♠ ♡

PRÉPARATION ORAUX

PSI 1

MILLÉSIME

2025 / 2026

♢ ♣

EXERCICES PAR THÈME

EXERCICES PAR CONCOURS

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 1 INTÉGRALE ET ANALYSE

1 *Centrale Maths1 PSI 2025* Lucas Balanger (note 15)

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t,x) = e^{\frac{-tx^2}{2}}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$, $m_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{\frac{-tx^2}{2}} dx$.

On rappelle la valeur de l'intégrale de Gauss $I = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

a. Montrer que $(m_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

b. Pour un entier $k \in \mathbb{N}$ et $t > 0$, calculer $m_{2k}(t)$ et $m_{2k+1}(t)$.

c. En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-tx^2}{2}} e^x dx$.

d. Retrouvez la valeur de la question précédente par une autre méthode.

2 *Centrale Maths1 PSI 2025* Amjad Belmiloud (note 12)

Soit $f \in C^2([0;1], \mathbb{R})$ telle que $f(1) > 0$, $f(0) < 0$, $f'(0) > 0$ et $f'' > 0$ sur $[0;1]$.

a. Montrer qu'il existe un unique $z \in]0;1[$ tel que $f(z) = 0$.

Soit $a \in]z;1]$ fixé.

b. Montrer que la tangente à la courbe de f (notée Γ_f) au point $(a, f(a))$ coupe l'axe (Ox) en un unique point $(x_0, 0)$ avec $x_0 \in]z;a[$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, en supposant x_n construit, comme à la question précédente, la tangente à Γ_f au point $(x_n, f(x_n))$ coupe l'axe (Ox) en un unique point $(x_{n+1}, 0)$ avec $x_{n+1} \in]z;x_n]$.

c. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers z.

d. Montrer l'existence de $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant x_{n+1} - z \leqslant M(x_n - z)^2$.

e. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - z| \leqslant \frac{(M(x_0 - z))^{2^n}}{M}$. Commenter.

3 *Centrale Maths1 PSI 2025* Maël Orduna (note 18)

a. Pour $x \geqslant 0$, montrer que $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + x^2 + t^2}$ est bien défini et le calculer.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$, calculer $I_n = \int_0^{\pi} \frac{dt}{1 + n^\alpha \pi^\alpha \sin^2(t)}$. Indication : on pourra poser $u = \frac{1}{\tan(t)}$.

c. Donner une condition nécessaire et suffisante, si $\alpha \in \mathbb{R}$, pour que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2(t)}$ converge.

4 *Mines PSI 2025* Lilian Agenais I (note 9)

On pose $I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$ et $I_2 = \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$.

a. Montrer l'existence de I_1 et I_2.

b. Montrer que $I_1 \geqslant \frac{2\sqrt{2\pi}}{3}$ et $I_2 \geqslant \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$.

c. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$ converge.

$\boxed{5}$ *Mines PSI 2025* Esther Barthou II (note 8)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} (-1)^{\lfloor P(x) \rfloor} dx$.

$\boxed{6}$ *Mines PSI 2025* Paul Lanardoune II (note 8,5)

Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists x_n \in \left[0; 1 - \frac{1}{n}\right],\ f\left(x_n + \frac{1}{n}\right) = f(x_n)$.

Indication : on pourra commencer par les petites valeurs de n.

b. Si $\alpha \in]0;1[\setminus \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$, trouver $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue avec $f(0) = f(1)$ et $\forall x \in [0; 1-\alpha],\ f(x+\alpha) \neq f(x)$.

$\boxed{7}$ *Mines PSI 2025* Simon Latxague I (note 10)

Soit $c \in \mathbb{R}_+^*$ et l'équation $(E)\ :\ x\sin(x) - c\cos(x) = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \left]n\pi; n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.

a. Montrer l'existence et l'unicité d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in I_n$ est une solution de (E).

b. Déterminer un équivalent simple y_n de $x_n - n\pi$.

c. Déterminer un équivalent de $x_n - n\pi - y_n$.

$\boxed{8}$ *Mines PSI 2025* Titouan Leprêtre I (note 15)

a. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, donner la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{x^{2\alpha+2}}\right) dx$ selon les valeurs de α.

b. Calculer la valeur $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{x^{2\alpha+2}}\right) dx$ en cas de convergence.

$\boxed{9}$ *Mines PSI 2025* Clément Rebola I (note 10)

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue et strictement positive.

a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe une unique subdivision $(x_0, \cdots, x_n)$ du segment $[a;b]$ qui vérifient les conditions $\forall k \in [\![1;n]\!],\ \displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt = \frac{1}{n}\int_a^b f(t)dt$.

b. Montrer la convergence de $\left(\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\right)_{n\geqslant 1}$ et calculer sa limite.

$\boxed{10}$ *CCINP PSI 2025* Anthony Peillex I (note 10,12)

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists! x \in [1;+\infty[,\ x - \ln(x) = n$. On notera u_n cet unique réel de $[1;+\infty[$.

b. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et trouver un équivalent de u_n.

c. Montrer que $u_n \underset{+\infty}{=} n + \ln(n) + \dfrac{\ln(n)}{n} - \dfrac{\ln^2(n)}{2n^2} + o\left(\dfrac{\ln^2(n)}{n^2}\right)$.

$\boxed{11}$ *Navale PSI 2025* Timéo Nivelle II

a. Soit une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue et un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-at}dt$ converge.

Montrer que $\forall x \geqslant a,\ \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ converge.

b. Soit une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-at}dt$ converge.

Est-ce que $\forall x \geqslant a,\ \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ converge ?

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 2 ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉNÉRALE

12 *ENS Cachan PSI 2025* Antoine Cailly, Lucie Dupouy et Bilal Mrani I (note 11,25 et 11,25 et 10)

Soit un entier $n \geqslant 2$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Pour un vecteur $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $x^T = (x_1 \ \cdots \ x_n)$, on dit que $x \geqslant 0$ si $\forall i \in [\![1;n]\!],\ x_i \geqslant 0$. Plus généralement, si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que $A \geqslant 0$ si $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_{i,j} \geqslant 0$.

a. Montrer que $\forall x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ Ax \geqslant 0 \Longrightarrow x \geqslant 0$ (on dit que A est monotone).

b. En déduire que A est inversible.

c. Montrer que $A^{-1} \geqslant 0$.

13 *Mines PSI 2025* Florian Allard II (note 15)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. On écrit que $A \simeq B$ s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PB$.

a. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Ker}(B)$ pour que $A \simeq B$.

b. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer une matrice B la plus simple possible telle que $A \simeq B$.

14 *Mines PSI 2025* Amjad Belmiloud II (note 13)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A.

a. Montrer que $F_1 = \mathrm{Vect}(e_1 + e_3, f(e_1) + f(e_3))$ et $F_2 = \mathrm{Vect}(e_3, f(e_3))$ sont stables par f.

b. Que peut-on dire de F_1 et F_2 ?

c. On pose $x = e_1$, montrer que $\mathcal{B} = (x, f(x), f^2(x), f^3(x))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

d. Trouver tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^4$ stables par f.

15 *Mines PSI 2025* Antoine Cailly II (note 15)

On note D_n le nombre de dérangements de $[\![1;n]\!]$, un dérangement étant une permutation sans point fixe.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

b. Déterminer la limite de $\left(\dfrac{D_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

On note D_n^+ (resp. D_n^-) le nombre de dérangements de signature $+1$ (resp. -1).
On pose $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = 1 - \delta_{i,j}$.

c. Calculer $\det(A)$.

d. Trouver un lien entre D_n^+, D_n^- et $\det(A)$.

e. En déduire les valeurs de D_n^+ et D_n^-.

16 *Mines PSI 2025* Margot Fabre II (note 14,5)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et f, g deux endomorphismes de E tels que $f + g = \mathrm{id}_E$ et $\mathrm{rang}(f) + \mathrm{rang}(g) \leqslant n$.

a. Montrer que $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Im}(f)$. En déduire que $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$.

b. Que peut-on en déduire sur $g \circ f$?

c. Montrer que f et g sont des projecteurs de E.

d. Faire de même pour des endomorphismes $f_1, \cdots, f_p$ de E tels que $\sum_{k=1}^{p} f_k = \mathrm{id}_E$ et $\sum_{k=1}^{p} \mathrm{rang}(f_k) \leqslant n$.

17 *Mines PSI 2025* Lucie Frémaux II (note 8,5)

Soit F un sous-espace de $\mathbb{K}[X]$ de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que F admet une base composée de polynômes de degrés deux à deux distincts.

18 *Mines PSI 2025* Clément Rebola II (note 10)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

a. Rappeler les différentes caractérisations d'un hyperplan de E.

Soit $a \in E \setminus \{0_E\}$, on appelle REBOLA de a tout $s \in GL(E)$ tel que :

- $s(a) = -a$.
- Il existe un hyperplan H de E tel que $\forall x \in H,\ s(x) = x$.

Soit R une famille génératrice finie de E.

b. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ un REBOLA de a tel que $s(R) = R$, montrer que s induit une bijection de R dans R.

c. Montrer qu'il existe au plus un $s \in \mathcal{L}(E)$ REBOLA de a vérifiant $s(R) = R$.

19 *Mines PSI 2025* Keanu Toofa I (note 15)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B)$ et $A^2B = A$.

a. Montrer que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(B)$.

b. Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(B) \oplus \mathrm{Ker}(B)$.

c. Montrer que $B^2A = B$.

20 *CCINP PSI 2025* Finlay Menzies II (note 9,23)

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2\mathrm{id}_E = 0$.

a. Montrer que f est un automorphisme de E.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer deux réels x_n et y_n tels que $f^n = x_n f + y_n \mathrm{id}_E$.

c. Y a-t-il unicité de x_n et y_n ?

d. Trouver deux réels α et β tels que $p_1 = \alpha(f - 2\mathrm{id}_E)$ et $p_2 = \beta(f - \mathrm{id}_E)$ soient des projecteurs.

e. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'endomorphisme f^n en fonction de p_1 et p_2.

21 *CCINP PSI 2025* Keanu Toofa II (note 14,63)

Soit $D : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ défini par $D(P) = P'$.

a. Soit F un sous-espace de $\mathbb{K}[X]$ stable par D contenant P de degré $d \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{K}_d[X] \subset F$.

b. Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$ stables par D.

22 *Mines-Télécom PSI 2025* Linon Le Guen I (note 14)

Soit un entier $n \geqslant 2$ et F un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par produit matriciel tel que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = F \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$.

On note p la projection sur $\mathrm{Vect}(I_n)$ parallèlement à F.

On note $(E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la base canonique formée des matrices élémentaires.

a. Montrer que $\forall (M, M') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ p(MM') = p(M)p(M')$.

b. Montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M^2 \in F \Longrightarrow M \in F$.

c. Rappeler ce que vaut $E_{i,j}E_{k,l}$.

d. Montrer que les matrices $E_{i,j}$ appartiennent à F. Conclure.

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 3 SÉRIES NUMÉRIQUES, SÉRIES DE FONCTIONS ET SÉRIES ENTIÈRES

23 *Centrale Maths1 PSI 2025* Rose Boudjenah (note 13)

Soit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge et $S :]-1;1[\to \mathbb{R}$ définie par $S(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$.

a. Montrer que $\lim\limits_{t\to 1^-} S(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ dans les deux cas suivants :

- La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs.
- La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée et $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b. En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

c. Déterminer la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

d. On suppose $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ et $\lim\limits_{t\to 1} S(t) = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge et que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell$.

24 *Centrale Maths1 PSI 2025* Adrien Courmont (note 17)

a. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{=} 1 - \dfrac{\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ avec $\alpha > 1$. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge. Indication : pour $\beta \in]1;\alpha[$, montrer que $(n^\beta u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît à partir d'un certain rang.

b. Donner le développement en série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x}$ et donner le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$.

c. En supposant que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$, déterminer $S(x)$ si $x \in]-R;R[$ et majorer R.

d. Déterminer une expression de u_n en fonction de n.

25 *Centrale Maths1 PSI 2025* Margot Fabre (note 13)

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et une fonction $f : [n_0;+\infty[\to \mathbb{R}$ continue, décroissante et positive.

Pour tout entier $n \geqslant n_0+1$, on pose $w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n)$.

a. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0+1} w_n$ converge.

b. En déduire que $\sum\limits_{n\geqslant n_0} f(n)$ et $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature.

c. Soit $a \in \mathbb{R}$, déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n\ln^a(n)}$.

d. Montrer que $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{\ln(k)}{k} \underset{+\infty}{\sim} C\ln^2(n)$ avec une constante C à déterminer.

26 *Centrale Maths1 PSI 2025* Gaspard Girard (note 10)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right)$.

a. Définir ce qu'est une fonction k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction Ψ à déterminer.

c. Étudier la convergence uniforme sur tout segment de $(f_n)_{n\geqslant 1}$.

Questions de cours :

- Citer le théorème d'intégration terme à terme.
- Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(2^x, x^2)$. Dériver g.

27 *Centrale Maths1 PSI 2025* Linon Le Guen et Amaury Viaud (note 16 et 13)

a. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe une unique fonction $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f_n(1) = f_n(2) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n''(x) = (-1)^n 2^{-nx^2}$.

b. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n'$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n''$ convergent uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

c. Montrer que $F = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

d. Montrer que $||F||_{\infty,\mathbb{R}_+^*} \leqslant \frac{1}{3}$.

28 *Centrale Maths1 PSI 2025* Judith Todero (note 10)

a. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui tend vers 0. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit la somme partielle $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et on suppose que la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Monter que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

b. Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k\sqrt{k} \underset{+\infty}{\sim} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{2}$.

29 *Mines PSI 2025* Florian Allard I (note 15)

Soit $x \in \mathbb{R}$, $q \in]0;1[$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $(x,q)_n = \prod\limits_{k=0}^{n-1}(1 - q^k x)$.

a. Montrer que $\big((x,q)_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel qu'on note $(x,q)_\infty$.

Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $p(x) = (x,q)_\infty$.

b. Montrer que p est continue sur $\mathbb{R}$.

c. Montrer que p est l'unique fonction continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (1-x)f(qx)$.

30 *Mines PSI 2025* Théodore Bélicard II (note 11,5)

Soit une marche dans $\mathbb{Z}^2$ où on note M_k le point à l'instant k sachant que $M_0 = (0,0)$ et que si $M_k = (a_k, b_k)$, on a avec probabilité $1/3$, $M_{k+1} = (a_k+1, b_k)$ ou $M_{k+1} = (a_k, b_k+1)$ ou $M_{k+1} = (a_k, b_k-1)$ mais sans possibilité de retour immédiat en arrière (un $(0,+1)$ ne peut pas être suivi juste après par un $(0,-1)$).

On note u_k le nombre de chemins possibles au jusqu'à l'étape k avec $u_0 = 1$ par convention.

a. Calculer u_1, u_2, u_3.

b. Pour $n \geqslant 1$, trouver une relation donnant u_{n+1} en fonction de $u_0, \cdots, u_n$.

c. Montrer que le rayon R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$ vérifie $R > 0$.

d. Calculer la valeur de $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ pour x assez petit.

e. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{1/n}$.

31 *Mines PSI 2025* Antoine Cailly I (note 15)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_0^1 e^{x^n}\,dx$.

a. Calculer u_1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone et convergente.

b. Montrer que $\forall y \in [0;1],\ 1 + y \leqslant e^y \leqslant 1 + (e-1)y$.

c. En déduire la valeur de $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

d. Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$ la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (u_n - \ell)^\alpha$ converge ?

32 *Mines PSI 2025* Margot Fabre I (note 14,5)

Pour $(a, q) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|q| < 1$ et $x \in]-1;1[$, on définit la suite $(S_N(x))_{N\in\mathbb{N}}$ par $S_N(x) = \prod\limits_{n=0}^{N} \dfrac{1 - axq^n}{1 - xq^n}$.

a. Montrer que la suite $(S_N(x))_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie qu'on note $S(x)$.

b. Montrer que la fonction S est l'unique fonction continue $f :]-1;1[\to \mathbb{R}$ qui vérifient les conditions $f(0) = 1$ et $\forall x \in]-1;1[,\ (1-x)f(x) = (1-ax)f(qx)$.

c. En déduire que S est développable en série entière sur $]-1;1[$.

33 *Mines PSI 2025* Lucie Frémaux et Judith Todero I (note 8,5 et 8,5)

Soit les deux suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$, $u_1 = a > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{\sqrt{n}}$.

a. Trouver, pour $n \geqslant 2$, une relation entre S_{n-1} et u_n.

b. Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

34 *Mines PSI 2025* Benjamin Lucante I (note 15)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ par $f_n(t) = n^\alpha t^n \sin(\pi t)$.

a. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b. Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On pourra poser $u_n : t \mapsto n\tan(\pi t) + \pi t$.

c. Étudier la convergence simple de la suite $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$.

d. Étudier la continuité de $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$.

35 *Mines PSI 2025* Bilal Mrani II (note 17,5)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2$.

a. Montrer que $\exists \gamma \in \mathbb{R},\ H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

b. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} (H_{2n} - H_n)$.

c. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{2X^3 + 3X^2 + X}$.

d. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{a_n}$ converge. Calculer sa somme.

36 *Mines PSI 2025* Maxime Plottu II (note 13,5)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pos $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{Arctan}(nx)}{n^2}$.

a. Déterminer le domaine de définition D de $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

b. Montrer que S est continue sur D.

Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t^2} dt$.

c. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et trouver un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers 0^+.

d. En utilisant F, trouver un équivalent de S en 0^+.

37 *Mines PSI 2025* Adrien Richard I (note 5)

Soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = (n+1)\big(a_{n+1} + a_n\big)$.

a. Montrer que $\forall n \geqslant 2,\ (n-2)! \leqslant a_n \leqslant n!$.

b. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{a_n}{n!} x^n$.

Pour $x \in]-R\,;R[$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!} x^n$.

c. Pour $x \in]-R\,;R[$, montrer que $(1-x)S'(x) - xS(x) = 0$.

d. En déduire une expression simple de $S(x)$ pour $x \in]-R\,;R[$, puis une expression de a_n.

38 *Mines PSI 2025* Keanu Toofa II (note 15)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ et $f_0(x) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{f_n(t)} dt$.

a. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels p_n et β_n tels que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = p_n x^{\beta_n}$.

b. Déterminer β_n en fonction de n et donner $\ln(p_n)$ sous forme d'une somme.

c. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f sur $\mathbb{R}_+$.

d. Donner une expression simple de f.

39 *CCINP PSI 2025* Amjad Belmiloud I (note 16,99)

On définit la fonction S par $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

a. Déterminer l'ensemble de définition D de S.

b. La fonction S est-elle continue sur D ?

c. Montrer que S est intégrable sur D.

d. Montrer que la fonction S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

e. Exprimer $S(x)$ à l'aide de fonctions usuelles pour $x \in D$.

f. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(x) dx$.

40 *CCINP PSI 2025* Lucie Frémaux I (note 19,11)

On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on se $f_n : x \mapsto \frac{x}{x^2+n^2}$.

a. Quel est le domaine de définition D de f ?

b. Étudier la continuité de f sur D.

c. Y a-t-il convergence normale de $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$?

d. Déterminer $\ell = \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

e. Qu'en déduire quant à la convergence uniforme de $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$?

f. Donner un équivalent de $f(x) - \ell$ en $+\infty$.

41 *CCINP PSI 2025* Louise Poully-Tarin II (note 15,27)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $g_n : x \mapsto e^{-nx^2} \operatorname{Arctan}(nx^2)$.

a. Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g.

b. Soit $a > 0$, montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a;+\infty[$.

c. Est-ce que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$?

42 *CCINP PSI 2025* Keanu Toofa I (note 14,63)

Soit a un réel positif ou nul. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \frac{nx(x^2+a)e^{-x}}{nx+1}$.

a. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0;1]$ vers une fonction f que l'on précisera.

b. Que dire de la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur $[0;1]$ en fonction de a ?

c. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[R;1]$ dès que $0 < R < 1$.

43 *Mines-Télécom PSI 2025* Rose Boudjenah I (note 15)

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 2$, $u_2 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = u_{n+1} + u_n$.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 2^n$.

b. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ vérifie $R > 0$.

c. En posant $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, montrer que $\forall x \in]-R;R[,\ f(x) = \frac{2x+3x^2}{1-x^2-x^3}$.

d. Donner le rayon de convergence R en fonction des racines de $P = X^3 + X^2 - 1$.

44 *Mines-Télécom PSI 2025* Maxime Felgate II (note 13)

On définit la fonction S par $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$.

a. Donner l'ensemble de définition D de S.

b. Déterminer les limites de S aux bornes de D.

c. Exprimer $S(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

d. Calculer $\int_0^{+\infty} S(x)\,dx$.

45 *Mines-Télécom PSI 2025* Gaspard Girard I (note 14)

Pour x et s réels, en cas de convergence, on pose $f_s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^s}$.

a. Donner les domaines de définition de f_0 et f_1 et en trouver des expressions simples.

b. Donner le rayon de convergence R_s de la série entière $\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n^s}$.

c. Donner les domaines de définition I_s de f_s en fonction de s.

d. Pour $s \in \mathbb{R}$ et x convenable, établir un lien entre $f_s(x)$ et $f_{s-1}(x)$.

e. Trouver une expression simple de $f_{-1}(x)$ et $f_{-2}(x)$ pour x convenable.

f. Déterminer un équivalent en 1^- de $f_{-p}(x)$ pour $p \in \mathbb{N}$.

46 *Mines-Télécom PSI 2025* Louise Poully-Tarin II (note 20)

On s'intéresse à la série entière $\sum_{n \geqslant 2} \frac{2x^n}{n^2 - 1}$. On note S sa fonction somme.

a. Calculer le rayon de convergence R de cette série entière.

b. Exprimer $S(x)$ à l'aide de fonctions usuelles pour $x \in]-R\,;R[$.

c. Montrer que S admet des limites finies en 1^- et -1^+.

d. Calculer $S(1)$ et $S(-1)$.

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 4
ESPACES VECTORIELS NORMÉS

47 *X PSI 2025* Théodore Bélicard I (note 5)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et f définie sur E par $f(P) = \dfrac{1}{2}\Big(P\Big(\dfrac{X}{2}\Big) + P\Big(\dfrac{X+1}{2}\Big)\Big)$.

a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$ et $P \in E$, donner une expression de $f^n(P)(a)$ sous forme de somme.

b. Déterminer la valeur, pour $P \in E$, de $\lim\limits_{n\to+\infty} f^n(P)(0)$.

c. Trouver de même, pour $x \in [0;1]$, la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} f^n(P)(x)$.

d. Montrer que 1 est valeur propre de f et déterminer $E_1(f)$.

e. Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $|k| > 1$, est-ce que k peut être valeur propre de f ? Et -1 ?

f. Pour $p \in E$, calculer $\big(f(P)\big)'$. Déterminer $E_{1/2}(f)$.

48 *X PSI 2025* Clément Rebola I (note 11,5)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et $\Psi : E \to E$ qui vérifie $\forall (x,y) \in E^2,\ \Psi(x+y) = \Psi(x) + \Psi(y)$ et $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in B_f(O_E, 1),\ ||\Psi(x)|| \leqslant M$.

a. Montrer que Ψ est continue.

b. Montrer que Ψ est linéaire.

49 *ENS Cachan PSI 2025* Lilian Agenais (note 10)

a. Définir un espace euclidien.

On dit qu'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E de dimension 2 et de base (v_1, v_2) vérifie la propriété $(*)$ si on a la relation $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ ||\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2|| = |||\lambda_1|v_1 + |\lambda_2|v_2||$.

b. Donner un exemple de plan réel normé et de base (v_1, v_2) vérifiant $(*)$.

c. Donner un exemple de plan réel normé et de base (v_1, v_2) ne vérifiant pas $(*)$.

Soit E un plan normé et une base (v_1, v_2) de E vérifiant $(*)$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(\mu) = ||\mu v_1 + v_2||$.

d. Montrer que $\forall (\mu, \mu') \in \mathbb{R}^2,\ f\Big(\dfrac{\mu + \mu'}{2}\Big) \leqslant \dfrac{1}{2}\Big(f(\mu) + f(\mu')\Big)$.

e. En déduire que f est convexe.

f. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

g. Montrer : $\forall (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^4,\ (|\alpha_1| \leqslant |\beta_1| \text{ et } |\alpha_2| \leqslant |\beta_2|) \Longrightarrow ||\,|\alpha_1|v_1 + |\alpha_2|v_2\,|| \leqslant ||\,|\beta_1|v_1 + |\beta_2|v_2\,||$.

50 *ENS Cachan PSI 2025* Antoine Cailly, Lucie Dupouy et Bilal Mrani II (note 11,25 et 11,25 et 10)

Soit $n \geqslant 2$, $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale strictement dominante : $\forall i \in [\![1;n]\!],\ |a_{i,i}| > \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}|$.

Soit $E = (e_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $F = (e_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définies par $e_{i,j} = a_{i,j}$ si $i \leqslant j$ et $e_{i,j} = 0$ sinon, et $f_{i,j} = -a_{i,j}$ si $i > j$ et $f_{i,j} = 0$ sinon.

a. Montrer que A est inversible.

b. Montrer que $\forall (u,v) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2,\ (Ev = Fu \text{ et } u \neq 0) \Longrightarrow ||v||_\infty < ||u||_\infty$.

c. En déduire qu'il existe $k \in [0;1[$ tel que $\forall (u,v) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2,\ (Ev = Fu \text{ et } u \neq 0) \Longrightarrow ||v||_\infty \leqslant k||u||_\infty$.

Soit $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On définit la suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ par $Ex_{p+1} = Fx_p + b$.

d. Montrer que $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

e. Montrer que $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera.

51 <u>*ENS Cachan PSI 2025*</u> Jules Mérillou (note 11,25)

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$. Si $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $||f||_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p}$.

a. Montrer que $f \mapsto ||f||_2$ et $f \mapsto ||f||_4$ sont des normes sur E.

b. Montrer que $\forall f \in E,\ ||f||_2 \leqslant ||f||_4$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ appartenant à E définie par $f_n(x) = 0$ si $x \in \left[0; \frac{1}{2n}\right]$, f_n affine sur $\left[\frac{1}{2n}; \frac{1}{n}\right]$ et $f_n(x) = x^{-1/4}$ si $x \in \left[\frac{1}{n}; 1\right]$. Comparer $||f_n||_2$ et $||f_n||_4$. Qu'en conclure ?

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X_n = \pm 1) = \frac{1}{2}$.

Pour une suite réelle $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $N_{n,p}(A) = \left(\mathbb{E}\left(\left| \sum\limits_{k=1}^{n} a_k X_k \right|^p \right) \right)^{1/p}$.

d. Calculer $N_{n,2}(A)$.

e. Supposons que $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 = 1$, montrer que $N_{n,4}(A) = 3 - 2 \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^4$.

52 <u>*Centrale Maths1 PSI 2025*</u> Bilal Mrani (note 13)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

a. Rappeler la définition de “f bornée sur Ω”.

b. Rappeler la définition de “f admet un maximum sur Ω”.

On étend la définition de l'aspect borné d'une fonction aux fonctions à variable et à valeurs complexes et celle d'une fonction admettant un maximum aux fonctions à variable complexe et à valeurs réelles.

Soit $s : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ définies par $s(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ et $\varphi(z) = |s(z)|^2$.

c. Est-ce que s est bornée sur $\mathbb{C}$?

d. Est-ce que φ est bornée sur $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$?

e. Montrer que φ admet un maximum sur D atteint en deux points seulement.

53 <u>*Centrale Maths1 PSI 2025*</u> Maxime Plottu (note 15)

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et la suite $\big(u_n(a)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1(a) = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1}(a) = u_n^2(a) + \dfrac{1}{n+1}$.

On définit la partie $E_\infty = \{a \in \mathbb{R}_+^* \mid u_n(a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\}$.

a. Montrer que $a \in E_\infty \iff (\exists n \in \mathbb{N}^*,\ u_n(a) \geqslant 1)$.

b. Montrer que E_∞ est une partie convexe de $\mathbb{R}_+^*$ et justifier que $[1; +\infty[\subset E_\infty$.

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall a > 0,\ u_n(b) \underset{b\to a}{\longrightarrow} u_n(a)$.

d. Montrer que E_∞ est une partie ouverte.

54 <u>*Mines PSI 2025*</u> Lucas Balanger I (note 11,5)

Soit $(E, ||\,.\,||)$ un espace vectoriel normé et F un fermé non vide de E.

Pour $x \in E$, on note $d_F(x) = d(x, F) = \underset{f\in F}{\mathrm{Inf}}(||x - f||)$ et $\Gamma(x) = \{f \in F \mid ||x - f|| = d_F(x)\}$.

a. Trouver les $x \in E$ pour lesquels $d_F(x) = 0$.

b. Montrer que d_F est 1-lipschitzienne.

c. Pour $x \in E$, montrer que $\Gamma(x)$ est non vide.

Dans la suite, E est préhilbertien réel, $||\,.\,||$ est la norme euclidienne et F est un fermé convexe de E.

d. Montrer que $\Gamma(x)$ ne contient qu'un élément qu'on note u_x.

e. Montrer que l'application $p_F : E \to E$ telle que $p_F(x) = u_x$ vérifie $p_F^2 = p_F$ et qu'elle est 1-lipschitzienne.

55 *Mines PSI 2025* Théodore Bélicard I (note 11,5)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $S_A = \{Q^{-1}AQ \mid Q \in GL_n(\mathbb{C})\}$ l'ensemble des matrices semblables à A.
Pour $\delta > 0$, on pose $P_\delta = \mathrm{diag}(\delta, \delta^2, \cdots, \delta^n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, exprimer $P_\delta^{-1}AP_\delta$.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente, montrer qu'il existe une suite $(B_p)_{p\in\mathbb{N}} \in S_A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{p\to+\infty} B_p = 0$.

c. Réciproquement, s'il existe une suite $(B_p)_{p\in\mathbb{N}} \in S_A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{p\to+\infty} B_p = 0$, montrer que A est nilpotente.

56 *Mines PSI 2025* Adrien Courmont II (note 15)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

Montrer que $A = \left\{f(m) - f(n) \mid (m, n) \in \mathbb{N}^2\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

57 *Mines PSI 2025* Jules Mérillou I (note 14,5)

Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme autoadjoint de E.
a. Montrer qu'il existe un vecteur unitaire x_0 de E tel que $\forall x \in E,\ ||x|| = 1 \Longrightarrow < u(x), x > \geqslant < u(x_0), x_0 >$.

Soit $y_0 \in E$ tel que $||y_0|| = 1$ et $y_0 \perp x_0$, on pose $\gamma : t \mapsto \cos(t)x_0 + \sin(t)y_0$ et $\phi : t \mapsto < u(\gamma(t)), \gamma(t) >$.

b. Calculer, pour $t \in \mathbb{R}$, la valeur de $||\gamma(t)||$.
c. Montrer que ϕ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $\phi'(0) = 0$.
d. Montrer que y_0 est orthogonal à $u(x_0)$.
e. En déduire que x_0 est un vecteur propre de u.
f. Pour un sous-espace F de E stable par u, monter que $F^\perp$ est aussi stable par u.
g. En déduire une preuve du théorème spectral.

58 *Mines PSI 2025* Amaury Viaud I (note 13)

Soit E l'ensemble des applications $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ qui sont lipschitziennes.
Pour $f \in E$, on note $K(f)$ le plus petit réel $k \geqslant 0$ tel que f est k-lipschitzienne.
a. Montrer que E est un espace vectoriel.
b. Pour $f \in E$, montrer que $K(f)$ est bien défini.
c. Pourquoi les fonctions polynomiales P appartiennent à E et déterminer $K(P)$.
d. Montrer que $\forall f \in E,\ ||f||_\infty \leqslant \underset{[0;1]}{\mathrm{Min}}(|f|) + K(f)$.

e. Montrer que $\dfrac{K}{||\cdot||_\infty}$ n'est pas bornée sur $E \setminus \{0\}$.

f. K est-elle une norme sur E ?

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 5 RÉDUCTION

59 *Centrale Maths1 PSI 2025* Esther Barthou (note 16)

Soit $a \in \mathbb{C}$, on dit que a est un nombre algébrique s'il existe un polynôme P non nul à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tel que $P(a) = 0$. Soit $b = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ et $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer que $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(M)$.

b. Montrer que b est algébrique.

c. Soit z une racine de $X^2 + bX + 1$, trouver une matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Z})$ telle que z est valeur propre de M associée au vecteur propre X tel que $X^T = \begin{pmatrix} 1 & b & z & bz \end{pmatrix}$. En déduire que z est un nombre algébrique.

d. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, a racine de $X^3 + 2X^2 + X + 3$, trouver $P \neq 0 \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(a^2 + a - 1) = 0$.

60 *Centrale Maths1 PSI 2025* Lucie Dupouy (note 13)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $p \in \mathbb{N}^*$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ de degré $q \in \mathbb{N}^*$.

On définit l'application $T_{P,Q} : \mathbb{C}_{p-1}[X] \times \mathbb{C}_{q-1}[X] \to \mathbb{C}_{p+q-1}[X]$ par $T_{P,Q}(R_1, R_2) = PR_1 + QR_2$.

a. Montrer que si P et Q ont une racine commune, $T_{P,Q}$ n'est pas surjective.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $H = \chi_M$, montrer que si $T_{H',H}$ est inversible, alors M est diagonalisable.

c. Si P et Q sont scindés à racines simples et sans racine commune, déterminer deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(T_{P,Q})$ soit diagonale.

61 *Centrale Maths1 PSI 2025* Syuma Louette (note 11)

Pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on définit $C_M = \{PMP^{-1} \mid P \in GL_2(\mathbb{R})\}$.

a. Montrer que toute matrice de C_M a même trace et déterminant que M. La réciproque est-elle vraie ?

b. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ trigonalisable mais non diagonalisable, montrer que C_A n'est pas bornée. Est-il fermé ?

c. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ diagonalisable, montrer que C_A est fermé. Est-il borné ?

62 *Mines PSI 2025* Lilian Agenais II (note 9)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer que si B est diagonalisable, alors A l'est aussi.

b. A et B ont-elles les mêmes valeurs propres ?

c. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

63 *Mines PSI 2025* Esther Barthou I (note 8)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $F = \mathbb{C}^{N+1}$ et l'application $\varphi : F \to F$ définie par $\varphi(x) = y$ où $x = (x_0, \cdots, x_N)$ et $y = (y_0, \cdots, y_N)$ avec $\forall k \in [\![0; N]\!],\ y_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i x_i$.

a. Montrer que φ est un endomorphisme de F.

b. Déterminer le spectre de φ.

Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs complexes et $\Phi : E \to E$ définie par $\varphi(x) = y$ où $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\forall k \in \mathbb{N},\ y_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i x_i$.

c. Déterminer le spectre de Φ et les sous-espaces propres associés.

d. Calculer $\Phi \circ \Phi$.

64 *Mines PSI 2025* Lucie Dupouy I (note 13,5)

Soit cinq réels $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1$ tels que $\forall k \in \mathbb{N},\ k\alpha_2 + \beta_1 \neq 0$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et on définit f_n sur E_n par $\forall P \in E_n,\ f_n(P) = (\alpha_2 X^2 + \alpha_1 X + \alpha_0)P'' + (\beta_1 X + \beta_0)P'$.

a. Montrer que f_n est un endomorphisme de E_n. Est-ce un automorphisme de E_n ?

b. Écrire la matrice de f_n dans la base canonique de E_n. Est-ce que f_n est diagonalisable ?

c. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{deg}(P_n) = n$ et $f_n(P_n) \in \mathrm{Vect}(P_n)$.

65 *Mines PSI 2025* Simon Latxague II (note 10)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0; n-1]\!]$, on note $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

Pour tout $p \in [\![0; n-1]\!]$, on définit le vecteur u_p de $E = \mathbb{C}^n$ par $u_p^T = (\omega_0^p\ \omega_1^p\ \cdots\ \omega_{n-1}^p)$.

a. Montrer que $(u_0, \cdots, u_{n-1})$ est une base de E.

b. Diagonaliser la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Soit, pour $(a_0, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, la matrice circulante $C(a_0, \cdots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$.

c. La matrice $C(a_0, \cdots, a_{n-1})$ est-elle diagonalisable ? Donner son spectre.

66 *Mines PSI 2025* Finlay Menzies I (note 7,5)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A.

a. Montrer que f n'est pas diagonalisable.

b. Montrer qu'il n'y a aucune droite de $\mathbb{R}^4$ stable par f.

c. Montrer qu'il n'y a aucun hyperplan de $\mathbb{R}^4$ stable par f.

d. Montrer que $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$ et $\mathrm{Ker}(f^2 + 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$ sont des plans stables par f.

e. Trouver tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^4$ stables par f.

67 *Mines PSI 2025* Timéo Nivelle I (note 15)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_{i,i} = i$ et $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$.

On note P_n le polynôme caractéristique de A_n.

a. Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ P_{n+1} = (X-n)P_n - X(X-1)\cdots(X-n+1)$.

b. Montrer que, $\forall k \in [\![0; n-1]\!],\ (-1)^k P_n(k)$ a le même signe que $P_n(0)$ et que $P_n(n-1) < 0$ et $P_n(n) < 0$.

c. En déduire que A_n admet n valeurs propres réelles distinctes.

68 *Mines PSI 2025* Étienne Offant I (note 9)

Soit $\Phi : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_4[X]$ défini par $\Phi(P) = X^2\big(P'(X+1) - P'(X)\big)$.

a. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$. Trouver son noyau.

b. Déterminer la matrice de Φ dans la base canonique. Quelles sont les valeurs propres de Φ ?

c. Montrer que $F = X^2\,\mathbb{R}_2[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ stable par Φ.

d. Établir que $\mathbb{R}_4[X] = \mathrm{Ker}(\Phi) \oplus F$.

e. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ? Donner ses éléments propres.

69 *Mines PSI 2025* Maël Orduna II (note 17)

Soit un entier $n \geqslant 3$. Pour $(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$, on pose $M(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & x_2 \\ x_2 & 0 & \cdots & 0 & x_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Calculer $g(x_1,x_2) = \det\big(M(x_1,x_2)\big)$.

b. Déterminer la valeur de $\underset{\mathbb{U}^2}{\mathrm{Max}}(|g|)$ où $\mathbb{U} = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1\}$ (cercle unité) en déterminant les points de $\mathbb{U}^2$ en lesquels ce maximum est atteint.

c. Étudier les variations de $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(t) = g(t, 1-t)$.

70 *Mines PSI 2025* Noah Seguin I (note 13,5)

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que : A diagonalisable $\iff (\forall Q \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}_0[X],\ \exists M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ Q(M) = A)$.

71 *Mines PSI 2025* Judith Todero II (note 8,5)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$.

a. Exprimer les éléments propres de B en fonction de ceux de A.

b. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que B soit diagonalisable.

72 *CCINP PSI 2025* Amjad Belmiloud II (note 16,99)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $AB - BA = B$.

a. Montrer que $\mathrm{Tr}\,(B) = 0$ et que $B \notin GL_n(\mathbb{R})$.

b. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ AB^k - B^kA = kB^k$.

c. Montrer que B est nilpotente.

73 *CCINP PSI 2025* Étienne Offant II (note 17,86)

Soit un entier $n \geqslant 3$ et $A \neq 0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + 9A = 0$.

a. Montrer que le spectre de A est inclus dans $\{0, 3i, -3i\}$.

b. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

c. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

d. Si n est impair, justifier que A n'est pas inversible.

74 *CCINP PSI 2025* Anthony Peillex II (note 10,12)

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer le spectre réel de A_α.

b. Étudier la diagonalisabilité de A_α dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ en fonction des valeurs de α.

75 *Mines-Télécom PSI 2025* Ana Galharret II (note 18)

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer le rang de A.

b. Étudier la diagonalisabilité de A en donnant ses éléments propres.

c. Calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}$.

76 *Navale PSI 2025* Timéo Nivelle I

Soit un entier $n \geqslant 2$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{rang}(A) = 2$, $\operatorname{Tr}(A) = 0$ et $A^n \neq 0$.

Montrer que A est diagonalisable.

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 6 THÉORÈMES DE DOMINATION

77 *Centrale Maths1 PSI 2025* Florian Allard et Lucie Frémaux (note 15 et 12)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et intégrable sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ L(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\lambda t)dt$ existe.

b. Montrer que $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} L(\lambda) = 0$. Indication : montrer que $\forall a > 0,\ \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_{-a}^{a} f(t)\sin(\lambda t)dt = 0$.

c. Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$ existe.

d. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{x}dx$ et $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}dx$ sont bien définis.

e. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = \frac{\pi}{2}$. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = \frac{\pi}{2}$. Déterminer la valeur de I.

78 *Centrale Maths1 PSI 2025* Titouan Leprêtre (note 16)

Soit $L = \{f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \mid t \mapsto f(t)e^{-yt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $y > 0\}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in L$, on définit $N_n(f) : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par $N_n(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-nx}dt$.

Pour tout réel $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on définit la fonction $\varphi_\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $\varphi_\alpha(t) = e^{-\alpha t}$.

a. Montrer que $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+,\ \varphi_\alpha \in L$. Calculer $N_n(\varphi_\alpha)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Soit $f \in L$, montrer que $(N_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Soit $f \in L$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} N_n(f)(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

d. Soit $f \in L$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et f' bornée sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lim\limits_{x \to +\infty} xN_n(f)(x) = \frac{f(0)}{n}$.

e. Soit $f \in L$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} xN_n(f)(x)$.

79 *Mines PSI 2025* Lucie Dupouy II (note 13,5)

Pour $x \in \mathbb{R}$, sous réserve d'existence, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\ln(t)dt$.

a. Déterminer le domaine de définition D de f.

b. Montrer que f est solution sur D de l'équation différentielle $(E)\ :\ x^2y' + xy + 1 = 0$.

c. En déduire une expression de $f(x)$ pour $x \in D$ sachant que l'on peut montrer que $f(1) = -\gamma$.

80 *Mines PSI 2025* Noah Seguin II (note 13,5)

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on définit $f(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-t^2x^2}}{1+t^3}dt$.

a. Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Trouver un équivalent de f en $+\infty$ sous la forme $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{C}{x^a}$ avec C est une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer et $a \in \mathbb{R}$.

c. Donner un équivalent de f en 0.

81 *CCINP PSI 2025* Florian Allard II (note 20)

On pose $I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt$.

a. Montrer l'existence de I.

b. Montrer que $I = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

c. En déduire la valeur de I en fonction de π.

82 *CCINP PSI 2025* Étienne Offant I (note 17,86)

Pour $(\alpha, t) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit $I_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sin^\alpha(t)\cos^k(t)$ et $u_n(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \sin^\alpha(t)\cos^n(t)\,dt$.

a. Déterminer le domaine de définition D_α de I_α en fonction de α.

b. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, donner une expression simplifiée de $I_\alpha(t)$.

c. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que I_α soit intégrable sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$.

d. Donner les hypothèses du théorème de convergence dominée.

e. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(\alpha)$ converge.

f. Calculer $u_n(3)$.

83 *Mines-Télécom PSI 2025* Ana Galharret I (note 18)

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\operatorname{sh}(xt)}{t}\,dt$.

a. Déterminer le domaine de définition D de f.

b. Montrer que φ est de classe C^1 sur D.

c. Calculer f' et en déduire f.

84 *Mines-Télécom PSI 2025* Linon Le Guen II (note 14)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$ et $J_n = \int_0^1 \ln(1+t^n)\,dt$.

a. Déterminer la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qu'on note ℓ et ℓ'.

b. Trouver un équivalent de $\ell - I_n$ quand n tend vers $+\infty$.

c. Vérifier que $\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,du = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$.

d. En déduire un équivalent de J_n quand n tend vers $+\infty$.

85 *Saint-Cyr PSI 2025* Timéo Nivelle II (note 18)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$ et $J_n = \int_0^1 \ln(1+t^n)\,dt$.

a. Afficher avec Pyzo les premiers termes de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Conjecturer sa limite ℓ.

b. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = \ell$.

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 - I_n = \frac{1}{n}\left(\ln(2) - \int_0^1 \ln(1+t^n)\,dt\right)$. En déduire un équivalent de $\ell - I_n$.

d. Vérifier que $\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,du = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$.

e. En déduire un équivalent de J_n.

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 7
ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS ET ESPACES EUCLIDIENS

86 *Centrale Maths1 PSI 2025* Antoine Cailly (note 15)

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1, A_2) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A_1 X A_2 = X$. Montrer qu'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $A_1 = \lambda I_n$ et $A_2 = \dfrac{1}{\lambda} I_n$.

b. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall g \in \mathcal{L}(E),\ f \circ g \circ f = 0$. Montrer que $f = 0$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ et l'application $\Phi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\Phi_A(X) = AXA$.

Montrer que $A \in O(n) \iff \Phi_A$ est une isométrie.

87 *Centrale Maths1 PSI 2025* Simon Latxague et Noah Seguin (note 10 et 12)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in O(\mathbb{R}^n)$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

a. Montrer que F est stable par f si et seulement si $F^\perp$ est stable par f.

b. Montrer que $\mathsf{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$ et $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^n$.

c. Soit $(u_1, \cdots, u_p)$ une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et, pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, soit s_k la réflexion par rapport à $H_k = \mathsf{Vect}(u_k)^\perp$. Montrer que $\mathrm{Im}\,(s_1 \cdots\cdots \circ s_p - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) = \mathsf{Vect}(u_1, \cdots, u_p)$.

88 *Centrale Maths1 PSI 2025* Benjamin Lucante (note 12)

Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$.

a. Calculer $P^2(X)$. En déduire que $\sum\limits_{0 \leqslant p,q \leqslant n} \dfrac{a_p a_q}{p+q+1} \geqslant 0$.

b. Pour $k \in \mathbb{Z}$, calculer $\displaystyle\int_0^\pi e^{ikt}\,dt$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^\pi |P(e^{it})|^2\,dt$.

c. Pour $Q \in \mathbb{C}[X]$, montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q(x)\,dx = -i \int_0^\pi Q(e^{it})e^{it}\,dt$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \left(\dfrac{1}{i+j+1}\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ (matrice de HILBERT).

Pour $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ tel que $X^T = (x_0\ \cdots\ x_n)$, on lui associe le polynôme $\widetilde{X}$ défini par $\widetilde{X} : t \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} x_k t^k$.

d. Pour $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ tel que $X^T = (x_0\ \cdots\ x_n)$, calculer $X^T H_n X$ en fonction de $\displaystyle\int_0^1 \widetilde{X}(t)^2\,dt$.

e. En déduire que $H_n \in S_{n+1}^{++}(\mathbb{R})$ et que sa plus grande valeur propre est strictement inférieure à π.

89 *Centrale Maths1 PSI 2025* Adrien Richard et Keanu Toofa (note 13 et 16)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & \vdots & 2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$.

a. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et λ une valeur propre complexe de M associée à un vecteur propre $Z \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Montrer que $\lambda \in \mathbb{R}$. Indication : calculer $\overline{Z}^T MZ$.

b. Calculer $\mathrm{Tr}\ (A_n)$ et $\mathrm{Tr}\ (A_n^2)$.

c. Déterminer les valeurs propres de A_n et une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A_n.

90 *Mines PSI 2025* Titouan Leprêtre II (note 15)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable et $M = \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & A \end{pmatrix}$.

a. La matrice M est-elle diagonalisable ?

b. Trouver les éléments propres de M en fonction de ceux de A.

91 *Mines PSI 2025* Syuma Louette I et Antoine Meron I (note 11 et 11)

Soit $\varphi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_0(x) = e^{-x^2}$. On rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

On pose, pour $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, la quantité $(P|Q) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2}\,dx$.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists! H_n \in \mathbb{R}[X],\ \varphi_0^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x)\varphi_0(x)$.

b. Déterminer le degré et le coefficient dominant de H_n.

c. Montrer que $(P, Q) \mapsto (P|Q)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

d. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall P \in \mathbb{R}[X],\ (P|H_n) = (P'|H_{n-1})$.

e. En déduire que la famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.

f. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $||H_n||^2$.

g. Convergence et somme, pour $(r, x) \in \mathbb{R}^2$ de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{r^n}{n!} H_n(x)$.

92 *Mines PSI 2025* Benjamin Lucante II (note 15)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B deux polynômes à coefficients réels tel que $\deg(B) = n + 1$, on définit sur $\mathbb{R}_n[X]$ l'application Φ qui à $P \in \mathbb{R}_n[X]$ associe le reste de la division euclidienne de AP par B.

a. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. On suppose que B est un polynôme scindé à racines simples. Trouver un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ qui rend l'endomorphisme Φ autoadjoint. Que peut-on en déduire ?

c. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $B = (X - a)^{n+1}$. Que dire de la diagonalisabilité de Φ ?

93 *Mines PSI 2025* Paul Lanardoune I (note 8,5)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $(P, Q) \mapsto < P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

Soit $d \in \mathbb{N}$, A et B deux polynômes de E tels que $deg(A) = deg(B) = d$ et $||A|| = ||B|| = 1$.

On définit alors $\varphi : E \to E$ par $\varphi(P) = P- < A, P > B$.

a. Soit un entier $N \geqslant d$, montrer que $\mathbb{R}_N[X]$ est stable par φ.

On note alors φ_N la restriction de $\mathbb{R}_N[X]$ dans $\mathbb{R}_N[X]$ de φ.

b. Trouver à quelle condition nécessaire et suffisante φ est bijective. Calculer φ^{-1} dans ce cas.

c. Trouver à quelle condition nécessaire et suffisante φ_d est diagonalisable.

d. En supposant φ_d diagonalisable, pour $P \in \mathbb{R}_d[X]$, quelle est la nature de la suite $\left(\varphi^k(P)\right)_{k\in\mathbb{N}}$?

94 *Mines PSI 2025* Bilal Mrani I (note 17,5)

Soit E un espace euclidien de dimension n, $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E.

On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme antisymétrique si $\forall x \in E,\ \big(u(x)|x\big) = 0$.

a. Donner un exemple non trivial d'endomorphisme antisymétrique dans $\mathbb{R}^2$, dans $\mathbb{R}^3$.

b. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, montrer que u antisymétrique $\Longleftrightarrow$ Mat$_{\mathcal{B}}(u)$ antisymétrique.

c. Donner une condition suffisante sur l'entier n pour que tous les endomorphismes antisymétriques de E ne soient pas bijectifs.

d. Est-ce que cette condition suffisante est aussi nécessaire ?

e. Que dire d'un endomorphisme antisymétrique diagonalisable ?

f. Le carré d'un endomorphisme antisymétrique est-il diagonalisable ?

g. Si $E = \mathbb{R}^3$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ antisymétrique, montrer que $\exists! w \in E,\ \forall x \in E,\ u(x) = w \wedge x$.

Identifier $-u^2$ dans le cas où le vecteur w est unitaire.

h. Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$ est antisymétrique, rang$\,(u)$ est pair.

95 *Mines PSI 2025* Amaury Viaud II (note 13)

Soit E un espace euclidien de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Pour une base orthonormée $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ de E, on pose $a = \sum_{k=1}^{n} ||u(v_k)||^2$.

a. Montrer que a ne dépend pas de la base orthonormée choisie dans E.

b. Calculer a si u est autoadjoint.

c. Calculer a si u est une isométrie.

96 *CCINP PSI 2025* Lucie Frémaux II (note 19,11)

a. Montrer que tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair admet au moins une racine réelle.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \in SO_{2n+1}(\mathbb{R})$. Montrer que 1 est valeur propre de A.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \in O_n(\mathbb{R}) \setminus SO_n(\mathbb{R})$. Montrer que -1 est valeur propre de A.

97 *CCINP PSI 2025* Timéo Nivelle II (note 20)

a. La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle symétrique définie positive ?

b. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice $A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 2 \\ 2 & \alpha & 2 \\ 2 & 2 & \alpha \end{pmatrix}$ est-elle définie positive ?

98 *CCINP PSI 2025* Adrien Richard II (note 19,1)

Soit un espace préhilbertien E, un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une famille de vecteurs unitaires $(e_1, \cdots, e_n)$ tels que l'on ait $\forall x \in E,\ ||x||^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} (x|e_k)^2$.

a. Montrer que $(e_1, \cdots, e_n)$ est une famille orthogonale.

b. Montrer que E est de dimension finie n.

99 *Mines-Télécom PSI 2025* Rose Boudjenah II (note 15)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et, pour $(P, Q) \in E^2$, on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

a. Montrer que $(P, Q) \mapsto (P|Q)$ est bien défini et que c'est un produit scalaire sur E.

b. Montrer qu'il existe une unique suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

c. Déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n.

d. Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale et calculer $||T_n||$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

100 *Mines-Télécom PSI 2025* Maxime Felgate I (note 13)

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & x \end{pmatrix}$.

a. Montrer que A est diagonalisable.

b. Montrer que pour toutes les valeurs propres λ de A, le sous-espace propre associé est une droite et trouver un vecteur propre de A associé à λ en fonction de λ.

c. Trouver les valeurs de x pour lesquelles A n'est pas inversible et donner alors ses éléments propres.

101 *Mines-Télécom PSI 2025* Anthony Peillex I (note 13)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}\,(M) = 0\}$.

a. Quelle est la dimension de H ?

b. Déterminer $H^\perp$.

c. Calculer la distance de I_n à H.

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $C = AB = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

d. Donner une majoration de $c_{i,j}^2$ et en déduire que $||AB|| \leqslant ||A||\,||B||$.

102 *Mines-Télécom PSI 2025* Louise Poully-Tarin I (note 20)

Soit E un espace euclidien et $f \in O(E)$.

a. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}_E)^\perp$.

b. On suppose que $(f - \mathrm{id}_E)^2 = 0$, montrer que $f = \mathrm{id}_E$.

103 *Saint-Cyr PSI 2025* Timéo Nivelle I (note 18)

Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base quelconque d'un espace euclidien E et $f : E \to E$ définie par $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (e_k|x)e_k$.

a. Montrer que f est autoadjoint à valeurs propres strictement positives.

b. Montrer qu'il existe $g \in S^{++}(E)$ tel que $g^2 = f^{-1}$.

c. Montrer que $\big(g(e_1), \cdots, g(e_n)\big)$ est une base orthonormale de E.

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 8 PROBABILITÉ ET VARIABLES ALÉATOIRES

104 *ENS Cachan PSI 2025* Thédore Bélicard et Maxime Plottu (note 7,5 et 10)

Pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$, on dit qu'une variable aléatoire réelle Y est k-divisible s'il existe des variables aléatoires réelles $X_1, \cdots, X_k$ indépendantes et suivant toutes la même loi telles que Y et $\sum_{i=1}^{k} X_i$ suivent la même loi.
On dit que Y est infiniment divisible si elle est k-divisible pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$.

a. Soit Y et Y' deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois de Poisson de paramètres $\lambda > 0$ et $\lambda' > 0$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y + Y'$.

b. En déduire que si Y suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, alors Y est infiniment divisible.

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et Y une variable aléatoire n-divisible (avec $Y = X_1 + \cdots + X_n$) telle qu'il existe un réel $A > 0$ tel que $\mathbb{P}(Y \in [-A; A]) = 1$.

c. Montrer que $\forall i \in [\![1; n]\!],\ \mathbb{P}\Big(X_i \in \Big[-\dfrac{A}{n}; \dfrac{A}{n}\Big]\Big) = 1$.

d. En déduire que $\forall i \in [\![1; n]\!],\ \mathbb{V}(X_i) \leqslant \dfrac{A^2}{n^2}$, puis une majoration de $\mathbb{V}(Y)$.

e. Qu'en déduire si on a une variable aléatoire Y infiniment divisible et à support borné ?

f. Soit Y qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$. Montrer que Y n'est pas k-divisible si $k \geqslant 2$.

g. Soit $p \in]0; 1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et une variable aléatoire Y qui suit la loi binomiale de paramètre n et p.

Pour quelles valeurs de $k \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire Y est-elle k-divisible ?

105 *ENS Cachan PSI 2025* Lorenzo Contarino (note 7,5)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est simple si $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \dim(E_\lambda(A)) = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ symétrique qu'on écrit $M = \begin{pmatrix} A & b \\ b^T & c \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$.

a. On suppose que M n'est pas simple, montrer qu'il existe un vecteur propre v de M tel que $v_{n+1} = 0$. En notant λ la valeur propre de M associée à v, montrer que λ est aussi valeur propre de A.

b. En déduire que si M n'est pas simple, il existe un vecteur propre de A orthogonal à b.

On pose $N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & X_1 \\ 0 & 1 & X_5 & X_2 \\ 0 & X_5 & -1 & X_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \end{pmatrix}$ où X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sont des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$.

c. On pose $B =$ "N est simple". Montrer que $\mathbb{P}(B) \geqslant 3p^3 - 2p^4$.

106 *ENS Cachan PSI 2025* Paul Lanardoune (note 7,5)

Pour tout l'exercice, les variables aléatoires réelles (V.A.R.) sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

a. Soit X une V.A.R. telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et G_X sa fonction génératrice associée. Montrer que $R \geqslant 1$.

b. Montrer que si $\mathbb{E}(X) < 1$, l'équation $G_X(x) = x$ n'admet pas de solution sur $[0;1[$.

c. Montrer que si $\mathbb{E}(X) > 1$, l'équation $G_X(x) = x$ admet une unique solution sur $[0;1[$.

d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X_1, \cdots, X_n$ des V.A.R. indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p_n = \dfrac{\lambda}{n} \in]0;1[$. On pose $Y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Calculer G_{Y_2}, puis G_{Y_n}. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} G_{Y_n}(x)$. Qu'en déduire ?

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de V.A.R. à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et suivant toutes la même loi et Y une V.A.R. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ indépendante des X_i. On pose $Z = \sum\limits_{i=1}^{Y} X_i$.

e. Déterminer G_Z en fonction de Y et X_1.

f. En déduire que $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(Y)\,\mathbb{E}(X_1)$.

g. Lors d'une ponte, un magicarpe pond un nombre aléatoire d'œufs suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Ensuite, chaque œuf a une probabilité $\alpha \in]0;1[$ d'éclore. Quelle est la loi du nombre d'œufs éclos ?

107 *ENS Cachan PSI 2025* Syuma Louette et Maël Orduna (note 5 et 16,25)

a. Dans une urne avec a boules noires et b boules rouges, on tire successivement sans remise toutes les boules de cette urne. Combien y a-t-il de combinaisons possibles ?

On considère maintenant une urne avec $2N$ boules dont $n \geqslant 2$ boules rouges et $2N - n \geqslant 2$ boules noires. On tire successivement et sans remise deux boules à la fois dans cette urne. On note X le nombre de fois où l'on tire deux boules rouges.

b. Si $n > N$, déterminer $\mathbb{P}(X \geqslant 1)$.

c. Majorer X.

On suppose pour la suite que n est pair et on définit les deux évènements $A =$ "on tire deux boules rouges sur les $n/2$ premiers tirages" et $B =$ "on tire deux boules rouges sur les $(n/2) - 1$ premiers tirages puis les deux tirages suivants tirer une boule noire et une boule rouge".

d. Est-ce que A et B sont équiprobables ?

e. Si $k \in \mathbb{N}$ est tel que $k < N$, calculer $\mathbb{P}(X = k)$.

f. Soit $\lambda \in]0;1[$ et $n = \lfloor \lambda N \rfloor$, montrer que $\mathbb{E}(X) \underset{N \to +\infty}{\sim} \dfrac{\lambda^2 N}{4}$.

g. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

108 *ENS ULM/Cachan PSI 2025* Clément Rebola (note 10)

Soit pour les deux prochaines questions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ convexe et $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

a. Montrer qu'il existe une fonction $g : t \mapsto at + b$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ g(t) \leqslant f(t)$ et $g(t_0) = f(t_0)$.

b. Soit Z une variable aléatoire positive, on suppose que $\mathbb{E}(f(Z))$ est finie. Montrer que Z est d'espérance finie et que l'on a la majoration $f(\mathbb{E}(Z)) \leqslant \mathbb{E}(f(Z))$.

Soit X une variable aléatoire positive. On pose $\Psi_X(t) = \ln\left(\mathbb{E}(e^{tX})\right)$.

c. Calculer $\Psi_X(t)$ si $t \in \mathbb{R}$ et X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\Phi_X(\theta) = \underset{t \in \mathbb{R}_+}{\mathrm{Sup}}\,(t\theta - \Phi_X(t))$.

d. Montrer que Φ_X est convexe et positive.

e. Montrer que $\Phi_X(\mathbb{E}(X)) = 0$.

f. Montrer que Φ_X est croissante sur $]-\infty; \mathbb{E}(X)]$ et décroissante sur $[\mathbb{E}(X); +\infty[$.

g. Calculer $\Phi_X(\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$ si X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

109 *Centrale Maths1 PSI 2025* Théodore Bélicard (note 14)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements mutuellement indépendants.

a. Rappeler la propriété de continuité monotone.

b. En déduire que $\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\Big)$ puis que $\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = 1 - \lim_{N\to+\infty} \Big(\prod_{n=0}^{N} \mathbb{P}(\overline{A_n})\Big)$.

c. Montrer que $\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = 1 \iff \sum_{n\geqslant 0} \ln(\mathbb{P}(\overline{A_n}))$ diverge.

d. Montrer que $\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = 1 \iff \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ diverge.

110 *Centrale Maths1 PSI 2025* Ana Galharret (note 11)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires sur le même espace probabilisé telles que les X_i^2 admettent une espérance finie, et $R_X = \begin{pmatrix} \mathbb{V}(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1,X_2) & \cdots & \cdots & \mathrm{Cov}(X_1,X_n) \\ \mathrm{Cov}(X_2,X_1) & \mathbb{V}(X_2) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \mathrm{Cov}(X_{n-1},X_n) \\ \mathrm{Cov}(X_n,X_1) & \cdots & \cdots & \mathrm{Cov}(X_n,X_{n-1}) & \mathbb{V}(X_n) \end{pmatrix}$.

a. Donner la définition d'une matrice symétrique positive et en donner une caractérisation par son spectre.

b. Montrer que R_X est bien définie 7et que $R_X \in S_n^+(\mathbb{R})$.

c. À l'aide de la question précédente, montrer que $|\mathrm{Cov}(X_1, X_2)| \leqslant \sqrt{\mathbb{V}(X_1)}\sqrt{\mathbb{V}(X_2)}$.

111 *Centrale Maths1 PSI 2025* Antoine Meron (note 14)

On considère une urne contenant $N \in \mathbb{N}^*$ boules rouges. On tire successivement des boules dans cette urne selon le protocole suivant :

- si on tire une boule rouge, on la retire et on la remplace par une boule verte.
- si on tire une boule verte, on la remet dans l'urne.

On définit les variables aléatoires (avec $n \in \mathbb{N}$) :

- X_n le nombre de boules rouges à l'issue du n-ième tirage, donc par construction $X_0 = N$.
- Y le nombre de tirages nécessaires pour enlever toutes les boules rouges, avec la convention $Y = 0$ si ce tirage n'arrive jamais.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \dfrac{N-k}{N}\mathbb{P}(X_n = k) + \dfrac{k+1}{N}\mathbb{P}(X_n = k+1)$.

b. Trouver une relation entre $\mathbb{E}(X_{n+1})$ et $\mathbb{E}(X_n)$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de n et N.

c. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n \geqslant 1)$ et $\lim_{N\to+\infty} \dfrac{\mathbb{E}(X_N)}{N}$.

d. Montrer que $(Y = 0) \subset \bigcap_{k=1}^{n} (X_k \geqslant 1)$, puis en déduire la valeur de $\mathbb{P}(Y = 0)$.

112 *Mines PSI 2025* Amjad Belmiloud I (note 13)

On considère une loterie avec un gain G à partager équitablement entre les gagnants sachant que chacun des $n+1$ participants a une probabilité $p \in]0;1[$ de gagner.

a. Calculer l'espérance de la somme des gains de tous les joueurs.

b. Calculer l'espérance du gain d'un joueur particulier.

113 *Mines PSI 2025* Paolo Bois-Rolet I (note 13)

Soit une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes suivant la loi de BERNOULLI de paramètre $\frac{1}{2}$.

On définit alors la variable aléatoire Y telle que :

- $Y = 0$ s'il n'existe aucun indice $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X_n = X_{n+1} = 1$.
- $Y = \mathrm{Min}\{n \in \mathbb{N}^* \mid X_n = X_{n+1} = 1\}$ sinon.

Soit aussi l'évènement C_n tel que $C_n =$ “ la liste $(X_1, \cdots, X_n)$ ne contient pas deux 1 d'affilée”.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Y = n+2) = \dfrac{\mathbb{P}(C_n)}{8}$.

b. Montrer que $\forall n \geqslant 3,\ \mathbb{P}(C_n) = \dfrac{\mathbb{P}(C_{n-1})}{2} + \dfrac{\mathbb{P}(C_{n-2})}{4}$.

c. Déterminer expliciter $\mathbb{P}(Y = n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(Y = 0)$.

d. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

114 *Mines PSI 2025* Adrien Courmont I (note 15)

Soit un entier $n \geqslant 2$, une urne avec $n+1$ boules blanches ou noires. Le nombre de boules blanches initialement dans l'urne est noté X_0, c'est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$. On tire indéfiniment dans l'urne selon le protocole suivant dit de “ tirage-remise” : on tire deux boules simultanément.

- Si les deux boules sont de même couleur, on les remplace par une boule noire et une boule blanche.
- Si elles sont de couleurs différentes, on les remet dans l'urne.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k le nombre de boules blanches après la k-ième opération de “tirage-remise”.

a. Par un argument de symétrie, montrer que $\mathbb{E}(X_k)$ ne dépend pas de k.

On note, pour $k \in \mathbb{N}$, le vecteur colonne $U_k \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donné par $U_k^T = (\,\mathbb{P}(X_k = 1)\ \cdots\ \mathbb{P}(X_k = n))$.

b. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall k \in \mathbb{N},\ U_{k+1} = AU_k$.

c. Montrer que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

115 *Mines PSI 2025* Syuma Louette II (note 11)

Soit $A \in \mathcal{M}_3([\![1;9]\!])$ de sorte que tous les entiers entre 1 et 9 sont dans la matrice A.

Déterminer la probabilité que $\det(A)$ soit impair.

116 *Mines PSI 2025* Jules Mérillou II (note 14,5)

Soit A et B deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi de POISSON de paramètre $\lambda > 0$ et l'équation différentielle $(E_\omega)\ :\ y'' + (A(\omega) - 1)y' + B(\omega)y = 0$.

Calculer la probabilité pour que les toutes les solutions de (E_ω) tendent vers 0 en $+\infty$.

117 *Mines PSI 2025* Antoine Meron II (note 11)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une urne avec n boules numérotées de 1 à n. On tire sans remise les boules dans l'urne tant que les numéros sont tirés dans l'ordre croissant. On note X la longueur de la suite croissante.

a. Déterminer la loi de X.

b. Calculer la valeur de $\mathbb{E}(X)$ et en déduire la limite de $\mathbb{E}(X)$ quand n tend vers $+\infty$.

118 *Mines PSI 2025* Timéo Nivelle II (note 15)

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi de BERNOULLI de paramètre $\frac{1}{2}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et on définit T_n par :

- $T_n = \mathrm{Min}\{k \in \mathbb{N}^* \mid S_k = n\}$ si ce minimum existe.
- $T_n = +\infty$ sinon.

a. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, développer $\dfrac{1}{(1-x)^p}$ en série entière.

b. Quelle est la loi de T_n ?

c. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, développer $\dfrac{1}{(2-x)^p}$ en série entière.

119 *Mines PSI 2025* Maël Orduna I (note 17)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n l'ensemble des permutations (bijections de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;n]\!]$) de $[\![1;n]\!]$.

Pour $A \subset [\![1;n]\!]$ de cardinal k, on définit $\chi_A : S_n \to \{0,1\}$ par $\chi_A(\sigma) = 1$ si $\sigma([\![1;k]\!]) \subset A$ et $\chi_A(\sigma) = 0$ sinon.

a. Donner la loi de χ_A.

b. Soit B une partie de $[\![1;n]\!]$ telle que $B \not\subset A$ et $A \not\subset B$. Calculer $\mathbb{P}(\chi_A = 1, \chi_B = 1)$.

Les variables aléatoires χ_A et χ_B sont-elles indépendantes ?

Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}([\![1;n]\!])$ tel que $\forall (A,B) \in \mathcal{A}^2,\ A \neq B \Longrightarrow \big(B \not\subset A \text{ et } A \not\subset B\big)$.

c. On pose $Y = \sum_{A\in\mathcal{A}} \chi_A$. Que peut-on dire de la variable aléatoire Y ?

d. En déduire que $\operatorname{card}(\mathcal{A}) \leqslant \dbinom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

120 *Mines PSI 2025* Maxime Plottu I (note 13,5)

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$ et $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$. On note U (resp. V) la plus grande (resp. la plus petite) valeur propre de M.

a. Quelle est la probabilité que M soit inversible ?

b. Calculer $\mathrm{Cov}(U,V)$.

c. Est-ce que U et V sont indépendantes ?

d. Calculer $\mathbb{E}(Z)$ où $Z = \mathrm{Max}(X,Y)$.

121 *Mines PSI 2025* Adrien Richard II (note 5)

a. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, montrer que ($A$ nilpotente) $\Longleftrightarrow$ ($\det(A) = \mathrm{Tr}\,(A) = 0$).

Soit X_1, X_2, X_3, X_4 quatre variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de POISSON de paramètre $\lambda > 0$. On pose $A = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$.

b. Quelle est la probabilité p que A soit nulle ?

c. Quelle est la probabilité q que A soit nilpotente ?

d. Donner un développement limité de q quand λ tend vers 0.

122 *CCINP PSI 2025* Florian Allard I (note 20)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda \in]0;1[$ tels que $(1+\alpha)\lambda < 1$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit p_n la probabilité pour une famille d'avoir exactement n enfants et on suppose que $p_n = \alpha\lambda^n$.

On note p la probabilité d'avoir un garçon et $q = 1-p$ celle d'avoir une fille.

a. Trouver la probabilité p_0 pour une famille de n'avoir aucun enfant.

b. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-1;1[,\ \dfrac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \dbinom{n}{k} x^{n-k}$.

c. Pour $k \in \mathbb{N}$, quelle est la probabilité pour une famille d'avoir exactement k garçons ?

d. Quelle est la probabilité pour une famille ayant au moins un enfant d'en avoir au moins deux ?

123 *CCINP PSI 2025* Timéo Nivelle I (note 20)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une urne contenant des boules numérotées de 1 à n et une échelle graduée de 0 à n sur laquelle se déplace un jeton initialement en position $X_0 = 0$.

On effectue des tirages indépendants avec remise dans l'urne. Avant d'effectuer le p-ième tirage pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note X_{p-1} la position du jeton sur l'échelle. Au p-ième tirage, on note N_p le numéro de la boule tirée et :

- Si $N_p \leqslant X_{p-1}$, le jeton va en $X_{p-1} - 1$ de sorte que $X_p = X_{p-1} - 1$.
- Si $N_p > X_{p-1}$, le jeton va en $X_{p-1} + 1$ de sorte que $X_p = X_{p-1} + 1$.

a. Pour $p \in \mathbb{N}$, déterminer $X_p(\Omega)$.

b. Pour $p \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbb{P}(X_{p+1} = 0)$ (resp. $\mathbb{P}(X_{p+1} = n)$) en fonction de $\mathbb{P}(X_p = 1)$ (resp. $\mathbb{P}(X_p = n-1)$).

c. Pour $k \in [\![1; n-1]\!]$ et $p \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbb{P}(X_{p+1} = k)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_p = k-1)$ et $\mathbb{P}(X_p = k+1)$.

On note G_p la fonction caractéristique de la variable aléatoire X_p.

d. Pourquoi G_p est-elle définie sur $[-1;1]$? La fonction G_p est-elle polynomiale ?

e. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ G_{p+1}(t) = tG_p(t) + \dfrac{1-t^2}{n} G_p'(t)$.

f. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(X_{p+1}) = 1 + \left(1 - \dfrac{2}{n}\right) \mathbb{E}(X_p)$.

g. En déduire $\mathbb{E}(X_p)$ en fonction de p puis déterminer $\lim\limits_{p \to +\infty} \mathbb{E}(X_p)$. Commenter.

124 *CCINP PSI 2025* Louise Poully-Tarin I (note 15,27)

On considère une urne à $n \geqslant 2$ boules. On réalise des tirages avec remise.

On note X_n le premier rang tel qu'une autre boule que la première soit tirée.

a. Montrer que X_n est une variable aléatoire discrète et déterminer la loi de X_n.

b. Montrer que X_n admet une espérance finie et la calculer. Trouver $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n)$. Interpréter.

Soit Y_n le premier rang tel que toutes les boules de l'urne aient été tirées au moins une fois.

c. Déterminer la loi de Y_2.

d. Soit $j \in Y_3(\Omega)$, calculer $\mathbb{P}(Y_3 = j | X_3 = i)$ pour $i \geqslant 2$.

e. En déduire la loi de Y_3.

125 <u>*CCINP PSI 2025*</u> Adrien Richard I (note 19,1)

On lance indéfiniment une pièce équilibrée (pile ou face) et on note Y le numéro du premier lancer donnant pile et X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir la séquence pile-face.

a. Déterminer la loi de Y. Donner $E(Y)$.

b. Déterminer la loi conjointe de (X, Y).

c. En déduire la loi de X.

d. Calculer, pour $x \in]-1;1[$, la valeur de $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2}$.

e. Calculer $\mathbb{E}(X)$. Puis $\mathbb{V}(X)$.

126 <u>*Mines-Télécom PSI 2025*</u> Gaspard Girard II (note 14)

Soit une variable aléatoire réelle X, on dit que X est presque sûrement bornée si $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \mathbb{P}(|X| > M) = 0$.

a. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles presque sûrement bornées, montre que $X + Y$ l'est aussi.

b. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, caractériser sur sa fonction génératrice G_X le fait que X est presque sûrement bornée.

c. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $X+Y$ est presque sûrement bornée et $X + Y \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$. Montrer que X et Y suivent aussi des lois binomiales.

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 9 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET CALCUL DIFFÉRENTIEL

127 *Centrale Maths1 PSI 2025* Paolo Bois-Rolet et Louise Poully-Tarin (note 13 et 10)

Soit $f : (x, y) \mapsto \text{ch}\,(y)\sin(x) - \sin(y)\text{ch}\,(x)$ et $\Delta = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}_+^*\}$.

a. Montrer que f est de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

b. Montrer que les points critiques de f sur Δ sont des (x_n, x_n) où $x_n \in \left]n\pi + \frac{\pi}{4}; n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ pour $n \in \mathbb{N}$.

c. Caractériser les extrema locaux de f qui appartiennent à Δ.

128 *Centrale Maths1 PSI 2025* Paul Lanardoune (note 13)

Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \displaystyle\int_0^x \sin(x - t)g(t)dt$.

a. Montrer que h est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ et exprimer $h''(x)$ en fonction de $h(x)$ et $g(x)$.

b. Résoudre sur $\mathbb{R}_+$ l'équation $(E)\ :\ y'' + y = g$.

c. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \leqslant a + \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \leqslant ae^x$.

d. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et Φ_λ solution sur $\mathbb{R}_+$ du problème de CAUCHY $\begin{cases} y'' + y = g \\ y'(0) = \lambda \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

Montrer que Φ_λ est lipschitzienne.

129 *Centrale Maths1 PSI 2025* Finlay Menzies (note 11)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par $f(x_1, \cdots, x_n) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right) \exp\left(-\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)$.

a. Trouver les points critiques de f. On note a_n celui dont les coordonnées sont toutes strictement positives.

b. Montrer que f admet un extremum local en a_n.

c. Que se passe-t-il en les autres points critiques ?

d. Montrer que $\lim\limits_{||x||_2 \to +\infty} f(x) = 0$.

e. Montrer que f admet en a_n un maximum global.

130 *Centrale Maths1 PSI 2025* Jules Mérillou (note 14)

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x, y) = \displaystyle\int_{-1}^{1} |t-x|\,|t-y|dt$, $C = [-1; 1]^2$ et $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}$.

a. Montrer que φ est continue sur C.

b. En déduire que $\mu = \operatorname{Min}\limits_{(x,y)\in C} (\varphi(x, y))$ existe.

c. Montrer que $\forall (x, y) \in T,\ \varphi(x, y) = \dfrac{(y - x)^3}{3} + 2xy + \dfrac{2}{3}$.

d. Montrer que φ admet sur T un minimum en un point intérieur à T.

e. Déterminer la valeur de μ.

f. En déduire les extrema de φ sur $\mathbb{R}^2$.

131 *Mines PSI 2025* Lucas Balanger II (note 11,5)

On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ x^2y' + y = x^2$.

a. Montrer qu'il n'existe aucune solution de (E) qui soit développable en série entière au voisinage de 0.

b. Montrer qu'il existe une unique solution y_0 de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ qui admette une limite finie en 0.

c. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

132 *Mines PSI 2025* Paolo Bois-Rolet II (note 13)

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \big(1+2\cos^2(\pi x)\big)(1-e^{-y^2})+\sin(\pi x)$ et la surface représentative de f associée définie par $S = \big\{(x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\big\}$.

a. Y a-t-il des points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, les caractériser.

b. Déterminer le plan tangent à S en le point $(1,1,f(1,1))$.

133 *Mines PSI 2025* Finlay Menzies II (note 7,5)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2\ln(x^4+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b. Est-ce que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Indication : considérer $y = x^2$.

c. Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$ et le déterminer.

134 *Mines PSI 2025* Étienne Offant II (note 9)

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on considère l'équation différentielle $(E)\ :\ y'' - 4y = a|t| + b$. Montrer qu'il existe une unique solution y de (E) sur $\mathbb{R}$ qui soit de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qui admette des asymptotes en $\pm\infty$.

135 *CCINP PSI 2025* Finlay Menzies I (note 9,23)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

a. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

b. Calculer les dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$.

c. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

d. Calculer les dérivées partielles seconde de f en $(0,0)$. Qu'en déduire sur la fonction f ?

136 *Mines-Télécom PSI 2025* Anthony Peillex II (note 13)

a. Montrer que $g : x \mapsto xe^{1/x} + e^x$ est une bijection de $]-\infty;0[$ dans $]-\infty;1[$. Résoudre $g(x) = 0$.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xe^y + ye^x$.

b. Quels sont les points critiques de f ?

c. f admet-elle un extremum local ? Un extremum absolu ?