, on a $N^4 = 0$ donc N est nilpotente. Or, il est classique que $\chi_N = X^2$ (seul 0 est valeur propre de N) donc $N^2 = 0$ par CAYLEY-HAMILTON. Ceci impose donc $E_{2,1} = 0$ qui est absurde.

Par double implication : A diagonalisable $\iff (\forall Q \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}_0[X], \exists M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), Q(M) = A)$.

71 a. Après l'opération de GAUSS par blocs $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$, $\chi_B = \begin{vmatrix} XI_n - A & -A \\ -A & XI_n - A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} XI_n & -A \\ -XI_n & XI_n - A \end{vmatrix}$.
 Puis $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $\chi_B = \begin{vmatrix} XI_n & -A \\ 0 & XI_n - 2A \end{vmatrix} = X^n \chi_{2A}$ car cette matrice est triangulaire par blocs.
 Or $\chi_{2A} = \det(XI_n - 2A) = 2^n \det\left(\frac{X}{2} - A\right) = 2^n \chi_A\left(\frac{X}{2}\right)$ donc $\chi_B = 2^n X^n \chi_A\left(\frac{X}{2}\right)$ ce qui montre que

$\text{Sp}(B) = \{0\} \cup (2 \text{Sp}(A))$, que l'on parle du spectre réel ou du spectre complexe. Traitons deux cas en prenant $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ avec $(X_1, X_2) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$:

- Si $\lambda = 0$, $BX = \lambda X = 0 \iff (AX_1 + AX_2 = 0) \iff A(X_1 + X_2) = 0 \iff (X_1 + X_2 \in \text{Ker}(A))$ donc $BX = 0 \iff (\exists Y \in \text{Ker}(A), X_2 = Y - X_1)$ ce qui donne une écriture paramétrique du noyau de B , à savoir $\text{Ker}(B) = E_0(B) = \{(X_1, Y - X_1) \mid (Y, X_1) \in \text{Ker}(A) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}$. Ainsi, comme l'application $\varphi : \text{Ker}(A) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Ker}(B)$ définie par $\varphi(Y, X_1) = (X_1, Y - X_1)$ est linéaire et bijective d'après ce qui précède, on a $\dim(E_0(B)) = \dim(\text{Ker}(A) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) = n + \dim(E_0(A))$.

- Si $\lambda \neq 0$, $BX = \lambda X \iff (AX_1 + AX_2 = \lambda X_1 = \lambda X_2) \iff (X_1 = X_2, AX_1 = \frac{\lambda}{2}X_1)$ ce qui donne $BX = \lambda X \iff (X_1 = X_2 \text{ et } X_1 \in E_{\lambda/2}(A))$. Comme l'application $\psi_\lambda : E_{\lambda/2}(A) \rightarrow E_\lambda(B)$ définie par $\psi(X_1) = (X_1, X_1)$ est linéaire et bijective d'après ce qui précède, $\dim(E_\lambda(B)) = \dim(E_{\lambda/2}(A))$.

b. B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ (on suppose que c'est la question) si et seulement si $\mathbb{R}^{2n} = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(B)} E_\lambda(B)$

par définition. En passant aux dimensions, la matrice B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ si et seulement si $2n = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(B)} \dim(E_\lambda(B)) = \dim(E_0(B)) + \sum_{\lambda \in \text{Sp}(B), \lambda \neq 0} \dim(E_\lambda(B))$. D'après la question précédente, B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ si et seulement si $2n = n + \dim(E_0(A)) + \sum_{\mu \in \text{Sp}(A), \mu \neq 0} \dim(E_\mu(A))$ en posant $\mu = \frac{\lambda}{2}$. Comme on a $2n = n + \dim(E_0(A)) + \sum_{\mu \in \text{Sp}(A), \mu \neq 0} \dim(E_\mu(A)) \iff \sum_{\mu \in \text{Sp}(A)} \dim(E_\mu(A)) = n$, on trouve finalement que B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ si et seulement si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

72 a. Par linéarité de la trace, $\text{Tr}(AB - BA) = \text{Tr}(AB) - \text{Tr}(BA) = \text{Tr}(B) - \text{Tr}(B) = 0$ car $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ d'après le cours. Si B était inversible, on aurait $A - BAB^{-1} = I_n$ en multipliant $AB - BA = B$ par B^{-1} à droite. On aurait donc $\text{Tr}(A - BAB^{-1}) = \text{Tr}(A) - \text{Tr}(BAB^{-1}) = n$ ce qui est impossible car BAB^{-1} étant semblable à A , on a $\text{Tr}(BAB^{-1}) = \text{Tr}(A)$. Ainsi, B n'est pas inversible.

b. Initialisation : pour $k = 0$, $AB^0 - B^0A = 0 \cdot B^0$ car $B^0 = I_n$. Pour $k = 1$, $AB^1 - B^1A = AB - BA = B = 1 \cdot B^1$. **Hérédité :** soit $k \geq 1$, supposons que $AB^k - B^kA = kB^k$, alors $AB^{k+1} = AB^k \times B = (B^kA + kB^k) \times B$ par hypothèse de récurrence donc $AB^{k+1} = AB^k \times B = (B^kA + kB^k) \times B = B^k \times AB + kB^{k+1}$. Mais comme $AB = BA + B$, en reportant, on a $AB^{k+1} = B^k \times (BA + B) + kB^{k+1} = B^{k+1}A + (k+1)B^{k+1}$ qui s'écrit aussi $AB^{k+1} - B^{k+1}A = (k+1)B^{k+1}$.

Par principe de récurrence, on a montré que $\forall k \in \mathbb{N}$, $AB^k - B^kA = kB^k$.

c. Soit $L : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $L(M) = AM - MA$. Il est clair que L est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Or la question précédente montre que $\forall k \in \mathbb{N}$, $L(B^k) = kB^k$ ce qui prouve que k est une valeur propre de L si $B^k \neq 0$. Comme il est impossible qu'un endomorphisme en dimension finie ($\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = n^2$) ait une infinité de valeurs propres, il existe forcément une valeur $k \in \mathbb{N}^*$ telle que $B^k = 0$. Par conséquent, B est bien nilpotente.

73 a. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A , il existe un vecteur colonne $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $AX = \lambda X$. On a donc $A^2X = A(AX) = \lambda AX = \lambda^2X$ puis $A^3X = \lambda^3X$ donc $(A^3 + 9A)X = (\lambda^3 + 9\lambda)X = 0$ donc $\lambda^3 + 9\lambda = 0$ car $X \neq 0$. Ainsi, $\lambda(\lambda - 3i)(\lambda + 3i) = 0$ ce qui montre que $\lambda \in \{0, 3i, -3i\}$. Par conséquent, $\text{Sp}(A) \subset \{0, 3i, -3i\}$.

b. Le polynôme $X^3 + 9X = X(X - 3i)(X + 3i)$ est annulateur de A et scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$ donc,

d'après le cours, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

c. Si A était diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, son spectre serait non vide et inclus dans \mathbb{R} donc, d'après la question **a.**, on aurait $\text{Sp}(A) = \{0\}$. On aurait donc $\mathbb{R}^n = E_0(A) = \text{Ker}(A)$ d'où $A = 0$ qui est exclu par l'énoncé. Ainsi, A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

d. Méthode 1 : $A^3 + 9A = 0$ s'écrit aussi $A(A^2 + 9I_n) = 0$. Si A était inversible, on aurait $A^2 + 9I_n = 0$ donc $A^2 = -9I_n$. On aurait donc $\det(A^2) = \det(A)^2 = \det(-9I_n) = (-9)^n < 0$, ce qui est absurde. Ainsi, A n'est pas inversible si n est impair.

Méthode 2 : comme A est réelle, $m_{3i}(A) = m_{-3i}(A)$ car $-3i = \overline{3i}$ donc, comme $\text{Sp}(A) \subset \{0, 3i, -3i\}$, on a $n = m_0(A) + m_{3i}(A) + m_{-3i}(A)$ d'où $m_0(A) = \dim(E_0(A)) = n - 2m_{3i}(A)$ donc $\dim(\text{Ker}(A))$ est impair donc $\text{Ker}(A) \neq \{0\}$ donc A n'est pas inversible si n impair.

Méthode 3 : $\deg(\chi_A)$ est impair et χ_A est unitaire donc $\lim_{t \rightarrow -\infty} \chi_A(t) = -\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \chi_A(t) = +\infty$ et, comme χ_A est continue car polynomiale, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, χ_A s'annule sur \mathbb{R} donc en 0 car $\text{Sp}(A) \subset \{0, 3i, -3i\}$. Comme 0 est valeur propre de A , A n'est pas inversible si n impair.

Par contre, si $n = 2$ par exemple, en posant $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$, on a $A^2 = -9I_2$ donc $A^3 + 9A = 0$.

74 a. On calcule $\chi_{A_\alpha} = \begin{vmatrix} X-1 & -\alpha & 0 \\ 0 & X-1 & -1 \\ -1 & 0 & X+1 \end{vmatrix} = (X-1)^2(X+1) - \alpha = X^3 - X^2 - X + 1 - \alpha$ par SARRUS. La

fonction $f : t \mapsto t^3 - t^2 - t + 1 - \alpha$ est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(t) = 3t^2 - 2t - 1 = (3t+1)(t-1)$ donc f est croissante sur $]-\infty; -\frac{1}{3}]$, décroissante sur $[-\frac{1}{3}; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.

Comme $f(-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1 - \alpha = \frac{32}{27} - \alpha$ et $f(1) = -\alpha$, d'après le tableau de variations de f :

- Si $\alpha < 0$, f s'annule une seule fois sur \mathbb{R} , en $x_1 \in]-\infty; -\frac{1}{3}[$. Alors $\text{Sp}(A_\alpha) = \{x_1\}$.
- Si $\alpha = 0$, $f : t \mapsto (t-1)^2(t+1)$ s'annule en 1 et -1 donc $\text{Sp}(A_0) = \{-1, 1\}$.
- Si $\alpha \in]0; \frac{32}{27}[$, f s'annule en $x_1 \in]-\infty; -\frac{1}{3}[$, $x_2 \in]-\frac{1}{3}; 1[$ et $x_3 \in]1; +\infty[$ et $\text{Sp}(A_\alpha) = \{x_1, x_2, x_3\}$.
- Si $\alpha = \frac{32}{27}$, $f : t \mapsto t^3 - t^2 - t - \frac{5}{27} = (t + \frac{1}{3})^2(t - \frac{5}{3})$ s'annule en $-\frac{1}{3}$ et $\frac{5}{3}$ donc $\text{Sp}(A_{32/27}) = \{-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\}$.
- Si $\alpha > \frac{32}{27}$, f s'annule une seule fois sur \mathbb{R} , en $x_1 \in]1; +\infty[$. Alors $\text{Sp}(A_\alpha) = \{x_1\}$.

b. Avec le spectre trouvé à la question **a**, on considère cinq cas :

- Si $\alpha < 0$, χ_{A_α} n'est pas scindé sur \mathbb{R} car x_1 est simple donc A_α n'est pas diagonalisable.
- Si $\alpha = 0$, χ_{A_0} est scindé sur \mathbb{R} et $A_0 - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ est de rang 2 donc, avec la formule du rang, $\dim(E_1(A_0)) = 1 \neq 2 = m_1(A_0)$ donc A_0 n'est pas diagonalisable.
- Si $\alpha \in]0; \frac{32}{27}[$, χ_{A_α} est scindé à racines simples sur \mathbb{R} donc, d'après le cours, A_α est diagonalisable.
- Si $\alpha = \frac{32}{27}$, $\chi_{A_{32/27}}$ est scindé sur \mathbb{R} et $A_{32/27} + \frac{I_3}{3} = \begin{pmatrix} 4/3 & 32/27 & 0 \\ 0 & 4/3 & 1 \\ 1 & 0 & -2/3 \end{pmatrix}$ est de rang 2 donc $\dim(E_{-1/3}(A_{32/27})) = 1 \neq 2 = m_{-1/3}(A_{32/27})$ donc $A_{32/27}$ n'est pas diagonalisable.
- Si $\alpha > \frac{32}{27}$, χ_{A_α} n'est pas scindé sur \mathbb{R} car x_1 est simple donc A_α n'est pas diagonalisable.

Ainsi, A_α est diagonalisable si et seulement si $\alpha \in]0; \frac{32}{27}[$.

75

76

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 6

THÉORÈMES DE DOMINATION

77 a. Pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $g_\lambda : t \mapsto f(t) \sin(\lambda t)$ est continue sur \mathbb{R} par opérations et $\forall t \in \mathbb{R}, |g_\lambda(t)| \leq |f(t)|$ alors que f est intégrable sur \mathbb{R} par hypothèse. Ainsi, par comparaison, g_λ est intégrable sur \mathbb{R} ce qui montre que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\lambda t) dt$ est absolument convergente donc convergente et $L(\lambda)$ existe.

b. Soit $a > 0$ et $\lambda > 0$, en posant $u : t \mapsto f(t)$ et $v : t \mapsto -\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda}$, les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[-a; a]$ donc, par intégration par parties, $\int_{-a}^a f(t) \sin(\lambda t) dt = \left[-f(t) \frac{\cos(\lambda t)}{\lambda} \right]_{-a}^a + \int_{-a}^a \frac{f'(t) \cos(\lambda t)}{\lambda} dt$. Par inégalité triangulaire sur les réels et les intégrales, $\left| \int_{-a}^a f(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq \frac{|f(-a)|}{\lambda} + \frac{|f(a)|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_{-a}^a |f'(t)| dt$ donc $\int_{-a}^a f(t) \sin(\lambda t) dt = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ ce qui prouve que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f(t) \sin(\lambda t) dt = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$, comme f est intégrable sur \mathbb{R} , elle l'est sur \mathbb{R}_+ et sur \mathbb{R}_- donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} |f(t)| dt = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^x |f(t)| dt = 0$. Ainsi, il existe $b \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \geq b, 0 \leq \int_x^{+\infty} |f(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{3}$ et $c \in \mathbb{R}_-$ tel que $\forall x \leq c, 0 \leq \int_{-\infty}^x |f(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{3}$. En prenant $a = \max(-c, b) > 0$, on a donc $0 \leq \int_a^{+\infty} |f(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{3}$ et $\int_{-\infty}^{-a} |f(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{3}$. D'après ce qui précède, il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall \lambda \geq \lambda_0, \left| \int_{-a}^a f(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Ainsi, dès que $\lambda \geq \lambda_0$, on a $|L(\lambda)| = \left| \int_{-\infty}^{-a} f(t) \sin(\lambda t) dt + \int_{-a}^a f(t) \sin(\lambda t) dt + \int_a^{+\infty} f(t) \sin(\lambda t) dt \right|$ donc, par inégalité triangulaire, $|L(\lambda)| \leq \int_{-\infty}^{-a} |f(t)| |\sin(\lambda t)| dt + \left| \int_{-a}^a f(t) \sin(\lambda t) dt \right| + \int_a^{+\infty} |f(t)| |\sin(\lambda t)| dt \leq \varepsilon$ car $|\sin(\lambda t)| \leq 1$. On a bien établi que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} L(\lambda) = 0$.

c. La fonction $g : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* et se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$ car $\sin(x) \sim x$. La convergence de $\int_0^{+\infty} g$ équivaut donc à celle de $\int_1^{+\infty} g$. Posons $u : x \mapsto -\cos(x)$ et $v : x \mapsto \frac{1}{x}$, alors u et v sont de classe C^1 sur $[1; +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x) = 0$ donc, par intégration par parties, la nature de $\int_1^{+\infty} g = \int_1^{+\infty} u'v$ est la même que celle de $\int_1^{+\infty} uv'$ donc de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} dx$. Or la fonction $h : x \mapsto \frac{\cos(x)}{x^2}$ est continue sur $[1; +\infty[$ et $h(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc, par comparaison aux intégrales de RIEMANN, h est intégrable sur $[1; +\infty[$ donc $\int_1^{+\infty} h$ converge. Ainsi, $\int_1^{+\infty} g$ converge et le réel $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ existe.

d. Pour $n \in \mathbb{N}$, $g_n : x \mapsto \frac{\sin((2n+1)x)}{x}$ et $h_n : x \mapsto \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}$ sont continues sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ et se prolongent par continuité en 0 en posant $g_n(0) = h_n(0) = 2n+1$ car $\sin((2n+1)x) \sim (2n+1)x$ et $\sin(x) \sim x$. Ainsi, g_n et h_n ainsi prolongées sont continues sur le segment $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc I_n et J_n existent.

e. On calcule $J_0 = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}$. Si $n \in \mathbb{N}$, $J_{n+1} - J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+3)x) - \sin((2n+1)x)}{\sin(x)} dx$ or on a

$\sin(a) - \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$ donc $J_{n+1} - J_n = \int_0^{\pi/2} 2 \cos((2n+2)x) dx = 2 \left[\frac{\sin((2n+2)x)}{2n+2} \right]_0^{\pi/2}$
d'où $J_{n+1} - J_n = 0$. La suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant constante, on a $\forall n \in \mathbb{N}, J_n = J_0 = \frac{\pi}{2}$.

Par linéarité de l'intégrale, on a $I_n - J_n = \int_0^{\pi/2} \sin((2n+1)x) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right) dx$. Définissons $f :]0; \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}$. La fonction f est de classe C^1 sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ par opérations. De plus, avec le développement

limité de \sin en 0 à l'ordre 3, on a $f(x) \underset{0}{=} \frac{1}{x} - \frac{1}{x - (x^3/6) + o(x^3)} \underset{0}{=} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{1 - (x^2/6) + o(x^2)} \right)$. En composant avec le développement limité $\frac{1}{1-u} \underset{0}{=} 1 + u + o(u)$, on obtient $f(x) \underset{0}{=} \frac{1}{x} \left(1 - \left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) \right) \underset{0}{=} 0 - \frac{x}{6} + o(x)$.

L'existence d'un développement limité à l'ordre 1 de f montre qu'elle se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ car elle vérifie $f(x) \underset{0}{=} 0 + o(1)$ (à l'ordre 0 par troncature) et que cette fonction ainsi prolongée est dérivable en 0 avec $f'(0) = -\frac{1}{6}$. Mais ceci ne montre pas l'aspect C^1 de la fonction f sur $]0; \frac{\pi}{2}]$.

Comme $\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}]$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{x^2 \cos(x) - \sin^2(x)}{x^2 \sin^2(x)}$. Comme $x^2 \sin^2(x) \underset{0}{\sim} x^4$, cherchons par un développement limité à l'ordre 4 en 0 un équivalent du numérateur de $f'(x)$ en 0. Classiquement, $x^2 \cos(x) - \sin^2(x) \underset{0}{=} x^2 \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^2 \underset{0}{=} x^2 - \frac{x^4}{2} - x^2 \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right)^2$ ce qui donne $x^2 \cos(x) - \sin^2(x) \underset{0}{=} x^2 - \frac{x^4}{2} - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4) \underset{0}{=} -\frac{x^4}{6} + o(x^4)$ donc $x^2 \cos(x) - \sin^2(x) \underset{0}{\sim} -\frac{x^4}{6}$.

Par conséquent, $f'(x) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{6}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\frac{1}{6}$ ce qui montre, par le théorème de prolongement C^1 , que f est dérivable en 0 (on le savait), que $f'(0) = -\frac{1}{6}$ et que f' est continue en 0. Ainsi, f est C^1 sur $]0; \frac{\pi}{2}]$.

D'après la question b. avec $]0; \frac{\pi}{2}]$ à la place de $[-a; a]$, on a $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \sin(\lambda t) f(t) dt = 0$ donc, comme

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+1) = +\infty$, en composant, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \sin((2n+1)t) f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} (I_n - J_n) = 0$. Comme $I_n = I_n - J_n + J_n$, il vient $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \frac{\pi}{2}$.

Dans I_n , effectuons le changement de variable $x = \frac{t}{2n+1} = \varphi_n(t)$ avec φ_n qui est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $]0; \frac{(2n+1)\pi}{2}]$ dans $]0; \frac{\pi}{2}]$, ainsi $I_n = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin(t)}{t} dt$. D'après c., on sait que

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ par convergence de cette intégrale (intégrale de DIRICHLET).

Comme on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$, par unicité de la limite, on a $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

78

79 a. Pour tout réel x , la fonction $g_x : t \mapsto e^{-xt} \ln(t)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* . De plus, $g_x(t) \underset{0}{\sim} \ln(t) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$

donc g_x est intégrable en 0 par comparaison aux intégrales de RIEMANN. Traitons deux cas :

- Si $x \leq 0$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} g_x(t) = +\infty$ donc g_x n'est pas intégrable en $+\infty$ et $\int_0^{+\infty} g_x$ diverge.
- Si $x > 0$, par croissances comparées, on a $g_x(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-(x/2)t})$ donc, par comparaison à des fonctions de référence, g_x est intégrable en $+\infty$ donc $\int_0^{+\infty} g_x$ converge.

Ainsi, le domaine de définition D de f est $D = \mathbb{R}_+^*$.

b. Soit la fonction $g : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, t) = e^{-xt} \ln(t)$:

- (H₁) pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* par opérations.
- (H₂) pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $g_x : t \mapsto g(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* (on vient de le voir) et la fonction $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -te^{-xt} \ln(t)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .
- (H₃) Pour $a > 0$ et $(x, t) \in [a; +\infty[\times \mathbb{R}_+^*$, $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq t |\ln(t)| e^{-at} = \varphi_a(t)$ et la fonction φ_a est continue sur \mathbb{R}_+^* où elle est intégrable car $\varphi_a(t) \sim t |\ln(t)|$ donc $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi_a(t) = 0$ par croissances comparées et car $\varphi_a(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ car $t^2 \varphi_a(t) = \left(\frac{|\ln(t)|}{t}\right) \times (t^4 e^{-xt})$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, f est C^1 sur \mathbb{R}_+^* et $\forall x > 0$, $f'(x) = -\int_0^{+\infty} t \ln(t) e^{-xt} dt$. Ainsi, $\forall x > 0$, $x^2 f'(x) + x f(x) = -\int_0^{+\infty} x^2 t \ln(t) e^{-xt} dt + \int_0^{+\infty} x e^{-xt} \ln(t) dt = \int_0^{+\infty} x(1-xt) e^{-xt} \ln(t) dt$, le résultat de l'énoncé étant simple, on cherche une primitive de cette intégrande et on trouve en tâtonnant que $x^2 f'(x) + x f(x) = [(xt \ln(t) + 1) e^{-xt}]_0^{+\infty} = -1$ par croissances comparées donc $x^2 f'(x) + x f(x) + 1 = 0$. On pouvait aussi effectuer, dans l'expression de $f'(x)$, une intégration par parties avec $u : t \mapsto t \ln(t)$ et $v : t \mapsto -\frac{e^{-xt}}{x}$ qui sont de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et qui vérifient, comme avant, $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t)$ donc, comme tout converge, $f'(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} (\ln(t) + 1) e^{-xt} dt = -\frac{f(x)}{x} + \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = -\frac{f(x)}{x} + \frac{1}{x^2}$ et on retrouve bien la relation $x^2 f'(x) + x f(x) + 1 = 0$.

c. On résout l'équation homogène (E₀) : $x^2 y' + xy = 0 : y' + \frac{y}{x} = 0$ sur \mathbb{R}_+^* , ses solutions sont les fonctions $y : x \mapsto \lambda e^{-\ln(x)} = \frac{\lambda}{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Par variation de la constante, en écrivant $y(x) = \frac{\lambda(x)}{x}$ avec λ dérivable sur \mathbb{R}_+^* et en reportant dans l'équation, on a y solution de (E) sur \mathbb{R}_+^* si et seulement si $\lambda'(x) = -\frac{1}{x}$ et on choisit $\lambda(x) = -\ln(x)$ de sorte que $y : x \mapsto -\frac{\ln(x)}{x}$ est solution particulière de (E). Par théorème de structure, les solutions sur \mathbb{R}_+^* de (E) sont les fonctions $f : x \mapsto \frac{\alpha - \ln(x)}{x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Comme l'énoncé nous apprend que $f(1) = -\gamma$, on a $\alpha = -\gamma$ donc $\forall x > 0$, $f(x) = -\frac{\gamma + \ln(x)}{x}$.

80

81 a. La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2 - 1}$ est continue sur $]0; 1[$, $f(t) \underset{0}{\sim} -\ln(t) \underset{0}{\sim} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ par croissances comparées donc, par comparaison, f est intégrable en 0. De plus, $f(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{(t-1)}{(t-1)(t+1)} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{2}$ donc f se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1) = \frac{1}{2}$ et f est aussi intégrable en 1. Ainsi, f est intégrable sur $]0; 1[$ donc I existe.

b. Pour $t \in]0; 1[$, $f(t) = -\ln(t) \times \frac{1}{1-t^2} = (-\ln(t)) \sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t)$ en posant $u_k(t) = -t^{2k} \ln(t)$.

(H₁) La série de fonctions $\sum_{k \geq 0} u_k$ converge simplement vers f sur $]0; 1[$ (on en vient).

(H₂) Les u_k sont continues par opérations et intégrables sur $]0; 1[$ (donc sur $]0; 1[$) car $u_0(t) \sim -\ln(t)$ et u_k se prolonge par continuité en 0 en posant $u_k(0) = 0$ si $k \geq 1$ par croissances comparées.

(H₃) La fonction f est continue sur $]0; 1[$ (déjà vu).

(H₄) Pour $k \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |u_k(t)| dt = -\int_0^1 t^{2k} \ln(t) dt = -\left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1} \ln(t)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^{2k}}{2k+1} dt = \frac{1}{(2k+1)^2}$ par

intégration par parties car $a_k : t \mapsto \frac{t^{2k+1}}{2k+1}$ et $b : t \mapsto \ln(t)$ sont de classe C^1 sur $]0;1[$ et que $\lim_{t \rightarrow 0^+} a_k(t)b(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} a_k(t)b(t) = 0$.

Par le théorème d'intégration terme à terme, la fonction f est intégrable sur $]0;1[$ (on le savait déjà) et on a la relation $I = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t) \right) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 u_k(t) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

c. Posons $T_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. Or, pour $n \in \mathbb{N}^*$, en séparant les indices pairs et impairs, $S_{2n+1} = T_n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} = T_n + \frac{S_n}{4}$ donc $T_n = S_{2n+1} - \frac{S_n}{4}$. Ainsi, $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = I = \frac{3}{4} \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$.

82

83 a. Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $h_x : t \mapsto e^{-t} \frac{\text{sh}(xt)}{t}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* , prolongeable par continuité en 0 en posant $h_x(0) = x$ car $\text{sh}(xt) = xt + o(t)$ et $e^{-t} = 1 + o(1)$ donc $h_x(t) = x + o(1)$.

Comme $h_{-x} = -h_x$, il suffit de traiter le cas $x \geq 0$.

Si $x = 0$, il est clair que $h_0 = 0$ donc h_0 est intégrable sur \mathbb{R}_+^* et $f(0)$ existe, on a même $f(0) = 0$.

Si $x > 0$, $\text{sh}(xt) = \frac{e^{xt} - e^{-xt}}{2} \sim_{+\infty} \frac{e^{xt}}{2}$ donc $h_x(t) \sim_{+\infty} \frac{e^{(x-1)t}}{2t}$ donc h_x est intégrable sur \mathbb{R}_+^* si et seulement

si $x-1 < 0$ par comparaison de fonctions de référence. En effet, si $x < 1$, on a $h_x(t) = o(e^{-(1-x)t})$,

$h_1(t) \sim_{+\infty} \frac{1}{2t}$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} h_x(t) = +\infty$ si $x > 1$. h_x est donc intégrable si et seulement si $x \in]0;1[$ donc,

comme h_x est positive, $\int_0^{+\infty} h_x(t) dt$ converge si et seulement si $x \in]0;1[$.

Ainsi, le domaine de définition D de f vaut $D =]-1;1[$ et f est impaire sur D .

b. Soit l'application $g :]-1;1[\times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, t) = e^{-t} \frac{\text{sh}(xt)}{t}$.

(H₁) Pour tout $t > 0$, $x \mapsto g(x, t)$ est de classe C^1 sur $]-1;1[$.

(H₂) Pour tout $x \in]-1;1[$, $h_x : t \mapsto g(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* (on vient de le voir) et $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \text{ch}(xt)e^{-t}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .

(H₃) Soit $a \in]0;1[$, alors $\forall (x, t) \in [-a; a] \times \mathbb{R}_+^*$, $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = \text{ch}(xt)e^{-t} \leq \text{ch}(at)e^{-t} = \varphi_a(t)$ car ch est croissante sur \mathbb{R}_+ et φ_a est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* car elle se prolonge par continuité en 0 en posant $\varphi_a(0) = 1$ et $\varphi_a(t) \sim_{+\infty} \frac{e^{(a-1)t}}{2}$ avec $a-1 < 0$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, f est de classe C^1 sur $]-1;1[$ et, avec la formule de LEIBNIZ, on a la relation $f'(x) = \int_0^{+\infty} \text{ch}(xt)e^{-t} dt$.

c. Pour $x \in]-1;1[$, comme les deux intégrales convergent, $f'(x) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{(x-1)t} dt + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{(-x-1)t} dt$ donc $f'(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{(x-1)t}}{x-1} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \left[\frac{e^{(-x-1)t}}{-x-1} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{1-x^2}$. Comme $]-1;1[$ est un intervalle, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{2} \ln(1-x) + C = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + C$. Or $f(0) = 0$ donc $C = 0$ et $\forall x \in]-1;1[$, $f(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \text{Argth}(x)$.

84 D'abord, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $f_n(t) = \frac{1}{1+t^n}$ et $g_n(t) = \ln(1+t^n)$ sont continues sur le segment $[0; 1]$ donc I_n et J_n sont bien définis.

a. Méthode 1 : pour $t \in [0; 1]$, $1-t^n \leq f_n(t) \leq 1$ car $1-t^{2n} \leq 1$ donc, par croissance de l'intégrale, on obtient l'inégalité $\int_0^1 (1-t^n) dt = 1 - \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq 1$ d'où, par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 1 = \ell$.

Comme $\forall x > 0$, $0 \leq \ln(1+x) \leq x$, par croissance de l'intégrale, on a $0 \leq J_n \leq \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$ donc, par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$.

Méthode 2 : on utilise le théorème de convergence dominée :

(H₁) Pour tout $t \in [0; 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(t) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(1) = \frac{1}{2}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(1) = \ln(2)$ donc la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur $[0; 1]$ vers la fonction $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(1) = \frac{1}{2}$ et $\forall t \in [0; 1[$, $f(t) = 1$ et la suite de fonctions $(g_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur $[0; 1]$ vers la fonction $g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(1) = \ln(2)$ et $\forall t \in [0; 1[$, $g(t) = 0$

(H₂) Toutes les fonctions f_n , g_n sont continues et f , g sont continues par morceaux sur $[0; 1]$.

(H₃) $\forall n \geq 1$, $\forall t \in [0; 1]$, $0 \leq f_n(t) \leq 1$ et $0 \leq g_n(t) \leq \ln(2)$ et $\varphi : t \mapsto 1$ et $\psi : t \mapsto \ln(2)$ sont continues et intégrables sur $[0; 1]$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 f = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 1 = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g_n = \int_0^1 g = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0 = \ell'$.

b. Méthode 1 : pour $n \in \mathbb{N}^*$, dans l'intégrale $1 - I_n = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^n}\right) dt = \int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t^n} = \frac{1}{n} \int_0^1 t \times \frac{nt^{n-1}}{1+t^n} dt$, on pose $u_n : t \mapsto \ln(1+t^n)$ et $v : t \mapsto t$ qui sont de classe C^1 sur $[0; 1]$ de sorte que, par intégration par parties, on a $1 - I_n = \frac{1}{n} \int_0^1 u_n'(t)v(t) dt = \frac{1}{n} [u_n(t)v(t)]_0^1 - \frac{1}{n} \int_0^1 u_n(t)v'(t) dt = \frac{1}{n} \left(\ln(2) - \int_0^1 \ln(1+t^n) dt \right)$.

Comme $n(1 - I_n) = \ln(2) - J_n$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - I_n) = \ln(2)$ d'après **a.** donc $1 - I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(2)}{n}$.

Méthode 2 : dans $1 - I_n = \int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t^n}$, on pose $t = \varphi_n(u) = u^{1/n}$ avec φ_n bijection strictement croissante de classe C^1 de $]0; 1[$ dans $]0; 1[$. Par changement de variable, on a $1 - I_n = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{u^{1/n}}{1+u} du$. Soit, pour $n \geq 1$,

la fonction $a_n :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $a_n(u) = \frac{u^{1/n}}{1+u}$.

(H₁) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u^{1/n} = 1$ pour tout réel $u \in]0; 1]$, la suite de fonctions $(a_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $]0; 1[$ vers $a :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $a(u) = \frac{1}{1+u}$.

(H₂) Toutes les fonctions a_n et la fonction a sont continues sur $]0; 1[$.

(H₃) $\forall n \geq 1$, $\forall u \in]0; 1[$, $u^{1/n} \leq 1$ donc $0 \leq a_n(u) \leq a(u) \leq 1$ et $t \mapsto 1$ est intégrable sur $]0; 1[$.

On peut conclure avec le théorème de convergence dominée que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 a_n = \int_0^1 a$, c'est-à-dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - I_n) = \int_0^1 a = \ln(2)$ ou $1 - I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(2)}{n}$.

c. La fonction $g : u \mapsto \frac{\ln(1+u)}{u}$ est continue sur $]0; 1[$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$ car $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$. Ainsi, $\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du$ converge. On sait que $\forall u \in [0; 1[$, $\ln(1+u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} u^n}{n}$ donc $g(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} u^{n-1}}{n} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p u^p}{p+1}$ (ceci est aussi valable pour $u = 0$). Or le rayon de convergence de

cette série entière est $R = 1$ donc on ne peut pas intégrer terme à terme par le théorème du cours puisqu'on n'est pas sur un segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence. Posons $v_p : u \mapsto \frac{(-1)^p u^p}{p+1}$, alors $\|v_p\|_{\infty, [0;1[} = \frac{1}{p+1}$ donc on ne peut pas non plus utiliser la convergence normale sur un intervalle borné. Il reste le théorème d'intégration terme à terme.

(H₁) La série $\sum_{p \geq 0} v_p$ converge simplement vers g sur $]0; 1[$ (on en vient).

(H₂) Les fonctions v_p sont continues et intégrables sur $]0; 1[$ et g est continue sur $]0; 1[$.

(H₃) $\int_0^1 |v_p(u)| du = \left[\frac{u^{p+1}}{(p+1)^2} \right]_0^1 = \frac{1}{(p+1)^2}$ et la série de RIEMANN $\sum_{p \geq 0} \frac{1}{(p+1)^2}$ converge.

Ainsi, g est intégrable sur $]0; 1[$ (on le savait déjà) et $I = \int_0^1 g(u) du = \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^1 v_p = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(p+1)^2}$.

d. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, dans l'intégrale $\int_0^1 \ln(1+t^n) dt$, on pose $t = \varphi_n(u) = u^{1/n}$ avec φ_n bijection strictement croissante de classe C^1 de $]0; 1[$ dans $]0; 1[$. Par changement de variable, on a $J_n = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\ln(1+u) u^{1/n}}{u} du$.

Soit, pour $n \geq 1$, la fonction $h_n :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h_n(u) = \frac{u^{1/n} \ln(1+u)}{u}$.

(H₁) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u^{1/n} = 1$ pour tout réel $u \in]0; 1[$, la suite de fonctions $(h_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $]0; 1[$ vers $h :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $h(u) = \frac{\ln(1+u)}{u}$.

(H₂) Toutes les fonctions h_n et la fonction h sont continues sur $]0; 1[$.

(H₃) $\forall n \geq 1, \forall u \in]0; 1[, u^{1/n} \leq 1$ donc $0 \leq h_n(u) \leq h(u)$ et $h = g$ est intégrable sur $]0; 1[$.

On peut conclure avec le théorème de convergence dominée que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 h_n = \int_0^1 h$, c'est-à-dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n J_n = \int_0^1 g$. Par définition, et comme $\int_0^1 g > 0$ car g est continue, positive et non nulle sur $]0; 1[$, on en déduit que $J_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du$.

Posons, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $S'_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$. Alors $S'_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k-1)^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2}$ en séparant indices pairs et impairs. Ensuite, $S'_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} = S_{2n} - \frac{S_n}{2}$. Or on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \frac{\pi^2}{6}$ ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_{2n} = \frac{\pi^2}{12}$. Ainsi, $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} S'_{2n} = \frac{\pi^2}{12}$ et, d'après la question précédente, on a donc $J_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{12n}$.

On peut conclure à un développement asymptotique à trois termes de $I_n : I_n = 1 - \frac{\ln(2)}{n} + \frac{\pi^2}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

85 D'abord, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = \frac{1}{1+t^n}$ est continue sur le segment $[0; 1]$ donc I_n est bien défini.

a. À écrire. On conjecture que $\ell = 1$ avec les premiers termes de cette suite.

b. Méthode 1 : pour $t \in [0; 1]$, $1-t^n \leq f_n(t) \leq 1$ car $1-t^{2n} \leq 1$ donc, par croissance de l'intégrale, on obtient l'inégalité $\int_0^1 (1-t^n) dt = 1 - \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq 1$ d'où, par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 1 = \ell$.

Méthode 2 : on utilise le théorème de convergence dominée :

(H₁) Pour tout $t \in [0; 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(1) = \frac{1}{2}$ donc la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur $[0; 1]$ vers la fonction $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(1) = \frac{1}{2}$ et $\forall t \in [0; 1[$, $f(t) = 1$.

(H₂) Toutes les fonctions f_n sont continues et f est continue par morceaux sur $[0; 1]$.

(H₃) $\forall n \geq 1$, $\forall t \in [0; 1]$, $0 \leq f_n(t) \leq 1$ et $\varphi : t \mapsto 1$ est continue et intégrable sur $[0; 1]$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 f = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 1 = \ell$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, dans l'intégrale $1 - I_n = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^n}\right) dt = \int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t^n} = \frac{1}{n} \int_0^1 t \times \frac{nt^{n-1}}{1+t^n} dt$, on pose $u_n : t \mapsto \ln(1+t^n)$ et $v : t \mapsto t$ qui sont de classe C^1 sur $[0; 1]$ de sorte que, par intégration par parties, on a $1 - I_n = \frac{1}{n} \int_0^1 u'_n(t)v(t) dt = \frac{1}{n} [u_n(t)v(t)]_0^1 - \frac{1}{n} \int_0^1 u_n(t)v'(t) dt = \frac{1}{n} \left(\ln(2) - \int_0^1 \ln(1+t^n) dt \right)$.

Comme $\forall x > 0$, $0 \leq \ln(1+x) \leq x$, par croissance de l'intégrale, on a $0 \leq J_n \leq \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$ donc, par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - I_n) = \ln(2)$ donc $1 - I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(2)}{n}$.

d. La fonction $g : u \mapsto \frac{\ln(1+u)}{u}$ est continue sur $]0; 1]$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$ car $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$. Ainsi, $\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du$ converge. On sait que $\forall u \in [0; 1[$, $\ln(1+u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} u^n}{n}$ donc $g(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} u^{n-1}}{n} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p u^p}{p+1}$ (ceci est aussi valable pour $u = 0$). Or le rayon de convergence de cette série entière est $R = 1$ donc on ne peut pas intégrer terme à terme par le théorème du cours puisqu'on n'est pas sur un segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence. Posons $v_p : u \mapsto \frac{(-1)^p u^p}{p+1}$, alors $\|v_p\|_{\infty, [0; 1[} = \frac{1}{p+1}$ donc on ne peut pas non plus utiliser la convergence normale sur un intervalle borné. Il reste le théorème d'intégration terme à terme.

(H₁) La série $\sum_{p \geq 0} v_p$ converge simplement vers g sur $]0; 1[$ (on en vient).

(H₂) Les fonctions v_p sont continues et intégrables sur $[0; 1]$ et g est continue sur $]0; 1[$.

(H₃) $\int_0^1 |v_p(u)| du = \left[\frac{u^{p+1}}{(p+1)^2} \right]_0^1 = \frac{1}{(p+1)^2}$ et la série de RIEMANN $\sum_{p \geq 0} \frac{1}{(p+1)^2}$ converge.

Ainsi, g est intégrable sur $]0; 1[$ (on le savait déjà) et $I = \int_0^1 g(u) du = \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^1 v_p = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(p+1)^2}$.

e. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, dans l'intégrale $\int_0^1 \ln(1+t^n) dt$, on pose $t = \varphi_n(u) = u^{1/n}$ avec φ_n bijection strictement croissante de classe C^1 de $]0; 1]$ dans $]0; 1]$. Par changement de variable, on a $J_n = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\ln(1+u) u^{1/n}}{u} du$.

Soit, pour $n \geq 1$, la fonction $h_n :]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h_n(u) = \frac{u^{1/n} \ln(1+u)}{u}$.

(H₁) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u^{1/n} = 1$ pour tout réel $u \in]0; 1]$, la suite de fonctions $(h_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $]0; 1]$ vers $h :]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $h(u) = \frac{\ln(1+u)}{u}$.

(H₂) Toutes les fonctions h_n et la fonction h sont continues sur $]0; 1]$.

(H₃) $\forall n \geq 1$, $\forall u \in]0; 1]$, $u^{1/n} \leq 1$ donc $0 \leq h_n(u) \leq h(u)$ et $h = g$ est intégrable sur $]0; 1]$.

On peut conclure avec le théorème de convergence dominée que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 h_n = \int_0^1 h$, c'est-à-dire que

$\lim_{n \rightarrow +\infty} nJ_n = \int_0^1 g$. Par définition, et comme $\int_0^1 g > 0$ car g est continue, positive et non nulle sur $]0; 1]$, on en déduit que $J_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du$.

Posons, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $S'_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$. Alors $S'_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k-1)^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2}$ en séparant indices pairs et impairs. Ensuite, $S'_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} = S_{2n} - \frac{S_n}{2}$. Or on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \frac{\pi^2}{6}$ ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_{2n} = \frac{\pi^2}{12}$. Ainsi, $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} S'_{2n} = \frac{\pi^2}{12}$ et, d'après la question précédente, on a donc $J_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{12n}$.

On peut conclure à un développement asymptotique à trois termes de I_n : $I_n \underset{+\infty}{=} 1 - \frac{\ln(2)}{n} + \frac{\pi^2}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 7

ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS ET ESPACES EUCLIDIENS

86

87

88 a. Par définition du produit des polynômes, $P^2(X) = \sum_{0 \leq p, q \leq n} a_p X^p \cdot a_q X^q = \sum_{0 \leq p, q \leq n} a_p a_q X^{p+q}$. Ainsi, par linéarité de l'intégrale de fonctions continues sur un segment, $\int_0^1 P^2(t) dt = \sum_{0 \leq p, q \leq n} a_p a_q \int_0^1 t^{p+q} dt$ donc

$$\int_0^1 P^2(t) dt = \sum_{0 \leq p, q \leq n} \frac{a_p a_q}{p+q+1} \geq 0 \text{ car } t \mapsto P^2(t) \text{ est positive sur } [0; 1].$$

b. Pour $k = 0$, $\int_0^\pi e^{ikt} dt = \int_0^\pi 1 dt = \pi$ et, pour $k \in \mathbb{Z}^*$, $\int_0^\pi e^{ikt} dt = \left[\frac{e^{ikt}}{ik} \right]_0^\pi = \frac{e^{i\pi} - 1}{ik}$ et on traite deux cas, si k est pair, $\int_0^\pi e^{ikt} dt = 0$ et si k est impair, $\int_0^\pi e^{ikt} dt = -\frac{2}{ik}$.

En écrivant $|P(e^{it})|^2 = P(e^{it})\overline{P(e^{it})} = P(e^{it})P(e^{-it})$, par linéarité de l'intégrale et d'après les calculs précédents, $|P(e^{it})|^2 = \left(\sum_{p=0}^n a_p e^{ipt} \right) \left(\sum_{q=0}^n a_q e^{-iqt} \right) = \sum_{0 \leq p, q \leq n} a_p a_q e^{i(p-q)t}$, ce qui donne la relation

$$\int_0^\pi |P(e^{it})|^2 dt = \sum_{p=0}^n a_p^2 \int_0^\pi dt + \sum_{\substack{0 \leq p, q \leq n \\ p-q \text{ impair}}} \int_0^\pi a_p a_q e^{i(p-q)t} dt = \pi \sum_{p=0}^n a_p^2 - 2 \sum_{\substack{0 \leq p, q \leq n \\ p-q \text{ impair}}} \frac{a_p a_q}{i(p-q)}.$$

Or, si $(p, q) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2$ vérifie $p - q$ impair, on a aussi $(q, p) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2$ et $q - p$ impair et $\frac{a_p a_q}{i(p-q)} = -\frac{a_q a_p}{i(q-p)}$ donc les termes de cette seconde somme se simplifient deux à deux, et on a enfin $\int_0^\pi |P(e^{it})|^2 dt = \pi \sum_{p=0}^n a_p^2$.

c. Comme on ne peut pas faire le changement de variable complexe $x = e^{it}$ car premièrement ce n'est pas au programme et deuxièmement $\varphi : t \mapsto e^{it}$ ne crée pas une bijection entre $[0; \pi]$ et $[-1; 1]$, on va faire le calcul des deux intégrales et comparer. Prenons $Q = \sum_{k=0}^m q_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, les deux fonctions $x \mapsto Q(x)$ et $t \mapsto Q(e^{it})e^{it}$ étant continues sur les segments $[-1; 1]$ et $[0; \pi]$, tous les calculs qui suivent sont valides.

$$\bullet \int_{-1}^1 Q(x) dx = \sum_{k=0}^m q_k \int_{-1}^1 x^k dx = \sum_{k=0}^m q_k \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_{-1}^1 = \sum_{k=0}^m q_k \frac{1 + (-1)^k}{k+1}.$$

On sépare les termes et

$$\text{impairs et on a } \int_{-1}^1 Q(x) dx = \sum_{k=0}^{m/2} \frac{2q_{2k}}{2k+1}.$$

$$\bullet -i \int_0^\pi Q(e^{it})e^{it} dt = -i \sum_{k=0}^m q_k \int_0^\pi e^{i(k+1)t} dt = -i \sum_{k=0}^{m/2} q_{2k} \left(-\frac{2}{i(2k+1)} \right) \text{ d'après b. donc on trouve}$$

$$\text{le même résultat } -i \int_0^\pi Q(e^{it})e^{it} dt = \sum_{k=0}^{m/2} \frac{2q_{2k}}{2k+1}.$$

On peut donc conclure que pour $Q \in \mathbb{C}[X]$, on a $\int_{-1}^1 Q(x) dx = -i \int_0^\pi Q(e^{it})e^{it} dt$.

d. Par un calcul matriciel classique, $X^T H_n X = \sum_{0 \leq i, j \leq n} \frac{x_i x_j}{i+j+1} = \int_0^1 \tilde{X}(t)^2 dt$ d'après la question a..

e. Ainsi, $X^T H_n X \geq 0$ ce qui permet déjà de conclure que $H_n \in S_{n+1}^+(\mathbb{R})$. De plus, si on suppose que $X^T H_n X = 0$ pour $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, on a $\int_0^1 \tilde{X}(t)^2 dt = 0$ et la fonction $t \mapsto \tilde{X}(t)^2$ est continue et positive

sur le segment $[0; 1]$, on sait par théorème qu'alors cette fonction est nulle, donc le polynôme \tilde{X} admet une infinité de racines, il est donc nul donc $X = 0$. On a bien établi que $H_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Les valeurs propres de H_n sont donc, d'après le cours, des réels strictement positifs. Soit $\lambda \in \text{Sp}(H_n)$, il existe donc $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ tel que $H_n X = \lambda X$. Alors $X^T H_n X = \lambda X^T X = \lambda \|X\|^2 = \lambda \sum_{k=0}^n x_k^2$ mais on a aussi, avec la question **d.**, $X^T H_n X = \int_0^1 \tilde{X}(t)^2 dt$. Comme la fonction $t \mapsto \tilde{X}(t)^2$ est positive et non nulle sur $[-1; 1]$, on a $\int_0^1 \tilde{X}(t)^2 dt < \int_{-1}^1 \tilde{X}(t)^2 dt = -i \int_0^\pi \tilde{X}(e^{it})^2 e^{it} dt$ d'après **c.** appliquée avec $Q = \tilde{X}^2$. De tout ceci, par inégalité triangulaire, on déduit que $\int_0^1 \tilde{X}(t)^2 dt < \int_0^\pi |\tilde{X}(e^{it})^2| dt = \int_0^\pi |\tilde{X}(e^{it})|^2 dt = \pi \sum_{k=0}^n x_k^2 = \pi \|X\|^2$ avec la question **b.**. Comme $\|X\| > 0$ car $X \neq 0$, l'inégalité $X^T H_n X = \lambda \|X\|^2 < \pi \|X\|^2$ devient $\lambda < \pi$. La plus grande des valeurs propres de H_n est aussi strictement inférieure à π , et $\text{Sp}(H_n) \subset]0; \pi[$.

89 a. Avec ces notations, on a $\bar{Z}^T M Z = \bar{Z}^T (\lambda Z) = \lambda \bar{Z}^T Z = \lambda \left(\sum_{k=1}^n |z_k|^2 \right) = \lambda \|Z\|^2$ si $Z^T = (z_1 \ \cdots \ z_n)$. Mais comme $\bar{Z}^T M Z \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$, que M est réelle et symétrique, donc que $M^T = M$ et que $\bar{M} = M$, on a la relation $(\bar{Z}^T M Z)^T = (Z^T M \bar{Z})^T = \bar{Z}^T M Z$ donc $\bar{\lambda} \|Z\|^2 = \lambda \|Z\|^2$. Mais comme $Z \neq 0$, $\|Z\|^2 > 0$ donc $\lambda = \bar{\lambda}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

b. La matrice A_n est symétrique réelle donc diagonalisable par le théorème spectral. On a $\text{Tr}(A_n) = n$

et, comme $A_n^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 4 & & \vdots & 2n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & 2(n-1) & \cdots & (n-1)^2 & (n-1)n \\ n & 2n & \cdots & (n-1)n & S \end{pmatrix}$ avec $S = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, on a

$$\text{Tr}(A_n^2) = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + S = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(2n^2+1)}{3}.$$

c. Si $n = 1$, $A_1 = (1)$ donc $\text{Sp}(A_1) = \{1\}$ et (1) est une base de \mathbb{R} .

Si $n \geq 2$, la matrice A_n est de rang 2 car les $n-1$ premières colonnes sont proportionnelles et non nulles et la dernière n'est pas proportionnelle à la première. $\dim(E_0(A_n)) = \dim(\text{Ker}(A_n)) = n - \text{rang}(A_n) = n - 2$ par la formule du rang et, en regardant A_n , une base de $E_0(A_n)$ est $(e_2 - 2e_1, e_3 - 3e_1, \dots, e_{n-1} - (n-1)e_1)$.

Comme A_n est diagonalisable, $\chi_{A_n} = X^{n-2}(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$ avec $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ mais peut-être $\lambda_1 = \lambda_2$.

Ainsi, $\text{Tr}(A_n) = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\text{Tr}(A_n^2) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$ car A_n est semblable à $\text{diag}(0, \dots, 0, \lambda_1, \lambda_2)$. On a donc

$$(\lambda_1 + \lambda_2)^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2 = n^2 \text{ donc } \lambda_1\lambda_2 = \frac{1}{2} \left(n^2 - \frac{n(2n^2+1)}{3} \right) = \frac{3n^2 - 2n^3 - n}{6}.$$

Par conséquent, λ_1 et λ_2 sont les racines de $(X - \lambda_1)(X - \lambda_2) = X^2 - nX + \frac{3n^2 - 2n^3 - n}{6}$. Le discriminant de ce polynôme vaut

$$\Delta = n^2 - \frac{2(3n^2 - 2n^3 - n)}{3} = \frac{n(4n^2 - 3n + 2)}{3} \text{ donc } \lambda_1 = \frac{n + \sqrt{\Delta}}{2} \text{ et } \lambda_2 = \frac{n - \sqrt{\Delta}}{2} \text{ (par exemple).}$$

Comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, les deux sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(A_n)$ et $E_{\lambda_2}(A_n)$ sont des droites, elles sont orthogonales et incluses dans $E_0(A_n)^\perp$ d'après le théorème spectral. Comme on sait que $E_0(A_n)^\perp = \text{Im}(A_n)$, on a

$E_{\lambda_1}(A_n) \subset \text{Im}(A_n) = \text{Vect}(e_n, e_1 + 2e_2 + \dots + ne_n)$, on peut chercher un vecteur directeur v_1 de $E_{\lambda_1}(A_n)$ sous la forme $v_1 = \alpha_1 e_n + \beta_1 (e_1 + 2e_2 + \dots + ne_n)$. On ne peut pas avoir $\beta_1 = 0$ car e_n n'est pas vecteur propre de A_n (car $n \geq 2$), donc on va plutôt chercher v_1 sous la forme $v_1 = \alpha_1 e_n + (e_1 + 2e_2 + \dots + ne_n)$ (en divisant par β_1).

En calculant $A_n v_1$, on constate que $A_n v_1 = \lambda_1 v_1$ si et seulement si $\alpha_1 = \lambda_1 - n$. On peut

donc conclure que $E_{\lambda_1}(A_n) = \text{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = e_1 + 2e_2 + \dots + (n-1)e_{n-1} + \lambda_1 e_n$. Bien sûr, de même, $E_{\lambda_2}(A_n) = \text{Vect}(v_2)$ avec $v_2 = e_1 + 2e_2 + \dots + (n-1)e_{n-1} + \lambda_2 e_n$.

90 a. A diagonalisable dans l'énoncé est entendu comme "A diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ". Par hypothèse, il

existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telle que $A = PDP^{-1}$. Posons $Q = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$, alors $Q \in \text{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ car $\det(Q) = (\det(P))^2 > 0$ et $Q^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$ et, par blocs, on trouve $Q^{-1}MQ = S = \begin{pmatrix} D & I_n \\ I_n & D \end{pmatrix}$. Comme S est symétrique réelle, d'après le théorème spectral, la matrice N est diagonalisable donc, la matrice M lui étant semblable, M est aussi diagonalisable.

b. Soit λ une valeur propre de A, forcément $\lambda \in \mathbb{R}$ par le théorème spectral et, pour tout vecteur $X \in E_\lambda(A)$, on a $AX = \lambda X$ donc $M \begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix} = (\lambda+1) \begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix}$ et $M \begin{pmatrix} X \\ -X \end{pmatrix} = (\lambda-1) \begin{pmatrix} X \\ -X \end{pmatrix}$. Ceci prouve que $\text{Sp}(A)+1 \subset \text{Sp}(M)$ et que $\text{Sp}(A) - 1 \subset \text{Sp}(M)$. Comme $\chi_M = \begin{vmatrix} XI_n - A & -I_n \\ -I_n & XI_n - A \end{vmatrix}$ devient $\chi_M = \begin{vmatrix} XI_n - I_n - A & -I_n \\ XI_n - I_n - A & XI_n - A \end{vmatrix}$ après l'opération par blocs $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$, puis $\chi_M = \begin{vmatrix} (X-1)I_n - A & -I_n \\ 0 & (X+1)I_n - A \end{vmatrix}$ après $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, on a $\chi_M = \det((X-1)I_n - A) \det((X+1)I_n - A) = \chi_A(X+1)\chi_A(X-1)$ donc $\text{Sp}(M) = (\text{Sp}(A)+1) \cup (\text{Sp}(A)-1)$. Posons $P_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix} \mid X \in E_\lambda(A) \right\}$ et $M_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ -X \end{pmatrix} \mid X \in E_\lambda(A) \right\}$. On vérifie facilement que P_λ et M_λ sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^{2n} et que $f_\lambda : E_\lambda(A) \rightarrow P_\lambda$ et $g_\lambda : E_\lambda(A) \rightarrow M_\lambda$ définies par $f_\lambda(X) = \begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix}$ et $g_\lambda(X) = \begin{pmatrix} X \\ -X \end{pmatrix}$ sont des isomorphismes, ce qui garantit que $\dim(P_\lambda) = \dim(M_\lambda) = \dim(E_\lambda(A))$.

Posons les sous-espaces $P = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} P_\lambda$ et $M = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} M_\lambda$ de \mathbb{R}^{2n} . Si $(X_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \in \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} E_\lambda(A)$ est telle que $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \begin{pmatrix} X_\lambda \\ X_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} X_\lambda = 0$ donc, comme les sous-espaces propres de A associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe, on en déduit que $\forall \lambda \in \text{Sp}(A), X_\lambda = 0$ donc que la somme définissant P est directe. Ainsi, $P = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} P_\lambda$ et $M = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} M_\lambda$, ce qui montre que $\dim(P) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = n = \dim(M)$ car, puisque A est diagonalisable, $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} E_\lambda(A)$.

De plus, si $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in P \cap M$, on a $X = Y = -Y$ donc $X = Y = 0$ et $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc P et M sont en somme directe. Comme $\dim(P) = \dim(M) = n$ et que $P \oplus M \subset \mathbb{R}^{2n}$, on en déduit, par inclusion et égalité des dimensions, que $\mathbb{R}^{2n} = P \oplus M = \left(\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} P_\lambda \right) \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} M_\lambda \right)$.

Comme les vecteurs non nuls de chaque P_λ ou chaque M_λ sont des vecteurs propres de M d'après ce qui précède, une base de \mathbb{R}^{2n} adaptée à cette décomposition $\mathbb{R}^{2n} = P \oplus M = \left(\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} P_\lambda \right) \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} M_\lambda \right)$ est une base formée de vecteurs propres de M, donc M est diagonalisable ce qu'on savait déjà, mais cela prouve aussi que $\text{Sp}(M) = (\text{Sp}(A) + 1) \cup (\text{Sp}(A) - 1)$. Plus précisément, si $\mu \in \text{Sp}(M)$:

- soit $\mu - 1 \in \text{Sp}(A)$ et $\mu + 1 \notin \text{Sp}(A)$, en notant $\lambda = \mu - 1$, on a $E_\mu(M) = P_\lambda$.
- soit $\mu + 1 \in \text{Sp}(A)$ et $\mu - 1 \notin \text{Sp}(A)$, en notant $\lambda = \mu + 1$, on a $E_\mu(M) = M_\lambda$.

- soit $\mu - 1 \in \text{Sp}(A)$ et $\mu + 1 \in \text{Sp}(A)$, en notant $\lambda_1 = \mu - 1$ et $\lambda_2 = \mu + 1$, on a $E_\mu(M) = P_{\lambda_1} \oplus M_{\lambda_2}$.

91

92 a. D'abord, pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, comme $AP \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg(B) = n + 1$, le reste R de la division euclidienne de AP par B vérifie $\deg(R) < \deg(B) = n + 1$ donc $\deg(R) \leq n$ et on a bien $\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

De plus, pour $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(P_1, P_2) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, on pose $R_1 = \Phi(P_1)$ et $R_2 = \Phi(P_2)$ de sorte que l'on a $AP_1 = Q_1B + R_1$ avec $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ et $AP_2 = Q_2B + R_2$ avec $Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg(R_1) \leq n$ et $\deg(R_2) \leq n$. Alors, $A(\lambda_1P_1 + \lambda_2P_2) = (\lambda_1Q_1 + \lambda_2Q_2)B + \lambda_1R_1 + \lambda_2R_2$ avec $\lambda_1Q_1 + \lambda_2Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda_1R_1 + \lambda_2R_2 \in \mathbb{R}_n[X]$ car on sait que $\deg(\lambda_1R_1 + \lambda_2R_2) \leq \max(\deg(R_1), \deg(R_2)) \leq n$. On peut donc conclure que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ car $\Phi(\lambda_1P_1 + \lambda_2P_2) = \lambda_1R_1 + \lambda_2R_2 = \lambda_1\Phi(P_1) + \lambda_2\Phi(P_2)$ par définition de Φ .

b. Puisque B est scindé à racines simples et de degré $n + 1$, notons $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ ses racines distinctes de sorte que $B = \lambda \prod_{k=1}^{n+1} (X - \alpha_k)$ avec $\lambda = \text{dom}(B) \neq 0$. Il est classique que $\varphi : \mathbb{R}_n[X]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $\varphi(P, Q) = \sum_{k=1}^{n+1} P(\alpha_k)Q(\alpha_k)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. En effet, φ est bien défini, symétrique par symétrie du produit des réels, bilinéaire par bilinéarité du produit des réels et défini positif car si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P, P) = \sum_{k=1}^{n+1} P(\alpha_k)^2 \geq 0$ et, si on suppose $\varphi(P, P) = 0$, alors $\forall k \in \llbracket 1; n + 1 \rrbracket$, $P(\alpha_k) = 0$ donc P admet au moins $n + 1$ racines alors que $\deg(P) \leq n$ donc $P = 0$.

Soit $(P_1, P_2) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, si $AP_1 = Q_1B + R_1$ avec $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$, $R_1 = \Phi(P_1)$ et $AP_2 = Q_2B + R_2$ avec $Q_2 \in \mathbb{R}[X]$, $R_2 = \Phi(P_2)$, on a $\forall k \in \llbracket 1; n + 1 \rrbracket$, $(AP_1)(\alpha_k) = R_1(\alpha_k) = A(\alpha_k)P_1(\alpha_k)$ et $(AP_2)(\alpha_k) = R_2(\alpha_k) = A(\alpha_k)P_2(\alpha_k)$. Ainsi, $\varphi(\Phi(P_1), P_2) = \sum_{k=1}^{n+1} R_1(\alpha_k)P_2(\alpha_k) = \sum_{k=1}^{n+1} A(\alpha_k)P_1(\alpha_k)P_2(\alpha_k) = \sum_{k=1}^{n+1} P_1(\alpha_k)R_2(\alpha_k) = \varphi(P_1, \Phi(P_2))$.

D'après le théorème spectral, comme Φ est auto-adjoint, Φ est diagonalisable. Mieux, ce même théorème nous donne l'existence d'une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de Φ . Si on pose les polynômes d'interpolation de LAGRANGE $L_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+1} \frac{X - \alpha_i}{\alpha_k - \alpha_i}$, il est classique que $\varphi(L_i, L_j) = \delta_{i,j}$ pour $(i, j) \in \llbracket 1; n + 1 \rrbracket^2$, donc (L_1, \dots, L_{n+1}) est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire φ .

Or, pour tout entier $k \in \llbracket 1; n + 1 \rrbracket$, si on pose $AL_k = Q_kB + R_k$ avec $R_k = \Phi(L_k)$, en évaluant en α_i , on a $A(\alpha_i)L_k(\alpha_i) = Q_k(\alpha_i)B(\alpha_i) + R_k(\alpha_i) = R_k(\alpha_i)$ donc $R_k(\alpha_i) = 0$ si $i \neq k$ et $R_k(\alpha_k) = A(\alpha_k)$. Ainsi, comme R_k et $A(\alpha_k)L_k$ coïncident en $n + 1$ valeurs et sont de degrés inférieurs ou égaux à n , on a $R_k = \Phi(L_k) = A(\alpha_k)L_k$. Ainsi, (L_1, \dots, L_{n+1}) est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de Φ associés aux valeurs propres $A(\alpha_1), \dots, A(\alpha_{n+1})$. Par exemple, on a $\text{Tr}(\Phi) = \sum_{k=1}^{n+1} A(\alpha_k)$ et $\det(\Phi) = \prod_{k=1}^{n+1} A(\alpha_k)$.

c. La famille $\mathcal{B} = (1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$ est libre car elle est formée de polynômes de degrés échelonnés et \mathcal{B} est de cardinal $n + 1$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ donc \mathcal{B} est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Par la formule de TAYLOR pour les polynômes, $A = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^{(i)}(a)}{i!} (X - a)^i$. Pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on a $\Phi((X - a)^k) = \sum_{i=0}^{n-k} \frac{A^{(i)}(a)}{i!} (X - a)^{i+k}$ car $(X - a)^k A = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^{(i)}(a)}{i!} (X - a)^{i+k} = (X - a)^{n+1} \left(\sum_{i=n+1-k}^{+\infty} \frac{A^{(i)}(a)}{i!} (X - a)^{i+k-n-1} \right) + \left(\sum_{i=0}^{n-k} \frac{A^{(i)}(a)}{i!} (X - a)^{i+k} \right)$

avec $\deg \left(\sum_{i=0}^{n-k} \frac{A^{(i)}(\mathbf{a})}{i!} (X - \mathbf{a})^{i+k} \right) \leq n = \deg(B) - 1$ d'où $M = \begin{pmatrix} A(\mathbf{a}) & 0 & \cdots & 0 \\ A'(\mathbf{a}) & A(\mathbf{a}) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ A^{(n)}(\mathbf{a})/n! & \cdots & A'(\mathbf{a}) & A(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$ est la

matrice de Φ dans la base \mathcal{B} . Par conséquent, $\chi_\Phi = (X - A(\mathbf{a}))^{n+1}$ donc Φ n'a qu'une seule valeur propre qui est $A(\mathbf{a})$ donc Φ est diagonalisable si et seulement si $E_{A(\mathbf{a})}(\Phi) = \mathbb{R}_n[X]$, c'est-à-dire si et seulement si $\Phi = A(\mathbf{a})\text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$. Ainsi, Φ est diagonalisable si et seulement si $M = A(\mathbf{a})I_{n+1}$, ce qui se traduit par $A'(\mathbf{a}) = A''(\mathbf{a}) = \cdots = A^{(n)}(\mathbf{a}) = 0$, ou encore par le fait que \mathbf{a} est une racine de multiplicité au moins $n+1$ de $A - A(\mathbf{a})$. On peut aussi dire que Φ est diagonalisable si et seulement si $\Phi(1) = A(\mathbf{a})$ car on a l'équivalence $(\exists Q \in \mathbb{R}[X], A - A(\mathbf{a}) = (X - \mathbf{a})^{n+1}Q) \iff \Phi(1) = A(\mathbf{a})$.

93

94 a. Dans \mathbb{R}^2 euclidien orienté canonique, si u est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, sa matrice dans la base canonique

étant la matrice antisymétrique $A = \text{Mat}_{\text{can}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, u(x, y) = (-y, x)$ donc $(u(x, y)|(x, y)) = (-y) \cdot x + x \cdot y = 0$ donc u est un endomorphisme antisymétrique de \mathbb{R}^2 .

Dans \mathbb{R}^3 euclidien orienté canonique, si $u : v \mapsto e_1 \wedge v$, alors u est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 car le produit vectoriel est bilinéaire (donc linéaire à droite). De plus, on sait que $\forall v \in \mathbb{R}^3, (e_1 \wedge v) \perp v$ donc $(u(v)|v) = 0$,

ainsi u est un endomorphisme antisymétrique de \mathbb{R}^3 . On a d'ailleurs $A = \text{Mat}_{\text{can}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui, bizarrement, est aussi antisymétrique.

b. Notons $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ la base orthonormale de l'énoncé et raisonnons par double implication.

(\implies) Supposons u antisymétrique, donc $\forall x \in E, ((u(x)|x) = 0$. Comme \mathcal{B} est une base orthonormale, on sait que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = ((u(v_j)|v_i))_{1 \leq i, j \leq n}$. Or, pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $(u(v_i)|v_i)$ donc les termes diagonaux de A sont nuls. De plus, si $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ et $i \neq j$, on a $(u(v_i + v_j)|v_i + v_j) = 0$, ce qui donne par bilinéarité du produit scalaire et car $(u(v_i)|v_i) = (u(v_j)|v_j) = 0$, $(u(v_i)|v_j) + (u(v_j)|v_i) = 0$ donc les cases (i, j) et (j, i) de A sont opposées. Ainsi, A est antisymétrique.

(\impliedby) Si $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est antisymétrique, pour $(x, y) \in E^2$, en notant X et Y les vecteurs colonnes associés de leurs coordonnées dans \mathcal{B} , comme \mathcal{B} est une base orthonormée, on a $(u(x)|y) = (AX)^T Y = X^T A^T Y$ donc $(u(x)|y) = -X^T A Y = -(x|u(y))$ donc, en prenant $y = x$, on a $(u(x)|x) = 0$ donc u est antisymétrique.

Ainsi, si $u \in \mathcal{L}(E)$ et \mathcal{B} une base orthonormale de E , u antisymétrique $\iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ antisymétrique. On a montré au passage que u est antisymétrique si et seulement si $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|y) = -(x|u(y))$.

c. Si n est impair et si $u \in \mathcal{L}(E)$ est antisymétrique, en notant $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, comme $\det(u) = \det(A)$, on a $\det(u) = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(u)$ donc $\det(u) = 0$. Ainsi, si n est impair, tous les endomorphismes antisymétriques de E ne sont pas bijectifs.

d. Si $n = 2p$ est pair, on a vu en a. que $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique et inversible. Ainsi, si on considère u l'endomorphisme de E dont la matrice dans \mathcal{B} vaut $M = \text{diag}(A, \dots, A)$ (p fois A en diagonale

par blocs), alors M est antisymétrique donc u l'est aussi d'après **b.** car \mathcal{B} est orthonormale, et u est inversible car $\det(u) = \det(A)^p = 1$. La condition suffisante de la question précédente est donc aussi nécessaire et, en notant $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble des endomorphismes antisymétrique de E , (n pair) $\iff (\mathcal{A}(E) \cap GL(E) \neq \emptyset)$.

e. Soit $u \in \mathcal{A}(E)$ tel que u est diagonalisable. Soit λ une valeur propre de u , il existe $x \neq 0_E$ tel que $u(x) = \lambda x$. Mais on a $(u(x)|x) = \lambda \|x\|^2 = 0$ alors que $\|x\|^2 > 0$ donc $\lambda = 0$. Comme 0 est la seule valeur propre possible pour u , la matrice de u dans une base de vecteurs propres est la matrice nulle donc $u = 0$. Ainsi, le seul endomorphisme antisymétrique diagonalisable est l'endomorphisme nul.

f. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ antisymétrique et \mathcal{B} une base orthonormale de E , on sait d'après **b.** que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est antisymétrique donc $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^2) = A^2$ est symétrique car $B^T = (A^2)^T = (A^T)^2 = (-A)^2 = A^2 = B$. Comme $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^2)$ est symétrique, le cours nous apprend que u^2 est un endomorphisme autoadjoint (ou symétrique). D'après le théorème spectral, u^2 est diagonalisable. Il existe même une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u^2 .

g. Si $E = \mathbb{R}^3$ (supposé euclidien orienté canonique) et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ antisymétrique, on sait d'après **b.**, comme la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormée de \mathbb{R}^3 , que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u)$ est antisymétrique donc qu'on peut écrire $A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Existence : en posant le vecteur $w = ae_1 + be_2 + ce_3 \in \mathbb{R}^3$, pour un vecteur $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in \mathbb{R}^3$, comme la base canonique est une base orthonormée directe, on calcule classiquement $w \wedge x$ et on trouve $w \wedge x = (-cx_2 + bx_3)e_1 + (cx_1 - ax_3)e_2 + (-bx_1 + ax_2)e_3 = u(x)$.

Unicité : soit w_1 et w_2 dans \mathbb{R}^3 tels que $\forall x \in \mathbb{R}^3, u(x) = w_1 \wedge x = w_2 \wedge x$, alors $\forall x \in \mathbb{R}^3, (w_1 - w_2) \wedge x = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $w_1 - w_2$ est colinéaire à tous les vecteurs de \mathbb{R}^3 , ce qui n'est possible que si $w_1 = w_2$.

Ainsi, si $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, il existe un unique vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^3, u(x) = w \wedge x$.

Si w est unitaire et si $v = -u^2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, on a $\forall x \in \mathbb{R}^3, v(x) = -w \wedge (w \wedge x) = (w|w)x - (w|x)w = x - (w|x)w$.

Ainsi, $\forall x \perp w, v(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et $v(w) = 0_{\mathbb{R}^3}$, donc v est la projection orthogonale sur le plan $\text{Vect}(w)^\perp$.

h. Soit $x \in \text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u)$, alors il existe $y \in E$ tel que $x = u(y)$ et $u(x) = 0_E$. Ainsi, d'après **b.**, $(u(x)|y) = (0_E|y) = 0 = (x|u(y)) = \|x\|^2$ donc $x = 0_E$ ce qui prouve que $\text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(u)$ sont en somme directe. Par la formule du rang, $\dim(E) = \dim(\text{Im}(u)) + \dim(\text{Ker}(u))$ donc $E = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u)$. Comme $\text{Im}(u)$ est un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$, la version géométrique du théorème du rang nous apprend que u induit un automorphisme $v = u|_{\text{Im}(u)}$ de $\text{Im}(u)$. Comme v est antisymétrique car u l'est, la question **c.** nous montre que $\dim(\text{Im}(u))$ est pair. Ainsi, $\text{rang}(u)$ est pair.

95

96

97

98 **a.** Pour $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, par hypothèse, on a $\|e_j\|^2 = \sum_{k=1}^n (e_j|e_k)^2 = \|e_j\|^4 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (e_j|e_k)^2$ donc, comme $\|e_j\| = 1$,

on en déduit que $\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (e_j | e_k)^2 = 0$ donc que $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{j\}, (e_j | e_k) = 0$. Ainsi, la famille (e_1, \dots, e_n) est une famille orthogonale et, comme elle ne contient pas le vecteur nul, elle est libre.

b. Posons le sous-espace $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ de E . Comme $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est libre avec \mathbf{a} , on a $\dim(F) = n$. Si $x \in F^\perp$, alors $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n (x | e_k)^2 = 0$ donc $x = 0_E$. On en déduit que $F^\perp = \{0_E\}$ or, comme F est de dimension finie, on sait d'après le cours que $F = (F^\perp)^\perp = \{0_E\}^\perp = E$ donc $E = F$ est bien de dimension finie et \mathcal{B} est une base orthonormale de E .

99 a. Pour $(P, Q) \in E^2$, $f : t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $] -1; 1[$ et on a $f(t) \underset{t \rightarrow 1^-}{=} O\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right) \underset{t \rightarrow 1^-}{=} O\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ et $f(t) \underset{t \rightarrow -1^+}{=} O\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right) \underset{t \rightarrow -1^+}{=} O\left(\frac{1}{\sqrt{1+t}}\right)$ car $1-t^2 = (1-t)(1+t)$ donc f est intégrable sur $] -1; 1[$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN, ce qui garantit l'existence de $(P|Q)$.

La bilinéarité de $(\cdot | \cdot)$ est garantie par la linéarité de l'intégrale.

La symétrie de $(\cdot | \cdot)$ provient du fait que $\forall t \in] -1; 1[, P(t)Q(t) = Q(t)P(t)$.

L'aspect défini positif $(\cdot | \cdot)$ découle de la positivité de l'intégrale car pour tout $P \in E$, $t \mapsto \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}$ est une fonction positive donc $(P|P) \geq 0$. De plus, si $(P|P) = 0$, la fonction $t \mapsto \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}$ est positive et continue sur $] -1; 1[$ et d'intégrale nulle donc, d'après le cours, elle est nulle ce qui impose $\forall t \in] -1; 1[, P(t) = 0$. Ainsi, P admet une infinité de racines donc $P = 0$.

Tout ceci fait de $(\cdot | \cdot)$ un produit scalaire sur E .

b. D'abord une récurrence pour l'existence d'une telle suite :

Initialisation : si on pose $T_0 = 1$ et $T_1 = X$, on a bien $(T_0, T_1) \in E^2$ et $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0 \cdot \theta)$ et $T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta) = \cos(1 \cdot \theta)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et $(T_n, T_{n+1}) \in E^2$ tels que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$, $T_{n+1}(\cos(\theta)) = \cos((n+1)\theta)$.

Posons $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$, on a bien $T_{n+2} \in E$ et, comme $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$, on a $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_{n+2}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) = \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) - \cos(n\theta) = \cos((n+2)\theta)$.

Par principe de récurrence, cette suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

Pour l'unicité : si une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ vérifie aussi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $U_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$, comme $\theta \mapsto \cos(\theta)$ est surjective de \mathbb{R} dans $[-1; 1]$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [-1; 1]$, $T_n(x) = U_n(x)$ donc, T_n et U_n coïncident en une infinité de valeurs, $U_n = T_n$.

c. T_0 est de degré 0 et de coefficient dominant 1, il est à part dans la récurrence qui suit.

Initialisation : T_1 est de degré 1 et de coefficient dominant 1 car $T_1 = X$, T_2 de degré 2 et de coefficient dominant 2 car $T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} et T_{n+1} est de degré $n+1$ et de coefficient dominant 2^n . Alors, comme $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ et que $\deg(2XT_{n+1}) = n+2 > n = \deg(-T_n)$, on sait d'après le cours que $\deg(T_{n+2}) = n+2$. De plus, le coefficient dominant de T_{n+2} ne provient que du terme $2XT_{n+1}$, donc il vaut $\text{dom}(T_{n+2}) = 2\text{dom}(T_{n+1}) = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} = 2^{(n+2)-1}$.

Conclusion : par principe de récurrence double, on a établi que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(T_n) = n$ et $\text{dom}(T_n) = 2^{n-1}$.

d. Avec les notations de la question a., comme la fonction f est continue sur $] - 1; 1[$ et que la fonction $\varphi : \theta \mapsto \cos(\theta)$ est une bijection strictement décroissante de classe C^1 de $]0; \pi[$ dans $] - 1; 1[$, on a la relation $(P|Q) = \int_{\pi}^0 \frac{P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))}{\sqrt{1 - \cos^2(\theta)}} (-\sin(\theta))d\theta = \int_0^{\pi} P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))d\theta$ en ayant posé le changement de

variable $t = \cos(\theta) = \varphi(\theta)$. Calculons, pour $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, la valeur de $(T_n|T_m)$.

• Si $n \neq m$, on a la relation $(T_n|T_m) = \int_0^{\pi} T_n(\cos(\theta))T_m(\cos(\theta))d\theta = \int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta$ donc

$$(T_n|T_m) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos((n+m)\theta) + \cos(n-m)\theta))d\theta = \frac{1}{2} \left(\left[\frac{\sin((n+m)\theta)}{n+m} \right]_0^{\pi} + \left[\frac{\sin((n-m)\theta)}{n-m} \right]_0^{\pi} \right) = 0.$$

• Si $n = m = 0$, on a $(T_0|T_0) = \int_0^{\pi} T_0(\cos(\theta))^2d\theta = \pi$ donc $\|T_0\| = \sqrt{\pi}$.

• Si $n = m > 0$, on a $(T_n|T_n) = \int_0^{\pi} T_n(\cos(\theta))^2d\theta = \int_0^{\pi} \cos(n\theta)^2d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos(2n\theta))d\theta$ donc

$$(T_n|T_n) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2n\theta)}{2n} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \text{ donc } \|T_n\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Ainsi, la famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$ et la famille $\left(\frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \right) \amalg \left(\frac{\sqrt{2}T_n}{\sqrt{\pi}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}[X]$.

100

101 a. La fonction Tr est une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car $\text{Tr}(I_n) = n \neq 0$. Ainsi, d'après le cours, $H = \text{Ker}(\text{Tr})$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\dim(H) = n^2 - 1$.

b. Par définition de H , pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $M \in H \iff \text{Tr}(M) = 0 \iff (M|I_n) = 0$. Ainsi, $I_n \in H^\perp$ ce qui, comme H^\perp est une droite, prouve que $H^\perp = \text{Vect}(I_n)$.

c. Comme $I_n \in H^\perp$, si p_H est la projection orthogonale sur H , on a $p_H(I_n) = 0$. Or, d'après le cours, on dispose de la relation $d(I_n, H) = \|I_n - p_H(I_n)\|$ donc $d(I_n, H) = \|I_n\| = \sqrt{\text{Tr}(I_n)} = \sqrt{n}$.

d. Pour $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, par l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, puisque $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}$, on a la majoration

$$c_{i,j}^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2 \right). \text{ Ainsi, } \|AB\|^2 = \|C\|^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} c_{i,j}^2 \leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2 \right) \right) \text{ ce}$$

$$\text{qui donne } \|AB\|^2 \leq \sum_{i=1}^n \left(\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{k,j}^2 \right) \right) = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \times \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{k,j}^2 \right) = \|A\|^2 \|B\|^2. \text{ En}$$

passant à la racine, on a bien $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

102

a. D'après la formule du rang, comme E est de dimension finie et que $f - \text{id}_E \in \mathcal{L}(E)$, on a l'égalité $\dim(\text{Ker}(f - \text{id}_E)) = \dim(E) - \text{rang}(f - \text{id}_E) = \dim(E) - \dim(\text{Im}(f - \text{id}_E)) = \dim(\text{Im}(f - \text{id}_E)^\perp)$. De plus, soit $x \in \text{Ker}(f - \text{id}_E)$, alors $f(x) = x$. Pour $y \in \text{Im}(f - \text{id}_E)$, il existe un vecteur $z \in E$ tel que $y = f(z) - z$ donc $(x|y) = (x|f(z) - z) = (x|f(z)) - (x|z) = (f(x)|f(z)) - (x|z)$ car $f(x) = x$ donc $(x|y) = 0$ car f est une isométrie donc qu'elle conserve le produit scalaire. On vient de montrer que $\text{Ker}(f - \text{id}_E) \subset \text{Im}(f - \text{id}_E)^\perp$, et on conclut $\text{Ker}(f - \text{id}_E) = \text{Im}(f - \text{id}_E)^\perp$ avec l'égalité des dimensions.

b. Comme $(f - \text{id}_E)^2 = (f - \text{id}_E) \circ (f - \text{id}_E) = 0$, on a $\text{Im}(f - \text{id}_E) \subset \text{Ker}(f - \text{id}_E)$ donc, avec a., $\text{Im}(f - \text{id}_E) \subset \text{Im}(f - \text{id}_E)^\perp$. Si $x \in \text{Im}(f - \text{id}_E)$, on a donc $(x|x) = \|x\|^2 = 0$ donc $x = 0_E$ ce qui prouve que $\text{Im}(f - \text{id}_E) = \{0_E\}$ donc que $f = \text{id}_E$.

103 a. D'abord f est bien un endomorphisme de E par bilinéarité du produit scalaire. De plus, pour tout

$(x, y) \in E^2$, on a $(f(x)|y) = \left(\sum_{k=1}^n (e_k|x)e_k | y \right) = \sum_{k=1}^n (e_k|x)(e_k|y) = \left(x | \sum_{k=1}^n (e_k|y)e_k \right)$ par symétrie et linéarité du produit scalaire à gauche et à droite donc, par définition, f est un endomorphisme auto-adjoint de E .

Pour $x \in E$, $(f(x)|x) = \sum_{k=1}^n (e_k|x)^2 \geq 0$ et, si $x \neq 0_E$, comme $x \notin E^\perp = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)^\perp = \{0_E\}$, il existe un indice $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $(e_k|x) \neq 0$ ce qui donne $(f(x)|x) > 0$. On en déduit que $f \in S^{++}(E)$.

D'après le théorème spectral, χ_f est scindé sur \mathbb{R} et si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de f , il existe $x \neq 0_E$ tel que $f(x) = \lambda x$ donc $(f(x)|x) = (\lambda x|x) = \lambda \|x\|^2 > 0$ donc $\lambda > 0$ car $\|x\|^2 > 0$. Ainsi, f est autoadjoint à valeurs propres strictement positives.

b. Comme $0 \notin \text{Sp}(f)$, f est un automorphisme de E . En effet, si $x \in \text{Ker}(f)$, on a $f(x) = 0_E$ donc $(f(x)|x) = 0$ ce qui impose $x = 0_E$ d'après a. donc $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ ce qui montre que $f \in \text{GL}(E)$ car E est de dimension finie.

Comme f est autoadjoint, par le théorème spectral, il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ de E formée de vecteurs propres de f . Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres. Soit g l'unique endomorphisme de E tel que $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $g(v_k) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} v_k$. Alors $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $g^2(v_k) = g\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} v_k\right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} g(v_k) = \frac{1}{\lambda_k} v_k = f^{-1}(v_k)$.

Comme les endomorphismes g^2 et f^{-1} coïncident sur une base, on a $g^2 = f^{-1}$.

c. La famille $\mathcal{B} = (g(e_1), \dots, g(e_n))$ est de cardinal $n = \dim(E)$. Comme g est un automorphisme de E , \mathcal{B} est l'image par g de la base (e_1, \dots, e_n) donc \mathcal{B} est une base de E .

Pour $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $(g(e_i)|g(e_j)) = (e_i|g^2(e_j))$ car $g \in S(E)$ donc $(g(e_i)|g(e_j)) = (e_i|f^{-1}(e_j))$. En posant

$x_j = f^{-1}(e_j)$, on a $f(x_j) = e_j = \sum_{k=1}^n (e_k|x_j)e_k$ par définition de f donc, en identifiant les coordonnées du vecteur $e_j = \sum_{k=1}^n \delta_{k,j} e_k = \sum_{k=1}^n (e_k|x_j)e_k$ dans la base (e_1, \dots, e_n) , on trouve que $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $(e_k|x_j) = \delta_{k,j}$.

On a donc $(g(e_i)|g(e_j)) = \delta_{i,j}$ et \mathcal{B} est bien une base orthonormée de E .

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 8

PROBABILITÉ ET VARIABLES ALÉATOIRES

104

105 a. L'énoncé identifie sans vergogne \mathbb{R}^n et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car \mathbf{b} défini dans l'énoncé est un vecteur colonne.

Méthode 1 : soit λ une valeur propre de M telle que $\dim(E_\lambda(M)) \geq 2$, il existe donc deux vecteurs propres $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{n+1})$ et $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_{n+1})$ de M associés à λ tels que (\mathbf{a}, \mathbf{b}) est libre. Traitons deux cas :

- Si $a_{n+1} = 0$, le vecteur $\mathbf{v} = \mathbf{a}$ répond à la question.
- Si $a_{n+1} \neq 0$, le vecteur $\mathbf{v} = b_{n+1}\mathbf{a} - a_{n+1}\mathbf{b}$ est encore dans $E_\lambda(M)$ car $E_\lambda(M)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^{n+1} , il est non nul car (\mathbf{a}, \mathbf{b}) est libre et que $(a_{n+1}, b_{n+1}) \neq (0, 0)$ et sa $(n+1)$ -ième coordonnée dans la base canonique est nulle par construction donc \mathbf{v} convient.

Méthode 2 : soit l'hyperplan $H = \{v = (v_1, \dots, v_n, 0) \mid (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n\} = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ de \mathbb{R}^{n+1} et λ une valeur propre de M telle que $\dim(E_\lambda(M)) \geq 2$. On a donc $\dim(H) = n+1-1 = n$. Grâce à la formule de GRASSMANN, $\dim(H \cap E_\lambda(M)) = \dim(E_\lambda(M)) + \dim(H) - \dim(H + E_\lambda(M)) \geq 2+n - (n+1) = 1$ car $H + E_\lambda(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ donc il existe un vecteur non nul $v \in H \cap E_\lambda(M)$, c'est-à-dire un vecteur propre $v = (v_1, \dots, v_n, v_{n+1})$ de M tel que $v_{n+1} = 0$.

Avec un tel vecteur propre v qu'on écrit par blocs $v = \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $w \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$, l'équation $Mv = \lambda v$ se traduit par $b^T w = 0$ et $Aw = \lambda w$. Ainsi, comme $w \neq 0$ car $v \neq 0$ et que $Aw = \lambda w$, w est un vecteur propre de A associé à la même valeur propre λ .

b. L'équation $b^T w = 0$ se traduit aussi $(b|w) = 0$ avec le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n donc il existe bien un vecteur propre de A orthogonal à \mathbf{b} si M n'est pas simple, par exemple le vecteur w .

c. Notons $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & X_5 \\ 0 & X_5 & -1 \end{pmatrix}$, comme $N = \begin{pmatrix} A & b^T \\ b & c \end{pmatrix}$ est symétrique avec $b = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ et $c = X_4$, si on note

C l'évènement $C = \text{"il existe un vecteur propre de } A \text{ orthogonal } \mathbf{b}"$, on a $\bar{B} \subset C$ donc $P(\bar{B}) = 1 - P(B) \leq P(C)$ ce qui montre que $P(B) \geq 1 - P(C)$. Comme $X_5(\omega) = \{0, 1\}$, par la formule des probabilités totales, on a $P(C) = P(X_5 = 0)P(C|X_5 = 0) + P(X_5 = 1)P(C|X_5 = 1)$.

Si $X_5 = 0$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonale donc $\text{Sp}(A) = \{2, 1, -1\}$, $E_2(A) = \text{Vect}(e_1)$, $E_1(A) = \text{Vect}(e_2)$

et $E_{-1}(A) = \text{Vect}(e_3)$ donc C est réalisé si et seulement si $(e_1 \perp b)$ ou $(e_2 \perp b)$ ou $(e_3 \perp b)$.

Avec la formule du crible, il vient $P(C|X_5 = 0) = P(X_1 = 0) + P(X_2 = 0) + P(X_3 = 0) - P(X_1 = X_2 = 0) - P(X_1 = X_3 = 0) - P(X_2 = X_3 = 0) + P(X_1 = X_2 = X_3 = 0)$ donc $P(C|X_5 = 0) = 3(1-p) - 3(1-p)^2 + (1-p)^3$ par indépendance de X_1, X_2, X_3 .

Si $X_5 = 1$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et on a facilement $\chi_A = (X-2)(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$. Il est clair que

$E_2(A) = \text{Vect}(e_1)$ et, comme $A - \sqrt{2}I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, on a $E_{\sqrt{2}}(A) = \text{Vect}((1 + \sqrt{2})e_2 + e_3)$ et, de même, on a $E_{-\sqrt{2}}(A) = \text{Vect}((1 - \sqrt{2})e_2 + e_3)$. Ainsi, comme $e_1 \perp b \iff X_1 = 0$, $(1 + \sqrt{2})e_2 + e_3 \perp b \iff (1 + \sqrt{2})X_2 + X_3 = 0 \iff X_2 = X_3 = 0$ car $\sqrt{2}$ est irrationnel et $(1 - \sqrt{2})e_2 + e_3 \perp b \iff (1 - \sqrt{2})X_2 + X_3 = 0 \iff X_2 = X_3 = 0$ pour la même raison, C est réalisé si et seulement si $(X_1 = 0)$ ou $(X_2 = X_3 = 0)$ donc, toujours par indépendance de X_1, X_2, X_3 , $\mathbb{P}(C|X_5 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_2 = X_3 = 0) - \mathbb{P}(X_1 = X_2 = X_3 = 0) = (1-p) + (1-p)^2 - (1-p)^3$.

Avec tout ceci, on conclut que $\mathbb{P}(C) = (1-p)[3(1-p) - 3(1-p)^2 + (1-p)^3] + p[(1-p) + (1-p)^2 - (1-p)^3]$ qui se simplifie bien en $\mathbb{P}(C) = 1 - 3p^3 + 2p^4$. Au final, $\mathbb{P}(B) \geq 3p^3 - 2p^4$.

106 a. Pour $t \in [-1; 1]$, comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\mathbb{P}(X = n)t^n| \leq \mathbb{P}(X = n)$ et que $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = n)$ converge, par comparaison, la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = n)t^n$ converge aussi donc la domaine de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = n)t^n$ contient $[-1; 1]$ et le rayon de convergence R de cette série vérifie bien $R \geq 1$. En posant $u_n : t \mapsto \mathbb{P}(X = n)t^n$, on a $\|u_n\|_{\infty, [-1; 1]} = \mathbb{P}(X = n)$ donc la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge normalement sur $[-1; 1]$ donc, comme toutes les fonctions u_n sont continues sur $[-1; 1]$, la fonction G_X est continue sur $[-1; 1]$.

b. Soit $g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(t) = G_X(t) - t$ qui existe et est continue sur $[0; 1]$ d'après **a.** Une fonction somme d'une série entière est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence donc, d'après **a.**, G_X est au moins dérivable sur $]0; 1[$ donc g est dérivable sur $]0; 1[$ et $\forall t \in]0; 1[$, $g'(t) = -1 + \sum_{n=1}^{+\infty} n \mathbb{P}(X = n)t^{n-1}$ donc $g'(t) \leq -1 + \sum_{n=1}^{+\infty} n \mathbb{P}(X = n) = -1 + \mathbb{E}(X) < 0$ car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $t^{n-1} \leq 1$. Ainsi, g est strictement décroissante et continue sur $]0; 1[$ donc, comme $g(0) = \mathbb{P}(X = 0) \geq 0$ et $\lim_{t \rightarrow 1^-} g(t) = g(1) = G_X(1) - 1 = 0$, l'application g réalise une bijection de $]0; 1[$ dans $]0; \mathbb{P}(X = 0)[\subset \mathbb{R}^*$ donc g ne s'annule pas sur $]0; 1[$: l'équation $G_X(x) = x$ n'admet pas de solution sur $]0; 1[$.

c. On pose à nouveau $g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(t) = G_X(t) - t$ qui est continue sur $[0; 1]$ et de classe C^2 sur $]0; 1[$ car $R \geq 1$. De plus, $\forall t \in]0; 1[$, $g''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \mathbb{P}(X = n)t^{n-2} \geq 0$ car $\forall n \geq 2$, $t^{n-2} \geq 0$. Mieux, si on avait $\forall n \geq 2$, $\mathbb{P}(X = n) = 0$, on aurait $\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(X = 1) \leq 1$, ce qui est contraire à l'énoncé, ainsi, $\forall t \in]0; 1[$, $g''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \mathbb{P}(X = n)t^{n-2} > 0$ car $\forall n \geq 2$, $t^{n-2} > 0$. Ainsi, g est strictement convexe sur $]0; 1[$ et g' strictement croissante sur $]0; 1[$. Comme $g'(0) = \mathbb{P}(X = 1) - 1 \leq 0$ et $g'(1) = G'_X(1) = \mathbb{E}(X) - 1 > 0$, que $g(0) \geq 0$ et $g(1) = 0$, on a forcément $g'(0) < 0$ sinon g' serait positive donc g croissante donc nulle sur $]0; 1[$ ce qui est absurde car $g'(1) > 0$. Ainsi, g' réalise une bijection strictement croissante de $]0; 1[$ dans $]g'(0), g'(1)[$ donc il existe un unique $\alpha \in]0; 1[$ tel que $g'(\alpha) = 0$. La fonction g est donc strictement décroissante de $]0; \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha; 1]$. Comme $g(1) = 0$, on a forcément $g(\alpha) < 0$, et puisque $g(0) \geq 0$ et $g(\alpha) < 0$, il existe un unique $x \in [0; \alpha[\subset]0; 1[$ et $g(x) = 0$ et l'équation $g(x) = x$ n'a pas de solution dans $[\alpha; 1]$. Au final, l'équation $G_X(x) = x$ admet une unique solution sur $]0; 1[$.

d. Pour $n \geq 2$, puisque X_1, \dots, X_n sont indépendantes et suivent toutes la loi de BERNOULLI de paramètre p_n , on sait d'après le cours que $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_{Y_n}(t) = \prod_{k=1}^n G_{X_k}(t) = \prod_{k=1}^n (1 - p_n + tp_n) = (1 + p_n(t - 1))^n$.

Ainsi, $G_{Y_n}(t) = \left(1 + \frac{\lambda}{n}(t-1)\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{\lambda}{n}(t-1)\right)\right)$. Comme $\ln\left(1 + \frac{\lambda}{n}(t-1)\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}(t-1)$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{\lambda}{n}(t-1)\right) = \lambda(t-1)$ donc, par continuité de \exp , $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_{Y_n}(t) = e^{\lambda(t-1)}$. On sait que $t \mapsto e^{\lambda(t-1)}$ est la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi de POISSON de paramètre λ .

On a montré dans le cours que la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergeait en loi vers une variable aléatoire X suivant la loi de POISSON de paramètre λ . En effet, soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \geq k$, comme Y_n suit d'après le cours la loi binomiale de paramètre n et p , $\mathbb{P}(Y_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} \times (1-p_n)^{-k} \times \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{n \cdot n \cdots n} \times (1-p_n)^n$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1-p_n)^n = e^{-\lambda}$ comme avant, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1-p_n)^{-k} = 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{n \cdot n \cdots n} = 1$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \text{ comme attendu.}$$

e. Pour $t \in [0; 1]$ par exemple (plus généralement pour t tel que la série converge absolument), par définition, $G_Z(t) = \mathbb{E}(t^Z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} t^k \mathbb{P}(Z = k)$. Pour $k \in \mathbb{N}$, $(Z = k) = \bigsqcup_{n=k}^{+\infty} (Z = k, Y = n)$ donc, par σ -additivité, on

a la relation $\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = k, Y = n)$ donc $G_Z(t) = \sum_{\substack{(k,n) \in \mathbb{N}^2 \\ n \geq k}} t^k \mathbb{P}(Z = k, Y = n)$ qui s'écrit

aussi $G_Z(t) = \sum_{\substack{(k,n) \in \mathbb{N}^2 \\ n \geq k}} t^k \mathbb{P}(Y = n, X_1 + \cdots + X_n = k)$. Puis, par indépendance de Y et des X_i , on arrive

à $G_Z(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(Y = n) \sum_{k=0}^n t^k \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n = k) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(Y = n) G_{X_1 + \cdots + X_n}(t)$ ce qui donne, par

indépendance des variables aléatoires X_1, \dots, X_n , la relation $G_Z(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(Y = n) G_{X_1}(t)^n = G_Y(G_{X_1}(t))$.

f. On suppose implicitement dans cette question que les variables aléatoires Y et X_1 admettent des espérances finies, donc qu'elles sont dérivables en 1 d'après le cours, ce qui montre par composition que G_Z est elle-même dérivable en 1 et, d'après le cours, que la variable aléatoire Z est d'espérance finie.

On sait aussi que $\mathbb{E}(Z) = G'_Z(1) = G'_{X_1}(1) G'_Y(G_{X_1}(1)) = \mathbb{E}(X_1) \mathbb{E}(Y)$: c'est la formule de WALD.

g. En notant Y le nombre d'œufs pondus, on a $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$, et si on note $X_i = 1$ si l'œuf numéro i éclôt et $X_i = 0$ sinon, on a $X_i \sim \mathcal{B}(\alpha)$. On peut supposer les œufs indépendants entre eux et indépendants de Y

donc, en notant Z le nombre d'œufs éclos, on a $Z = \sum_{i=1}^Y X_i$ donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_Z(t) = G_Y(G_{X_1}(t))$ d'après **e.**

donc $G_Z(t) = e^{\lambda((1-p)+pt)-1} = e^{\lambda p(t-1)}$ donc, comme la fonction génératrice donne la loi, Z suit la loi de POISSON de paramètre $\alpha \lambda > 0$.

107

108

109 a. Soit une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements, les propriétés de continuité monotone sont :

- Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion, alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
- Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, alors $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

b. Posons l'événement $U_N = \bigcup_{n=0}^N A_n$ pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, alors $U_{N+1} = U_N \cup A_{N+1}$ donc $U_N \subset U_{N+1}$

et la suite $(U_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion. D'après le théorème de continuité croissante, on a donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(U_N) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} U_N\right). \text{ Montrons que } \bigcup_{N=0}^{+\infty} U_N = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n.$$

$$(C) \text{ Si } \omega \in \bigcup_{N=0}^{+\infty} U_N, \exists N \in \mathbb{N}, \omega \in U_N = \bigcup_{n=0}^N A_n \text{ donc } \exists n \in \llbracket 0; N \rrbracket, \omega \in A_n \text{ et on a bien } \omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n.$$

$$(D) \text{ Si } \omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n, \exists n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n \subset U_n \text{ donc } \omega \in U_n \text{ avec } N = n \text{ et on a bien } \omega \in \bigcup_{N=0}^{+\infty} U_N.$$

Par double inclusion, on a établi que $\bigcup_{N=0}^{+\infty} U_N = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ donc, que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^N A_n\right)$.

Puisque A_0, \dots, A_N sont indépendantes, on sait d'après le cours que $\overline{A_0}, \dots, \overline{A_N}$ le sont aussi.

c. Traitons deux cas :

- S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(A_{n_0}) = 1$, comme $A_{n_0} \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1$ et $\ln(\mathbb{P}(\overline{A_{n_0}})) = -\infty$ donc $\sum_{n \geq 0} \ln(\mathbb{P}(\overline{A_n}))$ diverge (en mode famille sommable). L'équivalence dans ce cas est bien vérifiée.

- Si $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(A_n) < 1$, $\ln(\mathbb{P}(\overline{A_n}))$ est un réel et, pour $N \in \mathbb{N}$, on a $\prod_{n=0}^N \mathbb{P}(\overline{A_n}) > 0$. Ainsi, $\ln\left(\prod_{n=0}^N \mathbb{P}(\overline{A_n})\right) = \sum_{n=0}^N \ln(\mathbb{P}(\overline{A_n}))$ est la somme partielle d'ordre N de la série $\sum_{N \geq 0} \ln(\mathbb{P}(\overline{A_N}))$ à termes négatifs. Traitons à nouveau deux cas :

- Si la série numérique $\sum_{N \geq 0} \ln(\mathbb{P}(\overline{A_N}))$ diverge, ses sommes partielles tendent vers $-\infty$ donc

$$\prod_{n=0}^N \mathbb{P}(\overline{A_n}) = \exp\left(\ln\left(\prod_{n=0}^N \mathbb{P}(\overline{A_n})\right)\right) \text{ tend vers } 0 \text{ quand } N \text{ tend vers } +\infty \text{ car } \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0.$$

D'après la question **b.**, on a donc $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 - 0 = 1$.

- Si la série numérique $\sum_{N \geq 0} \ln(\mathbb{P}(\overline{A_N}))$ converge, ses sommes partielles tendent vers un réel négatif

$$S \text{ donc } \prod_{n=0}^N \mathbb{P}(\overline{A_n}) = \exp\left(\ln\left(\prod_{n=0}^N \mathbb{P}(\overline{A_n})\right)\right) \text{ tend vers } e^S \in]0; 1] \text{ quand } N \text{ tend vers } +\infty \text{ par}$$

continuité de \exp . D'après la question **b.**, on a donc $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 - e^S < 1$.

L'équivalence est aussi respectée dans ce cas.

Les deux cas étant les seuls possibles, on a l'équivalence $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 \iff \sum_{n \geq 0} \ln(\mathbb{P}(\overline{A_n}))$ diverge.

d. Traitons trois cas :

- S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(A_{n_0}) = 1$, on a comme avant $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1$ mais il est très possible que la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge, par exemple en prenant $A_0 = \Omega$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n = \emptyset$. L'énoncé n'est donc pas vrai dans tous les cas.

- Si $(\mathbb{P}(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend vers 0, alors $(\mathbb{P}(\overline{A_n}))_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 1 donc $(\ln(\mathbb{P}(\overline{A_n})))_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 (par continuité de \ln et \exp) donc la série $\sum_{n \geq 0} \ln(\mathbb{P}(\overline{A_n}))$ diverge grossièrement et, d'après

la question **c.**, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1$.

• Si $(\mathbb{P}(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, comme $\ln(\mathbb{P}(\overline{A_n})) = \ln(1 - \mathbb{P}(A_n))$, on a $\ln(\mathbb{P}(\overline{A_n})) \sim -\mathbb{P}(A_n) \leq 0$ donc, par comparaison de séries à termes négatifs, $\sum_{n \geq 0} \ln(\mathbb{P}(\overline{A_n}))$ diverge $\iff \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ diverge.

D'après la question **c.**, on a donc, dans ce cas, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 \iff \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ diverge.

On peut donc conclure, par exemple, que si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'évènements mutuellement indépendants non presque sûrs, alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 \iff \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ diverge.

110 a. On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive si $M^T = M$ et si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T M X \geq 0$ (matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ identifiée à un réel). On a vu dans le cours que pour une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a M positive si et seulement si son spectre est inclus dans \mathbb{R}_+ . En effet :

(\implies) D'après le théorème spectral, χ_M n'a que des racines réelles. Soit $\lambda \in \text{Sp}(M)$, il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $MX = \lambda X$. Alors $X^T M X = \lambda X^T X = \lambda \|X\|^2 \geq 0$ donc, comme $\|X\| > 0$, on a $\lambda \geq 0$. Ainsi, $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+$.

(\impliedby) Si $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+$, soit une base orthonormale $\mathcal{B} = (V_1, \dots, V_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M . Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres positives associées respectivement aux vecteurs V_1, \dots, V_n . Pour $X = \sum_{k=1}^n x_k V_k \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ décomposé dans la base \mathcal{B} , on a $MX = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k V_k$ donc $X^T M X = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2 \geq 0$.

b. Comme les variables aléatoires X_1, \dots, X_n admettent des moments d'ordre 2 par hypothèse, on a vu dans le cours que $\text{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}((X_i - \mathbb{E}(X_i))(X_j - \mathbb{E}(X_j)))$ était bien défini pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ et vérifiait $\text{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i) \mathbb{E}(X_j)$. Ceci assure l'existence de la matrice R_X .

Par symétrie de la covariance, la matrice R_X est symétrique et, pour $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, si $Y^T = (y_1 \ \dots \ y_n)$, on a $Y^T R_X Y = \sum_{1 \leq i, j \leq n} y_i y_j \text{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^n y_k X_k\right)$ par bilinéarité de la covariance et avec une formule du cours. Comme une variance est toujours positive car $\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}((Z - \mathbb{E}(Z))^2)$ par définition si Z admet un moment d'ordre 2, d'après **a.**, on put conclure que $R_X \in S_n^+(\mathbb{R})$.

c. Pour $n = 2$, la matrice $R_X = \begin{pmatrix} \mathbb{V}(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \mathbb{V}(X_2) \end{pmatrix}$ étant symétrique positive d'après **b.**, ses deux valeurs propres λ_1, λ_2 sont positives d'après **a.** donc, puisque χ_{R_X} est scindé sur \mathbb{R} par le théorème spectral, $\det(R_X) = \lambda_1 \lambda_2 \geq 0$ ce qui équivaut à $\mathbb{V}(X_1) \mathbb{V}(X_2) - \text{Cov}(X_1, X_2)^2 \geq 0$, ou encore, comme $\mathbb{V}(X_1) \geq 0$ et $\mathbb{V}(X_2) \geq 0$, à la majoration $|\text{Cov}(X_1, X_2)| \leq \sqrt{\mathbb{V}(X_1)} \sqrt{\mathbb{V}(X_2)}$.

111 Bien sûr, on suppose les tirages indépendants entre eux et le tirage d'une boule dans une urne à chaque étape uniforme. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose l'évènement $R_n =$ "on tire une boule rouge au tirage n ".

a. Soit $n \geq 0$ et $k \in \llbracket 0; N-1 \rrbracket$, on a deux possibilités pour avoir k boules rouges au bout de $n+1$ tirages :

- soit on a $k+1$ boules rouges au bout de n tirages et on a tiré une boule rouge au tirage $n+1$ qui a été remplacée par une boule verte.
- soit on a déjà k boules rouges au bout de n tirages et on a tiré une boule verte au tirage $n+1$.

Ceci se traduit par $(X_{n+1} = k) = ((X_n = k) \cap \overline{R_{n+1}}) \sqcup ((X_n = k+1) \cap R_{n+1})$. Par incompatibilité de ces deux évènements, $\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \mathbb{P}_{(X_n=k)}(\overline{R_{n+1}}) \mathbb{P}(X_n = k) + \mathbb{P}_{(X_n=k+1)}(R_{n+1}) \mathbb{P}(X_n = k+1)$ (1).

Ou alors, comme $X_n(\Omega) \subset \llbracket N - n; N \rrbracket$, avec le système complet d'évènements $((X_n = i))_{N-n \leq i \leq N}$ et la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(X_n + 1 = k) = \sum_{i=N-n}^N \mathbb{P}(X_n = i) \mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = k)$ sachant que $i \neq k$ et $i \neq k + 1$, $\mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = k) = 0$, ce qui donne à nouveau la formule (1).

Or, si $X_n = k$, il y a dans l'urne k boules rouges et $N - k$ boules vertes donc $\mathbb{P}_{(X_n=k)}(\overline{R_{n+1}}) = \frac{N-k}{N}$. Et si $X_n = k + 1$, il y a dans l'urne $k + 1$ boules rouges et $N - k - 1$ boules vertes donc $\mathbb{P}_{(X_n=k)}(R_{n+1}) = \frac{k+1}{N}$. Ainsi, avec la relation (1), on a $\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \frac{N-k}{N} \mathbb{P}(X_n = k) + \frac{k+1}{N} \mathbb{P}(X_n = k + 1)$.

Il reste à parler des cas particuliers :

- si $n = 0$ et $k = N$, on a $(X_1 = N) = (X_0 = N + 1) = \emptyset$ et $(X_0 = N) = \Omega$ donc, comme $\frac{N-N}{N} = 0$, on a encore la relation $\mathbb{P}(X_{0+1} = N) = \frac{N-N}{N} \mathbb{P}(X_0 = N) + \frac{N+1}{N} \mathbb{P}(X_0 = N + 1) = 0$.
- si $n = 0$ et $k > N$, on a $(X_1 = N) = (X_0 = k + 1) = (X_0 = k) = \emptyset$ donc on a encore la relation $\mathbb{P}(X_{0+1} = k) = \frac{N-k}{N} \mathbb{P}(X_0 = k) + \frac{k+1}{N} \mathbb{P}(X_0 = k + 1) = 0$.
- si $(n \geq 1 \text{ et } k \geq N)$ ou $(n = 0 \text{ et } k > N)$, on a $(X_{n+1} = N) = \emptyset = (X_n = N) = (X_n = N + 1)$ donc on a toujours la relation $\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \frac{N-k}{N} \mathbb{P}(X_n = k) + \frac{k+1}{N} \mathbb{P}(X_n = k + 1) = 0$.

Ainsi, dans tous les cas, $\forall n \geq 0, \forall k \geq 0, \mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \frac{N-k}{N} \mathbb{P}(X_n = k) + \frac{k+1}{N} \mathbb{P}(X_n = k + 1)$.

b. Pour $n \geq 0$, on a $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \sum_{k=0}^N k \mathbb{P}(X_{n+1} = k)$ car $X_n(\Omega) \subset \llbracket 0; N \rrbracket$ donc, avec la question précédente, il vient $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \sum_{k=0}^N k \left(\frac{N-k}{N} \mathbb{P}(X_n = k) + \frac{k+1}{N} \mathbb{P}(X_n = k+1) \right)$ qu'on décompose, puisque $k = (k+1) - 1$, en $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \sum_{k=0}^N k \mathbb{P}(X_n = k) - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N k^2 \mathbb{P}(X_n = k) + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N (k+1)^2 \mathbb{P}(X_n = k+1) - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N (k+1) \mathbb{P}(X_n = k+1)$.

Après simplification et changement d'indice, comme $\mathbb{P}(X_n = N + 1) = 0$, il ne reste dans cette formule que $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \sum_{k=0}^N k \mathbb{P}(X_n = k) - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (k+1) \mathbb{P}(X_n = k+1) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \mathbb{E}(X_n)$.

c. $(\mathbb{E}(X_n))_{n \geq 0}$ est géométrique et, comme $\mathbb{E}(X_0) = N, \forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(X_n) = N \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$ avec $1 - \frac{1}{N} \in]-1; 1[$. Or $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^N k \mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=1}^N k \mathbb{P}(X_n = k) \geq \sum_{k=1}^N \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X_n \geq 1)$ donc $0 \leq \mathbb{P}(X_n \geq 1) \leq \mathbb{E}(X_n)$. Comme X_n est à valeurs positives, on a aussi directement $\mathbb{P}(X_n \geq 1) \leq \frac{\mathbb{E}(X_n)}{1} = \mathbb{E}(X_n)$ par inégalité de

MARKOV. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n) = 0$, par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \geq 1) = 0$.

Comme $\frac{\mathbb{E}(X_n)}{N} = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n = \exp\left(N \ln\left(1 - \frac{1}{N}\right)\right)$ et $\ln\left(1 - \frac{1}{N}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{N}$ donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} N \ln\left(1 - \frac{1}{N}\right) = -1$, par continuité de \exp , on a $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}(X_n)}{N} = \frac{1}{e} \sim 0,37$.

d. On a $Y = 0$ si et seulement si il reste des boules rouges (il y en a au moins une dans l'urne) à toutes les étapes. Ainsi, $(Y = 0) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} (X_n \geq 1)$ donc on a bien $(Y = 0) \subset \bigcap_{k=1}^n (X_k \geq 1)$ pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Comme la suite d'évènements $((X_k \geq 1))_{k \geq 1}$ est décroissante car si $X_{k+1} \geq 1$, a fortiori, on a $X_k \geq 1$, on a $(Y = 0) \subset \bigcap_{k=1}^n (X_k \geq 1) = (X_n \geq 1)$. Par croissance de \mathbb{P} , il vient $0 \leq \mathbb{P}(Y = 0) \leq \mathbb{P}(X_n \geq 1)$ donc, par

encadrement, $\mathbb{P}(Y = 0) = 0$ en passant à la limite dans cette double inégalité d'après **c.**

112

113 a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(Y = n + 2) = (C_n, X_{n+1} = 0, X_{n+2} = 1, X_{n+3} = 1)$ avec les conditions de l'expérience. Or C_n ne concerne que les variables aléatoires X_1, \dots, X_n donc, par le lemme des coalitions, $C_n, X_{n+1}, X_{n+2}, X_{n+3}$ sont indépendantes donc $\mathbb{P}(Y = n + 2) = \mathbb{P}(C_n) \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) \mathbb{P}(X_{n+2} = 1) \mathbb{P}(X_{n+3} = 1)$ et on a bien $\mathbb{P}(Y = n + 2) = \frac{\mathbb{P}(C_n)}{8}$ car X_n, X_{n+1}, X_{n+2} suivent la loi de BERNOULLI de paramètre $\frac{1}{2}$.

b. Pour $n \geq 4$, si l'évènement C_n est réalisé, on ne peut pas commencer par $X_1 = X_2 = 1$. Ainsi, on peut écrire $C_n = (C_n, X_1 = 0) \sqcup (C_n, X_1 = 1, X_2 = 0)$ (réunion de deux évènements incompatibles) donc $\mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}(C_n, X_1 = 0) + \mathbb{P}(C_n, X_1 = 1, X_2 = 0)$. Par les probabilités conditionnelles, on obtient $\mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}(X_1 = 0) \times \mathbb{P}_{(X_1=0)}(C_n) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) \times \mathbb{P}_{(X_1=1, X_2=0)}(C_n)$. Si $X_1 = 0$, c'est comme si on repartait au point de départ après un tirage donc $\mathbb{P}_{(X_1=0)}(C_n) = \mathbb{P}(C_{n-1})$. De même, si $X_1 = 1$ et $X_2 = 0$, on repart au point de départ après deux étapes donc $\mathbb{P}_{(X_1=1, X_2=0)}(C_n) = \mathbb{P}(C_{n-2})$. On a donc bien la relation $\mathbb{P}(C_n) = \frac{\mathbb{P}(C_{n-1})}{2} + \frac{\mathbb{P}(C_{n-2})}{4}$.

Pour être totalement "rigoureux", mais la méthode précédente suffit largement à l'oral, on peut écrire l'égalité $(C_n, X_1 = 0) = (X_1 = 0) \cap \left(\bigcap_{k=2}^{n-1} (X_k = X_{k+1} = 1) \right)$ donc, par le lemme des coalitions, comme ci-dessus,

$\mathbb{P}(C_n, X_1 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0) \times \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=2}^{n-1} (X_k = X_{k+1} = 1)\right)$. Mais la famille de variables aléatoires (X_2, \dots, X_n)

suit la même loi que (X_1, \dots, X_{n-1}) d'où $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=2}^{n-1} (X_k = X_{k+1} = 1)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-2} (X_k = X_{k+1} = 1)\right)$. Et comme

on a $(C_{n-1}) = \bigcap_{k=1}^{n-2} (X_k = X_{k+1} = 1)$ par définition, $\mathbb{P}(C_n, X_1 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0) \mathbb{P}(C_{n-1}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(C_{n-1})$. De

la même manière, on montre que $\mathbb{P}(C_n, X_1 = 1, X_2 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 1) \mathbb{P}(X_2 = 0) \mathbb{P}(C_{n-2})$.

De nouveau, on retrouve la relation $\mathbb{P}(C_n) = \frac{\mathbb{P}(C_{n-1})}{2} + \frac{\mathbb{P}(C_{n-2})}{4}$.

On vérifie que cette relation est encore vraie si $n = 3$, en effet $C_1 = \Omega$ donc $\mathbb{P}(C_1) = 1$. On aussi $\mathbb{P}(C_2) = \frac{3}{4}$ car $C_2 = (X_1 = 1, X_2 = 0) \sqcup (X_1 = 0, X_2 = 0) \sqcup (X_1 = 0, X_2 = 1)$ et on a $\mathbb{P}(C_3) = \frac{5}{8}$ car

$C_3 = (X_1 = 1, X_2 = 0) \sqcup (X_1 = 0, X_2 = 0) \sqcup (X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0)$ et $\frac{5}{8} = \mathbb{P}(C_3) = \frac{\mathbb{P}(C_2)}{2} + \frac{\mathbb{P}(C_1)}{4} = \frac{3}{8} + \frac{1}{4}$.

c. Soit l'équation caractéristique $(E_c) : z^2 = \frac{z}{2} + \frac{1}{4}$ associée à la récurrence linéaire de question précédente.

Les solutions de (E_c) sont $r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \sim 0,81$ et $r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \sim -0,31$. Il existe donc deux réels a et b tels que l'on ait $\forall n \geq 1, \mathbb{P}(C_n) = ar_1^n + br_2^n$. Comme $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(C_n) = 0$. Plus précisément, comme $\mathbb{P}(C_1) = 1$ et $\mathbb{P}(C_2) = \frac{3}{4}$, après calculs, pour tout $n \geq 1$, on obtient la relation

$\mathbb{P}(C_n) = \frac{2(5 + 2\sqrt{5})r_1^n - \sqrt{5}(\sqrt{5} - 1)r_2^n}{5(1 + \sqrt{5})}$. Ainsi, d'après la question **a.**, pour tout entier $n \geq 3$, on arrive à

$\mathbb{P}(Y_n) = \frac{\mathbb{P}(C_{n-2})}{8} = \frac{2(5 + 2\sqrt{5})r_1^{n-2} - \sqrt{5}(\sqrt{5} - 1)r_2^{n-2}}{40(1 + \sqrt{5})}$. Or $Y_1 = (X_1 = X_2 = 1)$ donc $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{4}$ et

$(Y = 2) = (X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1)$ donc $\mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{8}$. Comme $\overline{(Y = 0)} = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} (Y = n)$, par σ -additivité, on a $1 - \mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{2(5 + 2\sqrt{5})r_1^{n-2} - \sqrt{5}(\sqrt{5} - 1)r_2^{n-2}}{40(1 + \sqrt{5})} \right)$. On trouve $\mathbb{P}(Y = 0) = 0$ après calculs.

Beaucoup plus simple, on pouvait constater que $(Y = 0) \subset C_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $0 \leq \mathbb{P}(Y = 0) \leq \mathbb{P}(C_n)$ et, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on arrive plus vite à $\mathbb{P}(Y = 0) = 0$ comme attendu.

d. D'après les questions **a.** et **b.**, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y = n + 2) = \frac{\mathbb{P}(Y = n + 1)}{2} + \frac{\mathbb{P}(Y = n)}{4}$. On a même $\mathbb{P}(Y = 2) = \frac{\mathbb{P}(Y = 1)}{2} + \frac{\mathbb{P}(Y = 0)}{4}$ car $\mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{8}$, $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(Y = 0) = 0$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y = n + 2) = \frac{\mathbb{P}(Y = n + 1)}{2} + \frac{\mathbb{P}(Y = n)}{4}$ (1). Il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(Y = n) \underset{+\infty}{\sim} kr_1^n$ ce qui assure l'existence de $\mathbb{E}(Y)$ et de la fonction génératrice G_Y de Y sur $\left] -\frac{1}{r_1}; \frac{1}{r_1} \right[$.

Méthode 1 : d'après (1), on a $\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(Y = 1) + \sum_{n=2}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2} \mathbb{P}(Y = n - 1) + \frac{1}{4} \mathbb{P}(Y = n - 2) \right)$.

On a aussi $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{P}(Y = 1) + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} (n - 1 + 1) \mathbb{P}(Y = n - 1) + \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{+\infty} (n - 2 + 2) \mathbb{P}(Y = n - 2)$ car les deux séries convergent, ce qui devient, après séparation des séries convergentes et car $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = n) = 1$ d'après la question **c.**, $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \mathbb{E}(Y) + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \mathbb{E}(Y) + \frac{1}{2}$.

On pouvait écrire $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{P}(Y = 1) + \sum_{n=2}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2} \mathbb{P}(Y + 1 = n) + \frac{1}{4} \mathbb{P}(Y + 2 = n) \right) = \frac{1}{4} + \frac{\mathbb{E}(Y + 1)}{2} + \frac{\mathbb{E}(Y + 2)}{4}$ avec le même résultat. On trouve finalement la valeur $\mathbb{E}(Y) = 5$ (6 tirages).

Méthode 2 : on multiplie l'équation (1) par t^{n+2} pour $t \in \left] -\frac{1}{r_1}; \frac{1}{r_1} \right[$ et on somme, ce qui donne la relation

$$G_Y(t) - \frac{t}{4} = \frac{tG_Y(t)}{2} + \frac{t^2G_Y(t)}{4} \text{ car } \mathbb{P}(Y = 0) = 0 \text{ et } \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{4}. \text{ Par conséquent, } G_Y(t) = \frac{t}{4 - 2t - t^2}.$$

Comme G_Y est dérivable en 1 car $1 \in \left] -\frac{1}{r_1}; \frac{1}{r_1} \right[$, on a $\mathbb{E}(Y) = G'_Y(1) = 5$ car $G'_Y(t) = \frac{4 + t^2}{(4 - 2t - t^2)^2}$.

114

115

116

117 On modélise avec $\Omega = S_n$ l'ensemble des permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$, on sait que $\text{card}(S_n) = n!$, et $X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$ et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ donc X est une variable aléatoire.

Il n'existe qu'une permutation où tous les termes sont croissant, il s'agit de l'identité, donc $\text{card}(X = n) = 1$.

Par contre, si $k \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket$, voici le protocole de choix pour les permutations telles que $(X = k)$:

- on choisit les $k + 1$ premières boules : $\binom{n}{k + 1}$ choix.
- on choisit parmi ces $k + 1$ boules celle qui va être tirée en position $k + 1$: k choix car on ne peut pas prendre la plus grande.
- on impose, pour les k autres boules parmi ces $k + 1$, de les prendre dans l'ordre croissant : 1 seul choix.
- on range dans un ordre quelconque les $n - (k + 1)$ dernières boules : $(n - k - 1)!$ choix.

$\text{card}(X = k) = k(n - k - 1)! \binom{n}{k+1}$ donc $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\text{card}(X = k)}{\text{card}(S_n)} = \frac{k(n - k - 1)!n!}{n!(n - k - 1)!(k + 1)!} = \frac{k}{(k + 1)!}$.

On a donc la loi de X , $\forall k \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{k}{(k + 1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k + 1)!}$ et $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n!}$. On vérifie la

cohérence de ce résultat par télescopage, $\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k) = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) \right) + \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} = 1$.

b. Comme X est bornée, X admet une espérance finie et $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{(k+1)!} + \frac{1}{(n-1)!}$

donc $\mathbb{E}(X) = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(k+1) - (k+1) + 1}{(k+1)!} \right) + \frac{1}{(n-1)!} = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} \right) \right) + \frac{1}{(n-1)!}$ qui se

simplifie par télescopage en $\mathbb{E}(X) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X) = e - 1 \sim 1,72$.

118

119 On peut prendre $\Omega = S_n$ et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(S_n)$ (la tribu pleine) pour modéliser ces expériences puisque S_n est un ensemble fini. On suppose qu'on a une loi uniforme sur toutes les permutations, ce qui se traduit par $\mathbb{P}(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(S_n)}$ pour un évènement $E \subset S_n$.

a. Si $A \subset S_n$ vérifie $\text{card}(A) = k$, l'évènement $(\chi_A = 1) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(\llbracket 1; k \rrbracket) = A\}$. En effet, comme σ est une permutation donc une bijection, la condition $\sigma(\llbracket 1; k \rrbracket) \subset A$ se traduit par $\sigma(\llbracket 1; k \rrbracket) = A$ par inclusion et égalité des cardinaux car σ conserve le cardinal. Pour dénombrer les permutations qui vérifient $\sigma(\llbracket 1; k \rrbracket) = A$, on adopte le protocole de choix suivant :

- on choisit comment envoyer les entiers $1, \dots, k$ sur les éléments de A de manière bijective, il y a $k!$ choix.
- on choisit de quelle manière envoyer les entiers $k + 1, \dots, n$ sur les éléments de $\llbracket 1; n \rrbracket \setminus A$ de manière bijective, il y a $(n - k)!$ choix.

Ainsi, $\text{card}(\chi_A = 1) = k!(n - k)!$, donc $\mathbb{P}(\chi_A = 1) = \frac{k!(n - k)!}{n!} = p_k$ donc χ_A suit la loi de BERNOULLI de paramètre p_k où $k = \text{card}(A)$ et $\frac{1}{p_k} = \binom{n}{k}$.

b. Avec les conditions sur A et B de l'énoncé, si $k = \text{card}(A)$ et $\ell = \text{card}(B)$ et $i = \text{card}(A \cap B)$, on a $(\chi_A = 1, \chi_B = 1) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(\llbracket 1; k \rrbracket) = A, \sigma(\llbracket 1; \ell \rrbracket) = B\}$. Si $\sigma \in (\chi_A = \chi_B = 1)$, pour $1 \leq j \leq \text{Min}(k, \ell)$, on a $\sigma(j) \in A$ car $j \leq k$ et $\sigma(j) \in B$ car $j \leq \ell$. Ainsi, $\sigma(j) \in A \cap B$ pour $j \in \llbracket 1; i \rrbracket$, ce qui montre à nouveau que $\sigma(\llbracket 1; i \rrbracket) = A \cap B$ par inclusion et égalité des cardinaux, ceci étant même vrai ($\emptyset = \emptyset$) si $i = 0$. Comme $A \not\subset B$ et $B \not\subset A$, on a $i < k$ et $i < \ell$ donc $\sigma(i + 1) \in A$ car $i + 1 \leq k$ et $\sigma(i + 1) \in B$ car $i + 1 \leq \ell$. On a donc une contradiction puisque $\sigma(\llbracket 1; i \rrbracket) = A \cap B$. On en déduit que $(\chi_A = \chi_B = 1) = \emptyset$, donc que $\mathbb{P}(\chi_A = 1, \chi_B = 1) = 0 \neq \mathbb{P}(\chi_A = 1) \mathbb{P}(\chi_B = 1)$, ce qui montre que χ_A et χ_B ne sont pas indépendantes.

c. D'après la question précédente, il est impossible d'avoir $\chi_A = 1$ en même temps que $\chi_B = 1$ si $B \not\subset A$ et $A \not\subset B$. Comme les parties de \mathcal{A} vérifient cette condition, pour une permutation $\sigma \in S_n$, il ne peut y avoir qu'une partie $A \in \mathcal{A}$ qui vérifie $\chi_A(\sigma) = 1$, les autres donneront 0. Ainsi, Y ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1, elle suit donc une loi de BERNOULLI.

d. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Y) = \sum_{A \in \mathcal{A}} \mathbb{E}(\chi_A)$ et Y suit une loi de BERNOULLI, d'où $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{P}(Y = 1) \leq 1$

et on sait avec la question a. que $\mathbb{E}(X_A) = p_k$ si $k = \text{card}(A)$. Ainsi, on a $\sum_{A \in \mathcal{A}} \frac{1}{\binom{n}{k}} \leq 1$. Dans une ligne du

triangle de PASCAL, les termes croissent puis décroissent, et le terme maximum est "au milieu" de la ligne.

En effet, pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $r_k = \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{k!(n-k)!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n-k}{k+1}$ donc $r_k \geq 1 \iff k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$.

En distinguant les cas n pair et n impair, on constate que le terme maximum de la n -ième ligne du triangle de PASCAL est $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. Par conséquent, $\frac{\text{card}(\mathcal{A})}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} \leq \sum_{A \in \mathcal{A}} \frac{1}{\binom{n}{k}} \leq 1$ donc $\text{card}(\mathcal{A}) \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Il est à noter que cette majoration est optimale car si on prend pour \mathcal{A} l'ensemble des parties à $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ éléments,

ces parties sont bien au nombre de $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ et pour deux parties $A \neq B$ de \mathcal{A} , on a bien $B \not\subset A$ et $A \not\subset B$.

120 a. On a $\det(M) = X^2 - Y^2 = (X - Y)(X + Y)$ et $X + Y \neq 0$ car $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ par hypothèse donc

$X + Y \geq 2$. Ainsi, M inversible $\iff X \neq Y$. Or $(X = Y) = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} (X = n, Y = n)$ (réunion d'évènements

incompatibles) donc, par σ -additivité, on a $\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n, Y = n)$. Or, X et Y ont été supposées

indépendantes ce qui donne la relation $\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) \mathbb{P}(Y = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} p(1-p)^{n-1}$.

Comme $0 < (1-p)^2 < 1$, on peut calculer avec les séries géométriques : $\mathbb{P}(X = Y) = \frac{p^2}{1 - (1-p)^2} = \frac{p}{2-p}$.

La probabilité que M soit inversible est donc $1 - \mathbb{P}(X = Y) = \frac{2-2p}{2-p}$.

b. La matrice M est symétrique réelle donc elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et les valeurs propres α et β vérifient $\alpha + \beta = \text{Tr}(M) = X + Y$ et $\alpha\beta = \det(M) = X^2 - Y^2 = (X - Y)(X + Y)$. Ainsi, les deux valeurs propres de M sont $X + Y$ et $X - Y$. Par conséquent, comme $Y > 0$, on a $U = X + Y \geq 2$ et $V = X - Y \in \mathbb{Z}$. D'après le cours, $\text{Cov}(U, V) = \mathbb{E}(UV) - \mathbb{E}(U)\mathbb{E}(V)$. Or $\mathbb{E}(V) = \mathbb{E}(X - Y) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) = 0$ par linéarité de l'espérance et que X et Y suivent la même loi. Ainsi, $\text{Cov}(UV) = \mathbb{E}(UV) = \mathbb{E}((X+Y)(X-Y)) = \mathbb{E}(X^2 - Y^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(Y^2) = 0$.

c. Or $(U = 2, V = 0) = (U = 2) = (X = Y = 1)$ donc $\mathbb{P}(U = 2, V = 0) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1) \mathbb{P}(Y = 1)$ car X, Y indépendantes donc $\mathbb{P}(U = 2) = \mathbb{P}(U = 2, V = 0) = p^2$.

Par contre, $(V = 0) = (X = Y) = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} (X = Y = n)$ (réunion incompatible) donc $\mathbb{P}(V = 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)^2$

par σ -additivité, indépendance de X et Y qui suivent la même loi. Comme $\mathbb{P}(U = 2, V = 0) \neq \mathbb{P}(U = 2) \mathbb{P}(V = 0)$ car $\mathbb{P}(V = 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2(n-1)} = \frac{p^2}{1 - (1-p)^2} = \frac{p}{2-p} < 1$, U et V ne sont pas indépendantes.

d. Comme $Z(\Omega) = \mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}(Z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Z \geq n)$ d'après le cours. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$(Z < n) = (X < n) \cap (Y < n)$ donc, par indépendance de X et Y , $\mathbb{P}(Z < n) = \mathbb{P}(X < n)^2 = (1 - \mathbb{P}(X \geq n))^2$ car X et Y suivent la même loi. Ainsi, $\mathbb{P}(Z \geq n) = 1 - \mathbb{P}(Z < n) = 1 - (1 - (1-p)^{n-1})^2$ (classique). On en

déduit donc que $\mathbb{P}(Z \geq n) = 2(1-p)^{n-1} - (1-p)^{2(n-1)}$. On sait sommer les séries géométriques, et comme

$|1-p| < 1$, Z admet une espérance finie et $\mathbb{E}(Z) = \frac{2}{1 - (1-p)} - \frac{1}{1 - (1-p)^2} = \frac{3-2p}{p(2-p)}$.

121

122

123

124

125

126

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 9

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

ET CALCUL DIFFÉRENTIEL

127 a. La fonction f est de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par opérations car les fonctions \cos , ch , \sin et sh le sont et

que les fonctions $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ le sont aussi puisque leurs dérivées partielles sont constantes.

b. Pour $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \text{ch}(y) \cos(x) - \sin(y) \text{sh}(x)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \text{sh}(y) \sin(x) - \cos(y) \text{ch}(x)$.

Ainsi, pour $(x, y) \in \Delta$, on a $y = x$ et $\overrightarrow{\text{grad}} f(x, x) = (0, 0) \iff \text{ch}(x) \cos(x) = \sin(x) \text{sh}(x)$. Les $x \in \mathbb{R}_+^*$ pour lesquels $x \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ ne vérifient pas $\text{ch}(x) \cos(x) = \sin(x) \text{sh}(x)$ car $\text{sh}(x) \neq 0$ donc, pour $(x, x) \in \Delta$,

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x, x) = (0, 0) \iff \tan(x) = \frac{1}{\text{th}(x)} = \text{coth}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}.$$

Posons les intervalles $I_0 =]0; \frac{\pi}{2}[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n =]n\pi - \frac{\pi}{2}; n\pi + \frac{\pi}{2}[$, puis $f_n : I_n \rightarrow \mathbb{R}$ définie

par $f_n(x) = \tan(x) - \text{coth}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Les fonctions f_n sont dérivables sur I_n et on calcule leurs

dérivées $\forall x \in I_n$, $f_n'(x) = 1 + \tan^2(x) - (1 - \text{coth}^2(x)) = \tan^2(x) + \text{coth}^2(x) > 0$. Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_0(x) = -\infty$

et $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} f_0(x) = +\infty$ et $f_0(\frac{\pi}{4}) = 1 - \text{coth}(\pi/4) < 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow (n - (\pi/2))^+} f_n(x) = -\infty$ et

$\lim_{x \rightarrow (n + (\pi/2))^-} f_n(x) = +\infty$ et $f_n(n\pi + \frac{\pi}{4}) = 1 - \text{coth}(n\pi + (\pi/4)) < 0$ donc f_n réalise une bijection de

I_n dans \mathbb{R} pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $0 \in \mathbb{R}$, il existe un unique réel $x_n \in I_n$ tel que $f_n(x_n) = 0$, et

comme les f_n sont strictement croissantes sur I_n et que $f_n(n\pi + \frac{\pi}{4}) < 0 = f_n(x_n)$, on a $x_n > n\pi + \frac{\pi}{4}$ donc

$$x_n \in J_n =]n\pi + \frac{\pi}{4}; n\pi + \frac{\pi}{2}[.$$

Les points critiques de f sur Δ sont des (x_n, x_n) où $x_n = f_n^{-1}(0)$ avec $x_n \in]n\pi + \frac{\pi}{4}; n\pi + \frac{\pi}{2}[$ pour $n \in \mathbb{N}$.

c. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -\text{ch}(y) \sin(x) - \sin(y) \text{ch}(x)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \text{ch}(y) \sin(x) + \sin(y) \text{ch}(x) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$ et

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \text{sh}(y) \cos(x) - \cos(y) \text{sh}(x)$ pour $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Ainsi, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_n, x_n) = -2\text{ch}(x_n) \sin(x_n) = a_n$

et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_n, x_n) = 2\text{ch}(x_n) \sin(x_n) = -a_n$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_n, x_n) = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors, la hessienne de f en le

point critique (x_n, x_n) est $H_f(x_n, x_n) = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ 0 & -a_n \end{pmatrix}$ a deux valeurs propres de signes strictes opposés car

$a_n \neq 0$. Ainsi, f admet en (x_n, x_n) un point selle, et pas un extremum local.

Il n'y a donc aucun extremum local de f sur la demi-droite Δ .

128 a. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto \sin(x-t)g(t)$ est continue sur le segment $[0; x]$ donc $h(x)$ est bien

définie. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $h(x) = \int_0^x (\sin(x) \cos(t) - \cos(x) \sin(t))g(t)dt$ et, puisque tout converge, par

linéarité de l'intégrale, $h(x) = \sin(x) \int_0^x \cos(t)g(t)dt - \cos(x) \int_0^x \sin(t)g(t)dt$. Par le théorème fondamental

de l'intégration, comme les fonctions $a : t \mapsto \cos(t)g(t)$ et $b : t \mapsto \sin(t)g(t)$ sont continues sur l'intervalle

\mathbb{R}_+ , les fonctions $A : x \mapsto \int_0^x \cos(t)g(t)dt$ et $B : x \mapsto \int_0^x \sin(t)g(t)dt$ sont de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ (ce sont des

primitives les primitives de a et b respectivement qui s'annulent en 0). Par opérations, h est C^1 sur \mathbb{R}_+ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $h'(x) = \cos(x)A(x) + \sin(x)\cos(x)g(x) + \sin(x)B(x) - \cos(x)\sin(x)g(x) = \cos(x)A(x) + \sin(x)B(x)$. Par opérations, h' est aussi de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ , donc h est bien de classe C^2 sur \mathbb{R}_+ et on peut calculer $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $h''(x) = -\sin(x)A(x) + \cos^2(x)g(x) + \cos(x)B(x) + \sin^2(x)g(x) = -h(x) + g(x)$.

b. Les solutions réelles sur \mathbb{R}_+ de $(E_0) : y'' + y = 0$ sont classiquement les $y : x \mapsto \alpha \sin(x) + \beta \cos(x)$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Comme h est une solution particulière de (E) avec \mathbf{a} , les solutions réelles de (E) sur \mathbb{R}_+ sont, par structure affine de l'ensemble des solutions, les $y : x \mapsto h(x) + \alpha \sin(x) + \beta \cos(x)$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

c. Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\varphi(x) = e^{-x} \left(a + \int_0^x f(t) dt \right)$. Alors $\varphi'(x) = -e^{-x} \left(a + \int_0^x f(t) dt \right) + e^{-x} f(x) \leq 0$ donc φ est décroissante sur l'intervalle \mathbb{R}_+ . Comme $\varphi(0) = a$, on a $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) \leq a$ ce qui donne l'inégalité $a + \int_0^x f(t) dt \leq ae^x$ et on obtient $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leq ae^x$ par transitivité.

d. D'après **b.**, on a $\Phi_\lambda : x \mapsto h(x) + \alpha \sin(x) + \beta \cos(x)$ avec $\Phi'_\lambda(0) = h'(0) + \alpha = \lambda$ et $\Phi_\lambda(0) = h(0) + \beta = 0$. Or $h'(0) = A(0) = 0$ et $h(0) = 0$ donc $\Phi_\lambda : x \mapsto \int_0^x \sin(x-t)g(t) dt + \lambda \sin(x)$. Je suppose qu'on souhaite étudier l'aspect lipschitzien de $\Phi_\lambda : g \mapsto \Phi_\lambda(g)$ qui est la solution de l'énoncé en utilisant l'inégalité vue en question **c.** mais dans quelle espace et avec quelle norme ?

129 a. La fonction f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^n par opérations car les fonctions polynomiales $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n x_k$

et $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n x_k^2$ et même \exp sont de classe C^1 . Pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on calcule le gradient $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_1, \dots, x_n) = \exp \left(- \sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(1 - 2x_1 \sum_{k=1}^n x_k, \dots, 1 - 2x_n \sum_{k=1}^n x_k \right)$.

Analyse : si (x_1, \dots, x_n) est un point critique de f , alors $\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $1 - 2x_j \sum_{k=1}^n x_k = 0$ donc $x_j \neq 0$ et $\sum_{k=1}^n x_k = \frac{1}{2x_j}$ donc $x_1 = \dots = x_n = \lambda$ et en reportant dans les équations, $1 - 2\lambda(n\lambda) = 0$ donc $\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{2n}}$.

Synthèse : réciproquement, si $(x_1, \dots, x_n) = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2n}} \right)$, comme $\sum_{k=1}^n x_k = \pm n \times \frac{1}{\sqrt{2n}} = \pm \sqrt{\frac{n}{2}}$ et $\sum_{k=1}^n x_k^2 = n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$, on a $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_1, \dots, x_n) = \exp \left(-\frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2n}} \sqrt{\frac{n}{2}}, \dots, 1 - \frac{2}{\sqrt{2n}} \sqrt{\frac{n}{2}} \right) = (0, \dots, 0)$.

Ainsi, il y a deux points critiques de f sur \mathbb{R}^n qui sont $\mathbf{a}_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2n}} \right)$ et $-\mathbf{a}_n$.

b. De même, la fonction f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^n et, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x_1, \dots, x_n) = \left(-2x_j - 2 \sum_{k=1}^n x_k - 2x_j \left(1 - 2x_j \sum_{k=1}^n x_k \right) \right) \exp \left(- \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)$ ce qui montre que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\mathbf{a}_n) = \left(-2 \frac{1}{\sqrt{2n}} - 2 \sqrt{\frac{n}{2}} - 2 \frac{1}{\sqrt{2n}} \left(1 - 2 \frac{1}{\sqrt{2n}} \sqrt{\frac{n}{2}} \right) \right) e^{-1/2} = -(n+1) \sqrt{\frac{2}{en}}$. Si $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \dots, x_n) = \left(-2x_j - 2x_i \left(1 - 2x_j \sum_{k=1}^n x_k \right) \right) \exp \left(- \sum_{k=1}^n x_k^2 \right) = \left(-2x_i - 2x_j + 4x_i x_j \sum_{k=1}^n x_k \right) \exp \left(- \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)$ donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}_n) = \left(-4 \frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{4}{2n} \sqrt{\frac{n}{2}} \right) e^{-1/2} = -\sqrt{\frac{2}{en}}$. Ainsi, la matrice hessienne de f en \mathbf{a}_n vaut

$$H = -\sqrt{\frac{2}{en}} \begin{pmatrix} n+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{pmatrix}. \text{ Soit la matrice symétrique réelle } M = \begin{pmatrix} n+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{pmatrix},$$

$M - nI_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1, d'après la formule du rang, $\dim(\text{Ker}(M - nI_n)) = n - 1$ donc n

est une valeur propre de M d'ordre de multiplicité supérieure à $n - 1$. De plus, en notant $v = (1, \dots, 1)$, on a $Mv = 2nv$ avec $v \neq 0$ donc $2n \in \text{Sp}(M)$ de sorte que $\text{Sp}(M) = \{n, 2n\} \subset \mathbb{R}_+^*$ (avec $\chi_M = (X - n)^{n-1}(X - 2n)$). Ainsi, M est symétrique définie positive donc H est symétrique définie négative ce qui montre que f admet en a_n un maximum local.

c. Comme $f(-x_1, \dots, -x_n) = -f(x_1, \dots, x_n)$, puisque f admet en a_n un minimum local, la fonction f admet un maximum local en $-a_n$ car si $\forall x \in B(a_n, r)$, $f(x) \geq f(a_n)$, alors $\forall -x \in B(-a_n, r)$, $f(-x) \leq f(-a_n)$.

d. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|f(x)| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k| \right) \exp \left(- \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)$ et on sait que $\|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$ (par CAUCHY-SCHWARZ) donc $|f(x)| \leq g(\|x\|_2)$ avec $g : r \mapsto \sqrt{nr} e^{-r^2}$. Comme $\lim_{r \rightarrow +\infty} g(r) = 0$ par croissances comparées, on a bien $\lim_{\|x\|_2 \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ par encadrement.

e. Posons $\alpha_n = f(a_n) > 0$, il existe $r_n > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 \geq r_n \implies |f(x)| \leq \frac{\alpha_n}{2}$ d'après la question précédente. La fonction f étant continue sur le fermé borné $K_n = B_f(0, r_n)$, comme on est en dimension finie, d'après le théorème des bornes atteintes, f admet un maximum absolu sur K_n . Comme f est inférieure à $\frac{\alpha_n}{2}$ sur la frontière de K_n et que $f(a_n) = \alpha_n > \frac{\alpha_n}{2}$, le maximum de f sur K_n est atteint dans l'intérieur de K_n , c'est-à-dire dans l'ouvert $\overset{\circ}{K}_n = B(0, r_n)$ donc en un point critique, donc en a_n ou en $-a_n$ avec les calculs de la question a.. Mais $f(a_n) > 0$ et $f(-a_n) < 0$ donc $m_n = \underset{K_n}{\text{Max}}(f) = f(a_n)$.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a deux possibilités :

- Si $x \in K_n$, alors $f(x) \leq m_n = f(a_n)$.
- Si $x \notin K_n$, alors $f(x) \leq \frac{\alpha_n}{2} \leq f(a_n)$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \leq f(a_n) = m_n$ donc $\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{Max}} f(x) = f(a_n)$ et f admet bien en a_n un maximum absolu.

130 a. Soit $((x, y), (x', y')) \in (\mathbb{R}^2)^2$, on a $\varphi(x, y) - \varphi(x', y') = \varphi(x, y) - \varphi(x, y') + \varphi(x, y') - \varphi(x', y')$ en suivant les axes donc, par inégalité triangulaire, $|\varphi(x, y) - \varphi(x', y')| \leq |\varphi(x, y) - \varphi(x, y')| + |\varphi(x, y') - \varphi(x', y')|$ donc $|\varphi(x, y) - \varphi(x', y')| \leq \int_{-1}^1 |t-x| (|t-y| - |t-y'|) dt + \int_{-1}^1 (|t-x| - |t-x'|) |t-y'| dt$. Or $||a| - |b|| \leq |a - b|$ donc $|\varphi(x, y) - \varphi(x', y')| \leq |y - y'| \int_{-1}^1 |t-x| dt + |x - x'| \int_{-1}^1 |t-y'| dt$. Or, si $(x, y) \in C$, $\forall t \in [-1; 1]$, $|t-x| \leq 2$ et $|t-y'| \leq 2$ donc $|\varphi(x, y) - \varphi(x', y')| \leq 4(|x-x'| + |y-y'|) = 4\|(x, y) - (x', y')\|_1$. Ainsi, φ étant 4-lipschitzienne sur C (avec la norme 1), on en déduit que φ est continue sur C . Plus généralement, φ est continue sur \mathbb{R}^2 car elle est, avec les mêmes arguments, lipschitzienne sur tout carré du type $[-a; a]^2$ avec $a > 0$.

b. La partie C est une partie bornée car $\forall (x, y) \in C$, $\|(x, y)\|_\infty \leq 1$, et fermée, car si $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente, vers $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, de points de C , alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y$ donc, comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq x_n, y_n \leq 1$, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on a $-1 \leq x, y \leq 1$ donc $(x, y) \in C$. Comme φ est continue sur le fermé borné C en dimension finie, φ est bornée sur C et y atteint ses bornes ce

qui justifie l'existence de $\mu = \underset{(x,y) \in C}{\text{Min}} (\varphi(x,y))$ par le théorème des bornes atteintes.

c. Pour $(x,y) \in T$, $\varphi(x,y) = \int_{-1}^1 |t-x||t-y|dt = \int_{-1}^x |t-x||t-y|dt + \int_x^y |t-x||t-y|dt + \int_y^1 |t-x||t-y|dt$ par CHASLES donc $\varphi(x,y) = \int_{-1}^x (x-t)(y-t)dt + \int_x^y (t-x)(y-t)dt + \int_y^1 (t-x)(t-y)dt$. Ainsi, en développant, $\varphi(x,y) = xy[(x+1) - (y-x) + (1-y)] - (x+y) \left(\int_{-1}^x tdt - \int_x^y tdt + \int_y^1 tdt \right) + \int_{-1}^x t^2dt - \int_x^y t^2dt + \int_y^1 t^2dt$. On a donc $\varphi(x,y) = xy[2x - 2y + 2] - \frac{x+y}{2} [x^2 - 1 - y^2 + x^2 + 1 - y^2] + \frac{x^3+1}{3} - \frac{y^3-x^3}{3} + \frac{1-y^3}{3}$ qui se simplifie en $\varphi(x,y) = \frac{y^3}{3} - y^2x + yx^2 - \frac{x^3}{3} + 2xy + \frac{2}{3} = \frac{(y-x)^3}{3} + 2xy + \frac{2}{3}$.

d. Comme en **b.**, T est un fermé borné donc φ admet aussi sur T un minimum qu'on note $\lambda = \underset{(x,y) \in T}{\text{Min}} (\varphi(x,y))$. La partie T est un triangle dont les trois bords (frontière de T) sont les côtés $C_1 : x = -1, -1 \leq y \leq 1$, $C_2 : y = 1, -1 \leq x \leq 1$ et $C_3 : -1 \leq x = y \leq 1$. Faisons une étude sur chacun des trois bords de ce triangle.

Sur C_1 , soit $f_1 : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_1(y) = \varphi(-1, y) = \frac{(y+1)^3}{3} - 2y + \frac{2}{3}$, alors f_1 est dérivable sur $[-1; 1]$ et $f_1'(y) = (y+1)^2 - 2$ donc f_1 est décroissante sur $[-1; -1 + \sqrt{2}]$ et croissante sur $[-1 + \sqrt{2}; 1]$. Ainsi, $\underset{[-1; 1]}{\text{Min}}(f_1) = f_1(-1 + \sqrt{2}) = \frac{4(2 - \sqrt{2})}{3} \sim 0,78$.

Sur C_2 , soit $f_2 : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_2(x) = \varphi(x, 1) = \frac{(1-x)^3}{3} + 2x + \frac{2}{3} = f_1(-x)$. Par conséquent, on a $\underset{[-1; 1]}{\text{Min}}(f_2) = f_2(1 - \sqrt{2}) = \frac{4(2 - \sqrt{2})}{3} \sim 0,78$. C'est normal car on a aussi $f(-x, -y) = f(x, y)$ avec le changement de variable $t = -u$.

Sur C_3 , soit $f_3 : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_3(t) = \varphi(t, t) = t^2 + \frac{2}{3}$, alors f_3 est clairement minimale pour $t = 0$ donc $\underset{[-1; 1]}{\text{Min}}(f_3) = f_3(0) = \frac{2}{3} \sim 0,670$.

Comme φ est de classe C^1 sur l'intérieur de T car elle y est polynomiale d'après la question **c.**, on peut chercher les points critiques de φ à l'intérieur de T . Pour $(x,y) \in \overset{\circ}{T}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ si et seulement si $-(y-x)^2 + 2y = (y-x)^2 + 2x = 0 \iff (y = -x \text{ et } 4x^2 + 2x = 0) \iff (y = -x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = y = 0)$. Or $(0,0)$ n'est pas dans l'intérieur de T mais sur le côté C_3 donc l'unique point critique de φ à l'intérieur de T est $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ en lequel $\varphi(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$. Comme cette valeur $\frac{1}{2}$ est strictement inférieure aux trois valeurs des minima des fonctions f_1, f_2, f_3 trouvées précédemment, φ admet son minimum à l'intérieur de T en un seul point qui est $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ car il n'y a qu'un point critique. Ainsi, $\lambda = \frac{1}{2}$.

e. Comme $T \subset C$, on a $\lambda \geq \mu$. De plus, pour $(x,y) \in C$, si $x \leq y$, on a $(x,y) \in T$ donc $f(x,y) \geq \lambda$. Et si $x > y$, comme $\varphi(y,x) = \varphi(x,y)$ et $(x,y) \in T$, on a $\varphi(y,x) \geq \lambda$ donc $\varphi(x,y) \geq \lambda$. Ainsi, λ est un minorant de f sur C donc $\mu \geq \lambda$. Ainsi, $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$.

f. Par exemple, si $x \geq 1$ et $y \geq 1$, on a $\varphi(x,y) = \int_{-1}^1 (x-t)(y-t)dt \geq \int_{-1}^1 (x-1)(y-1)dt = 2(x-1)(y-1)$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x,x) = +\infty$ et la fonction φ n'est pas majorée sur \mathbb{R}^2 donc n'admet pas de maximum absolu.

Quant au minimum éventuel, découpons le plan en 9 parties :

- Si (x,y) vérifie $x \in [-1; 1]$ et $y \in [-1; 1]$, alors $(x,y) \in C$ donc $\varphi(x,y) \geq \mu = \frac{1}{2}$.
- Si (x,y) vérifie $x \geq 1$ et $y \geq 1$, $\varphi(x,y) = \int_{-1}^1 (x-t)(y-t)dt = 2xy - (x+y) \int_{-1}^1 tdt + \int_{-1}^1 t^2dt$ donc

$$\varphi(x, y) = 2xy + \frac{2}{3} \geq 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \geq \frac{1}{2} = \mu.$$

- Si (x, y) vérifie $x \geq 1$ et $y \leq -1$, $\varphi(x, y) = \int_{-1}^1 (x-t)(t-y)dt = -2xy - \frac{2}{3} \geq 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \geq \frac{1}{2} = \mu.$
- Si (x, y) vérifie $x \leq -1$ et $y \geq 1$, $\varphi(x, y) = \int_{-1}^1 (t-x)(y-t)dt = -2xy - \frac{2}{3} \geq 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \geq \frac{1}{2} = \mu.$
- Si (x, y) vérifie $x \leq -1$ et $y \leq -1$, $\varphi(x, y) = \int_{-1}^1 (t-x)(t-y)dt = 2xy + \frac{2}{3} \geq 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \geq \frac{1}{2} = \mu.$
- Si (x, y) vérifie $x \in]-1; 1[$ et $y \geq 1$, $\varphi(x, y) = \int_{-1}^x (x-t)(y-t)dt + \int_x^1 (t-x)(y-t)dt$ donc $\varphi(x, y) = x - \frac{x^3}{3} + (1+x^2)y$ après calculs et $\varphi(x, y) \geq -\frac{x^3}{3} + x^2 + x + 1 = \frac{(1-x)^3}{3} + 2x + \frac{2}{3} = f_2(x) \geq \mu.$
- Si (x, y) vérifie $x \in]-1; 1[$ et $y \leq -1$, $\varphi(x, y) = \int_{-1}^x (x-t)(t-y)dt + \int_x^1 (t-x)(t-y)dt$ donc $\varphi(x, y) = -x + \frac{x^3}{3} - (1+x^2)y \geq -x + \frac{x^3}{3} + 1 + x^2 = \frac{(x+1)^3}{3} - 2x + \frac{2}{3} = f_1(x) \geq \mu.$
- Si (x, y) vérifie $x \geq 1$ et $y \in]-1; 1[$, $\varphi(x, y) = \int_{-1}^y (x-t)(y-t)dt + \int_y^1 (x-t)(t-y)dt$ donc $\varphi(x, y) = x(1+y^2) + y - \frac{y^3}{3} \geq 1 + y^2 + y - \frac{y^3}{3} = f_2(y) \geq \mu.$
- Si (x, y) vérifie $x \leq -1$ et $y \in]-1; 1[$, $\varphi(x, y) = \int_{-1}^y (t-x)(y-t)dt + \int_y^1 (t-x)(t-y)dt$ donc $\varphi(x, y) = -x(1+y^2) - y + \frac{y^3}{3} \geq 1 + y^2 - y + \frac{y^3}{3} = f_1(y) \geq \mu.$

Ainsi, μ est le minimum de φ sur \mathbb{R}^2 . On aurait pu traiter moins de cas avec les symétries de la fonction φ .

131 a. Supposons qu'il existe une fonction $y :]-r; r[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in]-r; r[$, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ qui soit solution de (E) sur $]-r; r[$ avec $r > 0$. Puisque le rayon R de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ vérifie $R \geq r$ par

l'existence de $y(x)$ pour $x \in]-r; r[$, on peut dériver terme à terme à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence $]-R; R[$ donc dans $]-r; r[$, ainsi $\forall x \in]-r; r[$, $y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)a_{n-1}x^{n-2}$.

On a donc $\forall x \in]-r; r[$, $\sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)a_{n-1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n-1)a_{n-1} + a_n)x^n = x^2$ ce qui donne, par unicité du développement en série entière, $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $\forall n \geq 3$, $(n-1)a_{n-1} + a_n = 0$.

On trouve donc, par une récurrence simple, que $\forall n \geq 3$, $a_n \neq 0$ donc que $\forall n \geq 2$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = -n$ puis

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = +\infty$ et, avec D'ALEMBERT, $R = 0$, ce qui est absurde. Ainsi, il n'existe aucune solution de (E) qui soit développable en série entière au voisinage de 0.

b. Les solutions réelles de $(E_0) : x^2 y' + y = 0$ sur $I_1 = \mathbb{R}_-^*$ ou sur $I_2 = \mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $y : x \mapsto \lambda e^{1/x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est une primitive de $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ sur I_1 ou I_2 . Par méthode de variation de la constante,

une solution particulière de (E) sur I_1 ou I_2 se trouve avec $y : x \mapsto \lambda(x)e^{1/x}$ avec $\lambda : I_k \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. En reportant dans (E), y solution de (E) $\iff \forall x \in I_k$, $x^2 \lambda'(x)e^{1/x} - \lambda(x)e^{1/x} + \lambda(x)e^{1/x} = x^2 \iff \lambda'(x) = e^{-1/x}$.

On prend, sur I_2 , la fonction $\lambda : x \mapsto \int_1^x e^{-1/t} dt$ (la primitive de $f : t \mapsto e^{-1/t}$ qui s'annule en $1 \in I_2$). Les solutions réelles de (E) sur I_2 sont donc les fonctions $y : x \mapsto \left(\alpha + \int_1^x e^{-1/t} dt \right) e^{1/x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Puisque

$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty$, si on veut une limite finie de y en 0^+ , il est nécessaire d'avoir $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\alpha + \int_1^x e^{-1/t} dt \right) = 0$.

La fonction f est continue sur $]0; 1]$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ ce qui assure la convergence de $\int_0^1 f(t)dt$, la seule valeur possible pour avoir une limite finie de y en 0^+ est donc $\alpha = \int_0^1 f(t)dt$. Posons $y_0 : x \mapsto \left(\int_0^1 f(t)dt + \int_1^x e^{-1/t} dt \right) e^{1/x} = e^{1/x} \int_0^x e^{-1/t} dt$ par CHASLES. Comme f est positive et croissante sur \mathbb{R}_+ , pour $x > 0$, on a $\forall t \in [0; x]$, $0 \leq f(t) \leq f(x)$ donc, par croissance de l'intégrale, $0 \leq \int_0^x f(t)dt \leq \int_0^x f(x)dt = xf(x)$ donc $0 \leq y_0(x) \leq xf(x)e^{1/x} = x$. Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow 0^+} y_0(x) = 0$.

La fonction $y_0 : x \mapsto e^{1/x} \int_0^x e^{-1/t} dt$ est la seule solution de (E) sur \mathbb{R}_+^* qui admette une limite finie en 0^+ .

c. Par la même méthode qu'en **b.**, les solutions de (E) sur \mathbb{R}_-^* sont les fonctions $y : x \mapsto \left(\beta + \int_{-1}^x e^{-1/t} dt \right) e^{1/x}$ avec $\beta \in \mathbb{R}$ car $-1 \in \mathbb{R}_-^*$. Pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} (\beta e^{1/x}) = 0$ car $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$.

Pour tout $x \in]-1; 0[$, en posant les fonctions $u : t \mapsto e^{-1/t}$ et $v : t \mapsto t^2$ qui sont de classe C^1 sur $[-1; x]$, on a $e^{1/x} \int_{-1}^x e^{-1/t} dt = e^{1/x} [t^2 e^{-1/t}]_{-1}^x - 2e^{1/x} \int_{-1}^x t e^{-1/t} dt = x^2 - e.e^{1/x} - 2e^{1/x} \int_{-1}^x t e^{-1/t} dt$. On recommence en posant $u : t \mapsto e^{-1/t}$ et $v : t \mapsto t^3$ qui sont de classe C^1 sur $[-1; x]$ et on a la nouvelle relation $e^{1/x} \int_{-1}^x e^{-1/t} dt = x^2 - e.e^{1/x} - 2e^{1/x} [t^3 e^{-1/t}]_{-1}^x + 6e^{1/x} \int_{-1}^x t^2 e^{-1/t} dt$. À terminer.

132

133

134 a. Le couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est fixé. Les solutions sur \mathbb{R} de l'équation homogène $(E_0) : y'' - 4y = 0$ sont, d'après le cours, les fonctions $y : t \mapsto Ae^{2t} + Be^{-2t}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ car l'équation caractéristique associée à (E_0) est $z^2 - 4 = 0$ donc les solutions sont ± 2 . Il est clair que les fonctions $f_1 : t \mapsto -\frac{at+b}{4}$ et $f_2 : t \mapsto \frac{at-b}{4}$ sont respectivement solutions particulières de l'équation (E) sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* .

Analyse : soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de (E) sur \mathbb{R} , il existe d'après ce qui précède quatre scalaires réels A_1, A_2, B_1, B_2 tels que $\forall t > 0$, $y(t) = A_1 e^{2t} + B_1 e^{-2t} - \frac{at+b}{4}$ et $\forall t < 0$, $y(t) = A_2 e^{2t} + B_2 e^{-2t} + \frac{at-b}{4}$.

Par continuité de y en 0 , $y(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = A_1 + B_1 - \frac{b}{4} = \lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = A_2 + B_2 - \frac{b}{4} : A_1 + B_1 = A_2 + B_2$ (1).

Par continuité de y' en 0 , on a $y'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} y'(x) = 2A_1 - 2B_1 - \frac{a}{4} = \lim_{x \rightarrow 0^-} y'(x) = 2A_2 - 2B_2 + \frac{a}{4}$ donc $A_1 - B_1 = A_2 - B_2 + \frac{a}{4}$ (2). En additionnant et en soustrayant (1) et (2) : $A_2 = A_1 - \frac{a}{8}$ et $B_2 = B_1 + \frac{a}{8}$.

Synthèse : soit $(A_1, B_1) \in \mathbb{R}^2$ et la fonction $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $y(0) = A_1 + B_1 - \frac{b}{4}$ et aussi par $\forall x > 0$, $y(x) = A_1 e^{2x} + B_1 e^{-2x} - \frac{ax+b}{4}$ et $\forall x < 0$, $y(x) = \left(A_1 - \frac{a}{8} \right) e^{2x} + \left(B_1 + \frac{a}{8} \right) e^{-2x} + \frac{ax-b}{4}$. Ce qui précède prouve que y est une solution de classe C^∞ de (E) sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* . De plus, comme il vient $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = y(0) = A_1 + B_1 - \frac{b}{4} : y$ est continue en 0 . $\lim_{x \rightarrow 0^+} y'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} y'(x) = 2A_1 - 2B_1 - \frac{a}{4}$ donc y est de classe C^1 sur \mathbb{R} avec $y'(0) = 2A_1 - 2B_1 - \frac{a}{4}$. Enfin, $\forall x > 0$, $y''(x) = 4A_1 e^{2x} + 4B_1 e^{-2x}$

et $\forall x < 0$, $y''(x) = 4 \left(A_1 - \frac{a}{8} \right) e^{2x} + 4 \left(B_1 + \frac{a}{8} \right) e^{-2x}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} y''(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} y''(x) = 4A_1 + 4B_1$ et y est donc deux fois dérivable en 0 (théorème de prolongement C^1 appliqué à y') avec $y''(0) = 4A_1 + 4B_1$. Ainsi $y''(0) - 4y(0) = 4A_1 + 4B_1 - 4 \left(A_1 + B_1 - \frac{b}{4} \right) = b = a|0| + b$. Finalement, y est bien solution de (E) sur \mathbb{R} .

Les solutions de (E) sur \mathbb{R} sont donc les fonctions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $(A_1, B_1) \in \mathbb{R}^2$, $y(0) = A_1 + B_1 - \frac{b}{4}$,

$$\forall x > 0, y(x) = A_1 e^{2x} + B_1 e^{-2x} - \frac{ax+b}{4} \text{ et } \forall x < 0, y(x) = \left(A_1 - \frac{a}{8}\right) e^{2x} + \left(B_1 + \frac{a}{8}\right) e^{-2x} + \frac{ax-b}{4}.$$

b. Si une solution y de (E) sur \mathbb{R} a l'expression ci-dessus, pour que y admette une asymptote en $+\infty$, il est clair qu'il est nécessaire et suffisant qu'on ait $A_1 = 0$ et pour que y admette une asymptote en $-\infty$, il est nécessaire et suffisant qu'on ait $B_1 + \frac{a}{8} = 0$. Ainsi, la fonction $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $y(0) = -\frac{a}{8} - \frac{b}{4}$, $\forall x > 0, y(x) = -\frac{a}{8} e^{-2x} - \frac{ax+b}{4}$ et $\forall x < 0, y(x) = -\frac{a}{8} e^{2x} + \frac{ax-b}{4}$ est l'unique solution de (E) sur \mathbb{R} dont le graphe possède des asymptotes en $\pm\infty$, respectivement les droites d'équations $y = -\frac{ax+b}{4}$ et $y = \frac{ax-b}{4}$.

135 a. Par opérations, la fonction f est de classe C^2 (et même C^∞) sur l'ouvert $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Comme

$\forall (x,y) \in D, |f(x,y)| \leq |xy| \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |x||y| \leq \|(x,y)\|_2^2$ et que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \|(x,y)\|_2 = 0$, par encadrement, on trouve $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ et f est aussi continue en $(0,0)$. Par conséquent, f est continue sur \mathbb{R}^2 .

b. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0$ en revenant à la définition et, par un calcul brutal, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x(y^4 + 4x^2y^2 - x^4)}{(x^2 + y^2)^2}$. Le second calcul n'était pas nécessaire puisque $f(x,y) = -f(y,x)$ (1) donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(y,x)$ en dérivant (1) par rapport à x avec la règle de la chaîne.

c. De même, les fonctions rationnelles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur l'ouvert D par opérations. De plus, $\forall (x,y) \in D, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right| \leq \frac{|y|(2x^4 + 4x^2y^2 + 2y^4)}{(x^2 + y^2)^2} = 2|y| \leq 2\|(x,y)\|_2$ et, comme en **a.**, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est aussi continue en $(0,0)$. Comme $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(y,x)$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ est aussi continue en $(0,0)$.

Ainsi, par définition, f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

d. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t} = 1$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = -1$. On peut aussi calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = 0$. Par contraposée du théorème de SCHWARZ, f n'est pas de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 car $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

136 a. La fonction g est dérivable sur \mathbb{R}_- par opérations et $\forall x < 0, g'(x) = e^{1/x} - \frac{e^{1/x}}{x} + e^x > 0$ donc g

strictement croissante sur l'intervalle \mathbb{R}_- . Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 1$ donc, par le théorème de la bijection, g réalise une bijection strictement croissante de \mathbb{R}_- dans $]-\infty; 1[$. Comme $g(-1) = -e^{-1} + e^{-1} = 0$ et que g est une bijection \mathbb{R}_- dans $]-\infty; 1[$, le seul réel x strictement négatif tel que $g(x) = 0$ est $x = -1$. Or $g(x) = 0$ est impossible si $x \geq 0$ donc, pour un réel $x \in \mathbb{R}, g(x) = 0 \iff x = -1$.

b. f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 par opérations et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^y + ye^x, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^y + e^x$. Ainsi, $\overrightarrow{\text{grad}} f(x,y) = (0,0) \iff (e^y + ye^x = xe^y + e^x = 0) \iff (xy - 1 = xe^{-1/x} + e^x = 0) \iff x = y = -1$ d'après la question **a.** Le seul point critique de f sur \mathbb{R}^2 est donc le point $(-1, -1)$.

c. Comme \mathbb{R}^2 est un ouvert, si f admet un extremum local, c'est en un point critique, donc en $(-1, -1)$. Comme f est aussi de classe C^2 par opérations sur \mathbb{R}^2 , on calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = ye^x, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = xe^y$ et

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = e^x + e^y$, donc la hessienne de f en $(-1, -1)$ est $e^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont e^{-1} et $-3e^{-1}$ de signes stricts opposés donc f admet en $(-1, -1)$ un point selle. f ne possède donc aucun extremum local, et a fortiori aucun extremum absolu. De plus, $f(x, 1) = ex + e^x$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x, 1) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, 1) = +\infty$ donc f n'est ni minorée, ni majorée.