♠ ♡

PRÉPARATION ORAUX

PSI 1

MILLÉSIME

2025 / 2026

♢ ♣

EXERCICES PAR THÈME

EXERCICES PAR CONCOURS

- 1 : X .... (2 exercices)

    numéros 47-48

- 2 : ENS Cachan / Rennes .... (9 exercices)

    numéros 12, 49-51, 104-108

- 3 : Centrale Maths 1 .... (27 exercices)

    numéros 1-3, 23-28, 52-53, 59-61, 77-78, 86-89, 109-111, 127-130

- 4 : Mines .... (60 exercices)

    numéros 4-9, 13-19, 29-38, 54-58, 62-71, 79-80, 90-95, 112-121, 131-134

- 5 : CCINP .... (20 exercices)

    numéros 10, 20-21, 39-42, 72-74, 81-82, 96-98, 122-125, 135

- 6 : Mines-Télécom .... (14 exercices)

    numéros 22, 43-46, 75, 83-84, 99-102, 126, 136

- 7 : Navale et Saint-Cyr .... (4 exercices)

    numéros 11, 76, 85, 103

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 1
INTÉGRALE ET ANALYSE

1 **a.** Pour $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_{n,t} : x \mapsto x^n e^{\frac{-tx^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et elle est paire si n est pair et impaire si n est impair. Par conséquent, $g_{n,t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle l'est sur $\mathbb{R}_+$. Comme $g_{n,t}(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées car $t > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{n+2}e^{\frac{-tx^2}{2}} = 0$, la fonction $g_{n,t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $m_n(t)$ existe. Ainsi, la suite $(m_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

b. Comme la fonction $g_{2n+1,t}$ est impaire, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ m_{2n+1}(t) = 0$. Posons, pour la suite de l'exercice, $p_n(t) = \int_0^{+\infty} x^n e^{\frac{-tx^2}{2}}dx$ qui existe d'après **a.**. Comme on connaît l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, en effectuant le changement de variable $x = \frac{\sqrt{2}u}{\sqrt{t}} = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et de classe C^1, il vient $p_0(t) = \int_0^{+\infty} e^{\frac{-tx^2}{2}}dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\frac{\pi}{2t}}$. De plus, on a directement $p_1(t) = \int_0^{+\infty} xe^{\frac{-tx^2}{2}}dx = \left[-\frac{1}{t}e^{\frac{-tx^2}{2}}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{t}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$, on pose $u_n : x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$ et $v : x \mapsto e^{\frac{-tx^2}{2}}$ dans $p_n(t) = \int_0^{+\infty} x^n e^{\frac{-tx^2}{2}}dx$ avec u_n et v qui sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et telles que $u_n(0)v(0) = \lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x)v(x) = 0$ par croissances comparées. Ainsi, par intégration par parties, $p_n(t) = 0 - \int_0^{+\infty} v'(t)u_n(t)dt = \frac{t}{n+1}\int_0^{+\infty} x^{n+2}e^{\frac{-tx^2}{2}}dx = \frac{t}{n+1}p_{n+2}(t)$.

Pour l'expression de $p_n(t)$ en fonction de n, traitons deux cas :

- Si $n = 2k$ est pair avec $k \in \mathbb{N}$, $p_n(t) = p_{2k}(t) = \frac{2k-1}{t}p_{2k-2}(t)$ puis, par une récurrence classique, il vient $p_{2k}(t) = \left(\prod\limits_{i=1}^{k}\frac{2i-1}{t}\right)p_0(t) = \frac{(2k)!}{2^k k! t^k}\sqrt{\frac{\pi}{2t}}$ donc $\frac{p_{2k}(t)}{(2k)!} \sim \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{2t}\right)^k\sqrt{\frac{\pi}{2t}}$.
- Si $n = 2k+1$ est impair avec $k \in \mathbb{N}$, $p_n(t) = p_{2k+1}(t) = \frac{2k}{t}p_{2k-1}(t)$ puis, par récurrence, on a $p_{2k+1}(t) = \left(\prod\limits_{i=1}^{k}\frac{2i}{t}\right)p_1(t) = \frac{2^k k!}{t^{k+1}}$ donc $\frac{p_{2k+1}(t)}{(2k+1)!} = \frac{2^k k!}{(2k)!t^{k+1}(2k+1)}$ et, avec Stirling, $\frac{p_{2k+1}(t)}{(2k+1)!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2^k\sqrt{2\pi k}\,k^k e^{2k}}{\sqrt{4\pi k}(2k)^{2k}e^k t^{k+1}(2k)}$ donc $\frac{p_{2k+1}(t)}{(2k+1)!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{e^k}{2^k k^{k+1}t^{k+1}} \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{2t}\times\sqrt{\frac{\pi}{k}}\right)\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{2t}\right)^k$.

c. La fonction $g_t : x \mapsto e^{\frac{-tx^2}{2}}e^x$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et, comme on sait que $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$, on a $g_t(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}e^{\frac{-tx^2}{2}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}h_n(x)$ en posant $h_n : x \mapsto \frac{x^n}{n!}e^{\frac{-tx^2}{2}}$:

(H_1) La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} h_n$ converge simplement vers g_t sur $\mathbb{R}$ d'après ce qui précède.

(H_2) Les fonctions h_n, qui sont paires ou impaires en fonction de la parité de n, sont continues et intégrable sur $\mathbb{R}$ cat $h_n(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées.

(H_3) La fonction g_t est continue sur $\mathbb{R}$.

(H_4) La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\int_{-\infty}^{+\infty}|h_n(x)|dx$ converge car $\int_{-\infty}^{+\infty}|h_n(x)|dx = \frac{2p_n(t)}{n!}$ par parité de $|h_n|$ et que, d'après la question précédente, $\frac{2p_{2k}(t)}{(2k)!} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{2t}\right)^k\right)$ et $\frac{2p_{2k+1}(t)}{(2k+1)!} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{2t}\right)^k\right)$, alors que la série exponentielle $\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{2t}\right)^k$ converge (sa somme vaut $e^{1/(2t)}$). On pouvait aussi utiliser la règle de D'ALEMBERT car si $a_n = \frac{2p_n(t)}{n!}$, on a $\frac{a_{2k+2}}{a_{2k}} = \frac{p_{2k+2}(t)}{(2k+2)(2k+1)p_{2k}(t)} = \frac{1}{(2k+2)t}$ donc $\lim_{k\to+\infty}\frac{a_{2k+2}}{a_{2k}} = 0 < 1$ donc $\sum_{k\geqslant 0} a_{2k}$ converge. De plus, $\frac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}} = \frac{p_{2k+1}(t)}{(2k+1)(2k)p_{2k-1}(t)} = \frac{1}{(2k+1)t}$ donc $\lim_{k\to+\infty}\frac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}} = 0 < 1$ donc $\sum_{k\geqslant 0} a_{2k+1}$ converge.

Par le théorème d'intégration terme à terme, g_t est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-tx^2}{2}}e^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)dt$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-tx^2}{2}}e^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{m_{2n}(t)}{(2n)!} = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{p_{2n}(t)}{(2n)!}$ car $m_{2n+1}(t) = 0$, ce qui donne, avec la question précédente, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-tx^2}{2}}e^x dx = 2\sqrt{\frac{\pi}{2t}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2t}\right)^n = e^{\frac{1}{2t}}\sqrt{\frac{2\pi}{t}}$.

d. La fonction g_t est continue sur $\mathbb{R}$, $g_t(x) \underset{x\to-\infty}{=} o(e^x)$ alors que $x \mapsto e^x$ est intégrable en $-\infty$ donc, par comparaison, g_t est intégrable en $-\infty$. De plus, comme $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{-tx^2}{2}}e^{2x} = 0$ car $\lim_{x\to+\infty}\left(2x - \frac{tx^2}{2}\right) = -\infty$, on a $g_t(x) \underset{+\infty}{=} o(e^{-x})$ alors que $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable en $+\infty$ donc, encore par comparaison, g_t est intégrable en $+\infty$. Par conséquent, g_t est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On écrit $g_t(x) = e^{\frac{-tx^2}{2}}e^x = e^{x+\frac{-tx^2}{2}}$ et $x - \frac{tx^2}{2} = -\frac{t}{2}\left(x-\frac{1}{t}\right)^2 + \frac{1}{2}t$ donc, par linéarité de l'intégrale, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-tx^2}{2}}e^x dx = e^{\frac{1}{2t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-t}{2}(x-\frac{1}{t})^2}dx$. Avec le changement de variable $x = u + \frac{1}{t} = \psi(u)$ avec ψ qui est une bijection strictement croissante et de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a l'expression déjà trouvée à la question précédente, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-tx^2}{2}}e^x dx = e^{\frac{1}{2t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-tu^2}{2}}du = e^{\frac{1}{2t}}m_0(t) = e^{\frac{1}{2t}}\sqrt{\frac{2\pi}{t}}$.

2 **a.** Comme $f'' > 0$ sur $[0;1]$, f' est strictement croissante sur l'intervalle $[0;1]$ donc, comme $f'(0) > 0$, f' est strictement positive sur $[0;1]$. Ainsi, f est strictement croissante sur $[0;1]$ donc, comme elle y est continue, elle réalise une bijection strictement croissante de $[0;1]$ dans $[f(0);f(1)]$. Comme $0 \in]f(0);f(1)[$, par cette bijection, il existe un unique $z \in]0;1[$ tel que $f(z) = 0$.

b. Puisque f est strictement croissante sur $[0;1]$, que $a \in]z;1] \subset [0;1]$ et que $f(z) = 0$, on a $f(a) > f(z) = 0$. La tangente T_a à Γ_f au point $M_a = (a, f(a))$ est d'équation cartésienne $T_a\ :\ y = f(a) + f'(a)(x-a) = t_a(x)$. Pour $M = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $M \in T_a \cap (Ox) \iff (y = 0 \text{ et } y = f(a) + f'(a)(x-a)) \iff \left(x = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \text{ et } y = 0\right)$, d'où l'unicité du point $(x_0, 0)$. On a $x_0 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} < a$ car $f(a) > 0$ et $f'(a) > 0$. De plus, comme la fonction f est strictement convexe sur $[0;1]$, on a $f(x) > t_a(x)$ pour $x \in [0;1] \setminus \{a\}$ donc $f(x_0) > t_a(x_0) = 0$ donc $f(x_0) > 0 = f(z)$ d'où $x_0 > z$ car f est strictement croissante sur $[0;1]$. Par conséquent, $x_0 \in]z;a[$.

c. Comme x_{n+1} est à x_n ce que x_0 est à a, d'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}$, $z < x_{n+1} < x_n < a$ donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et minorée par z donc elle converge vers $\ell \in [z;x_0[$ par le théorème de la limite monotone. En passant à la limite, par continuité de f et de f', dans la relation $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, on obtient $\ell = \ell - \frac{f(\ell)}{f'(\ell)}$ car $f'(\ell) > 0$. Ainsi, $f(\ell) = 0$ donc $\ell = z$ d'après **a.**. Ainsi, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers z.

d. Comme f est de classe C^2 sur $[0;1]$ et que $(x_n, z) \in [0;1]^2$, on $|f(z) - f(x_n) - (z - x_n)f'(x_n)| \leqslant \dfrac{M_2(z - x_n)^2}{2}$ par l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE si on pose $M_2 = ||f''||_{\infty,[z;x_n]} \leqslant ||f''||_{\infty,[0;1]} = M$ qui existe car f'' est continue sur le segment $[0;1]$. Ainsi, $|f(x_n) - (x_n - z)f'(x_n)| \leqslant \dfrac{M_2(x_n - z)^2}{2}$.

Ainsi, $x_{n+1} - z = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} - z = \dfrac{(x_n - z)f'(x_n) - f(x_n)}{f'(x_n)}$ donc $0 \leqslant x_{n+1} - z \leqslant \dfrac{M_2(x_n - z)^2}{2f'(x_n)} \leqslant \dfrac{M_2(x_n - z)^2}{2m_1}$ en posant $m_1 = \underset{[0;1]}{\mathrm{Min}}(f') > 0$ car f' est continue donc est bornée sur le segment $[0;1]$ et y atteint ses bornes. En posant $M = \dfrac{M_2}{2m_1} > 0$, on a donc $0 \leqslant x_{n+1} - z \leqslant M(x_n - z)^2$.

e. Cette inégalité s'écrit aussi $0 \leqslant M(x_{n+1} - z) \leqslant (M(x_n - z))^2$ donc encore $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n^2$ en posant $u_n = M(x_n - z)$. Par une récurrence simple, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_0^{2^n}$ donc $0 \leqslant x_n - z \leqslant \dfrac{(M(x_0 - z))^{2^n}}{M}$, qu'on peut aussi présenter sous la forme $\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - z| \leqslant \dfrac{(M(x_0 - z))^{2^n}}{M}$. Comme M ne dépend que de f sur $[z;1]$ donc sur $[0;1]$, il faut d'abord commencer cet algorithme par une dichotomie pour rapprocher x_0 de z. Dès que x_0 est assez proche, de telle sorte que $0 \leqslant M(x_0 - z) \leqslant \dfrac{1}{2}$ par exemple, l'inégalité $\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - z| \leqslant \dfrac{(M(x_0 - z))^{2^n}}{M}$ traduit une convergence extrêmement rapide de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers z. Si x_n est une approximation de z à 10^{-10} près, alors x_{n+1} est une approximation de z à 10^{-20} près environ. C'est la méthode de NEWTON-RAPHSON pour la résolution numérique d'une équation $f(x) = 0$ avec des conditions particulières sur f.

3 **a.** Pour $x \geqslant 0$, la fonction $g_x : t \mapsto \dfrac{1}{1 + x^2 + t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $g_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ donc, par comparaison aux intégrales de RIEMANN, g_x est intégrable en $+\infty$ donc sur $\mathbb{R}_+$, et $F(x)$ existe. De plus, par linéarité de l'intégrale, $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2} dt = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left[\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{t}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right]_0^{+\infty} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{1+x^2}}$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$, la fonction $h_n : t \mapsto \dfrac{dt}{1 + n^\alpha \pi^\alpha \sin^2(t)}$ est continue sur le segment $[0;\pi]$ donc I_n existe. De plus, comme $\forall t \in \left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right[,\ h_n(\pi - t) = h_n(t)$, par symétrie avec le changement de variable $u = \pi - t$ dans la seconde intégrale, on a $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} h_n(t)dt + \int_{\pi/2}^{\pi} h_n(t)dt = 2\int_0^{\pi/2} h_n(t)dt$. On considère l'intégrale sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et on effectue le changement de variable $u = \dfrac{1}{\tan(t)}$, c'est-à-dire $t = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{u}\right) = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection strictement décroissante et de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, de sorte que $I_n = 2\displaystyle\int_{+\infty}^0 \dfrac{1}{1 + n^\alpha \pi^\alpha (1+u^2)^{-1}}\left(-\dfrac{1}{1+u^2}\right)du$ car $\sin^2(t) = \tan^2(t)\cos^2(t) = \dfrac{1}{u^2} \times \dfrac{1}{1 + (1/u)^2}$ donc $\sin^2(t) = \dfrac{1}{1+u^2} = (1+u^2)^{-1}$ et que $\varphi(u) = \dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(u)$ donc $\varphi'(u) = -\dfrac{1}{1+u^2}$. Ainsi, grâce à la question précédente, on a la relation $I_n = 2F(n^{\alpha/2}\pi^{\alpha/2}) = \dfrac{\pi}{\sqrt{1 + n^\alpha \pi^\alpha}}$.

c. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $g_\alpha : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $g_\alpha(t) = \dfrac{1}{1 + t^\alpha \sin^2(t)}$ est continue par opérations sur $\mathbb{R}_+^*$:

- Si $\alpha = -2$, alors $t^\alpha \sin^2(t) = \dfrac{\sin^2(t)}{t^2} \underset{0}{\sim} 1$ donc g_{-2} se prolonge en 0 en posant $g_{-2}(0) = \dfrac{1}{2}$.
- Si $\alpha > -2$, alors $t^\alpha \sin^2(t) \underset{0}{\sim} t^{2+\alpha}$ donc $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} t^\alpha \sin^2(t) = 0$ et g_α se prolonge en 0 en posant $g_\alpha(0) = 1$.

- Si $\alpha < -2$, alors $t^\alpha \sin^2(t) \underset{0}{\sim} t^{2+\alpha}$ donc $\lim\limits_{t\to 0^+} t^\alpha \sin^2(t) = +\infty$ et g_α se prolonge en 0 avec $g_\alpha(0) = 0$.

Dans tous les cas, g_α est intégrable en 0 car elle y est continue donc $\displaystyle\int_0^\pi g_\alpha(t)\mathrm{d}t$ converge.

Si $\alpha \leqslant 0$, $\forall t \geqslant \pi$, $t^\alpha \leqslant 1$ donc $g_\alpha(t) \geqslant \dfrac{1}{1+\sin^2(t)} \geqslant \dfrac{1}{2}$ donc $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} g_\alpha(t)\mathrm{d}t$ diverge “grossièrement”. Prenons pour la suite $\alpha > 0$. Soit $G_\alpha : [\pi; +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $G_\alpha(x) = \displaystyle\int_\pi^x g_\alpha(t)\mathrm{d}t = \int_\pi^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2(t)}$.

Par Chasles, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $G_\alpha(n\pi) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2(t)}$. Posons, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2(t)}$. Le changement de variable affine $t = u + k\pi$ (facile à justifier) transforme u_k et $u_k = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}u}{1+(u+k\pi)^\alpha \sin^2(u)}$ car $\sin^2(u+k\pi) = \sin^2(u)$. Comme $\forall u \in [0;\pi]$, $k\pi \leqslant u + k\pi \leqslant (k+1)\pi$, on a $k^\alpha \pi^\alpha \leqslant (u+k\pi)^\alpha \leqslant (k+1)^\alpha \pi^\alpha$ donc $1 + k^\alpha\pi^\alpha \sin^2(u) \leqslant 1 + (u+k\pi)^\alpha \sin^2(u) \leqslant 1 + (k+1)^\alpha \pi^\alpha \sin^2(u)$. Par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} I_{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi}{\sqrt{1+(k+1)^\alpha \pi^\alpha}} \leqslant G_\alpha(n\pi) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi}{\sqrt{1+k^\alpha\pi^\alpha}} = \sum_{k=1}^{n-1} I_k$. Comme $I_k \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{k^{\alpha/2}\pi^{\alpha/2}}$, la série à termes positifs $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} I_k$ converge si et seulement si $\alpha > 2$ par le critère de Riemann. Traitons deux cas :

- Si $\alpha \leqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} I_k$ diverge donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} I_{k+1} = +\infty$ donc, par minoration $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} G_\alpha(n\pi) = +\infty$, ce qui prouve la divergence de l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} g_\alpha(t)\mathrm{d}t$, donc aussi la divergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2(t)}$.
- Si $\alpha > 2$, $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} I_k$ converge, notons $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} I_k$, on a donc $\forall n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} I_k \leqslant S$ donc $G_\alpha(n\pi) \leqslant S$ et, pour tout réel $x \geqslant \pi$, comme G_α est croissante car g_α est positive, on a $G_\alpha(x) \leqslant G_\alpha((\lfloor x \rfloor + 1)\pi) \leqslant S$ donc les intégrales partielles étant majorées, $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} g_\alpha(t)\mathrm{d}t$ converge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2(t)}$ aussi.

Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2(t)}$ converge si et seulement si $\alpha > 2$.

4 La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$ est continue sur $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ et sur $\left[\dfrac{\pi}{2}; +\infty\right[$ et $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ donc f est intégrable en 0 ce qui montre que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\mathrm{d}x$ converge donc I_1 existe. Dans $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$, on pose $u : x \mapsto \sin(x)$ et $v : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ qui sont de classe C^1 sur $\left[\dfrac{\pi}{2}; +\infty\right[$ pour avoir, par intégration par parties, comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} u(x)v(x) = 0$, $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ est de même nature que $\displaystyle\int_{\pi/2} \frac{\sin(x)}{2x^{3/2}}\mathrm{d}x$. Comme $g : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{2x^{3/2}}$ est continue sur $\left[\dfrac{\pi}{2}; +\infty\right[$ et que $g(x) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$, g est intégrable sur $\left[\dfrac{\pi}{2}; +\infty\right[$ par comparaison et Riemann, ainsi I_2 existe.

b. Par concavité de $\cos$ sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ car $\cos'' = -\cos \leqslant 0$ sur cet intervalle, on a $\forall x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos(x) \geqslant 1 - \dfrac{2x}{\pi}$ car la courbe de $\cos$ est au dessus de ses cordes. Ainsi, $I_1 \geqslant \displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{\pi}\right)\mathrm{d}x$ qu'il suffit de calculer.

Posons $u_n = \displaystyle\int_{n\pi+(\pi/2)}^{(n+1)\pi+(\pi/2)} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ pour $n \in \mathbb{N}$, alors $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0 en majorant donc, par critère spécial des séres alternées, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée. Changement de variable en découpant avec Chasles..... et la somme de la série est supérieure à son premier terme qui est négatif et qui vaut u_1.

c. Par définition, comme $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ convergent, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ converge

et on a $I = I_1 + I_2$ toujours par définition.
En fait, en posant $x = u^2 = \varphi(u)$ avec φ qui est strictement croissante, de classe C^1 et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, on obtient, par changement de variable, $I = 2\int_0^{+\infty} \cos(u^2)du = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sim 1,25$ car on retrouve une intégrale de FRESNEL.

(5) D'abord, pour tout polynôme P, la fonction $x \mapsto \lfloor P(x) \rfloor$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ par composition donc la fonction $f_P : x \mapsto (-1)^{\lfloor P(x) \rfloor}$ l'est aussi. Comme $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |f_P(x)| = 1$, bien sûr que la fonction f_P n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Traitons trois cas :

- Si $P = a$ est constant, f_P est constante et vaut ± 1 selon la parité de $\lfloor a \rfloor$ donc $\int_0^{+\infty} f_P$ diverge.

- Si $P = aX + b$ est de degré 1, prenons par exemple $a > 0$ (l'autre cas se traite de la même manière). En posant $u_n = \frac{n-b}{a}$ pour $n \geqslant \lfloor b \rfloor + 1 = n_0$, la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est positive, strictement croissante, tend vers $+\infty$. Si on avait convergence de $\int_0^{+\infty} f_P(x)dx$, en notant $F_P : x \mapsto \int_0^x f_P(t)dt$ la "primitive" de f_P qui s'annule en 0, la fonction F_P admettrait une limite finie notée $I = \int_0^{+\infty} (-1)^{\lfloor P(x) \rfloor}dx$ en $+\infty$. Par la relation de CHASLES, comme $F_P(u_{n+1}) - F_P(u_n) = \int_{u_n}^{u_{n+1}} f_P(t)dt = \pm(u_{n+1} - u_n)$, on aurait $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$ alors que $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{a}$: NON ! On conclut que $\int_0^{+\infty} (-1)^{\lfloor P(x) \rfloor}dx$ diverge.

- Si $\deg(P) \geqslant 2$, par exemple $a = \mathrm{dom}(P) > 0$ (l'autre cas est similaire), on a $\deg(P') = \deg(P) - 1 \geqslant 1$ et $\mathrm{dom}(P) = a\deg(P) > 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} P'(x) = +\infty$. De même, $\lim\limits_{x \to +\infty} P''(x) = +\infty$ si $\deg(P) \geqslant 3$ et $P'' = 2a > 0$ si $\deg(P) = 2$. Ainsi, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \geqslant A,\ P'(x) > 0$ et $P''(x) > 0$ donc P est strictement croissante et strictement convexe sur $[A; +\infty[$. Posons $N = \lfloor P(A) \rfloor + 1 > P(A)$, comme P réalise une bijection strictement croissante de $[A; +\infty[$ dans $[P(A); +\infty[$ car P est continue sur $\mathbb{R}$, il existe un unique réel $x_0 > A$ tel que $P(x_0) = N$. Comme f_P est continue sur le segment $[0; x_0]$, l'intégrale $\int_0^{x_0} f_P(x)dx$ converge et le problème se ramène à la convergence de $\int_{x_0}^{+\infty} f_P(x)dx$. De plus, il existe une unique suite strictement croissante $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(x_n) = N + n$ car P est bijective et strictement croissante de $[x_0; +\infty[$ dans $[N; +\infty[$. Posons $a_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} (-1)^{\lfloor P(x) \rfloor}dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

  - si $N + n$ est pair, pour $x \in [x_n; x_{n+1}[$, $N + n = P(x_n) \leqslant P(x) < P(x_{n+1}) = N + n + 1$ donc $f_P(x) = 1$ car $\lfloor P(x) \rfloor = N + n$ est pair. Ainsi, $a_n = x_{n+1} - x_n > 0$. De même, si $N + n$ est impair, on obtient $a_n = -(x_{n+1} - x_n) < 0$. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc alternée.

  - Par le théorème des accroissements finis, pout tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'existence de $y_n \in]x_n; x_{n+1}[$ tel que $N + n + 1 - (N + n) = 1 = P(x_{n+1}) - P(x_n) = P'(y_n)(x_{n+1} - x_n)$ donc $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{P'(x_n)}$ ce qui prouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} P'(x) = +\infty$. Ainsi, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

  - De plus, comme $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante car $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n < y_n < x_{n+1} < y_{n+1} < x_{n+2}$, et que P' est strictement croissante sur $[x_0; +\infty[$ par construction, on obtient $P'(y_n) < P'(y_{n+1})$ donc $|a_n| = \frac{1}{P'(y_n)} > \frac{1}{P'(y_{n+1})} = |a_{n+1}|$. Ainsi, $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

  D'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n$ converge, ce qui se traduit, en posant la

somme partielle $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (-1)^{\lfloor P(x) \rfloor} dx = \int_{x_1}^{x_{n+1}} (-1)^{\lfloor P(x) \rfloor} dx$, par $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$.
Soit maintenant $x \geqslant x_0$, comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$, il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \leqslant x < x_{n+1}$. Ainsi, $F_P(x) = \int_0^x f_P(t)dt = \int_0^{x_n} f_P(t)dt + \int_{x_n}^{x} f_P(t)dt$ donc $|F_P(x) - S| = |F_P(x) - S_{n-1} + S_{n-1} - S| \leqslant |S_{n-1} - S| + \left| \int_{x_n}^{x} 1 dt \right| \leqslant |S_{n-1} - S| + (x_{n+1} - x_n)$ par inégalité triangulaire sur les réels et sur les intégrales. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} n = +\infty$ (l'entier n dépend de x), que $\lim\limits_{n\to+\infty} (S_{n-1} - S) = 0$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$, par encadrement, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} F_P(x) = S$. Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} (-1)^{\lfloor P(x) \rfloor} dx$ converge.

Par conséquent, $\int_0^{+\infty} (-1)^{\lfloor P(x) \rfloor} dx$ converge si et seulement si $\deg(P) \geqslant 2$.

6 **a.** Il s'agit dans cette question de vérifier que la fonction $g_n : \left[0; 1 - \frac{1}{n}\right] \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$ s'annule sur $\left[0; 1 - \frac{1}{n}\right]$. Or cette fonction g_n est continue par opérations sur $\left[0; 1 - \frac{1}{n}\right]$ car f l'est sur $[0; 1]$.

- Pour $n = 1$, en prenant $x_1 = 0 \in \left[0; 1 - \frac{1}{1}\right] = \{0\}$, on a bien $g_1(x_1) = f(1) - f(0) = 0$.
- Pour $n = 2$, $g_2(0) = f(1/2) - f(0)$ et $g_2(1/2) = f(1) - f(1/2) = f(0) - f(1/2) = -g_2(0)$ ce qui montre que $g_2(0)g_2(1/2) = -g_2(0)^2 \leqslant 0$ et, par le fameux théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g_2 s'annule en x_2 sur $\left[0; 1 - \frac{1}{2}\right] = \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Dans les deux cas $n = 1$ et $n = 2$, il existe bien $x_n \in \left[0; 1 - \frac{1}{n}\right]$ tel que $f\left(x_n + \frac{1}{n}\right) = f(x_n)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, par télescopage, on a $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = f(1) - f(0) = 0$ donc $\sum\limits_{k=0}^{n-1} g_n\left(\frac{k}{n}\right) = 0$. Comme cette somme de quantités réelles est nulle, on a deux cas :

- Il existe un entier $k \in [\![0; n-1]\!]$ tel que $g_n\left(\frac{k}{n}\right) = 0$ et $x_n = \frac{k}{n} \in \left[0; 1 - \frac{1}{n}\right]$ convient.
- Tous les termes de cette somme sont non nuls, comme leur somme est nulle, il en existe deux de signes stricts opposés, donc $\exists (i, j) \in [\![0; n-1]\!]$ tel que $i \neq j$, $g_n\left(\frac{i}{n}\right) < 0$ et $g_n\left(\frac{j}{n}\right) > 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué, $\exists x_n \in \left]\widetilde{\frac{i}{n}; \frac{j}{n}}\right[\subset \left[0; 1 - \frac{1}{n}\right]$, $g_n(x_n) = 0$ donc $f\left(x_n + \frac{1}{n}\right) = f(x_n)$

Dans les deux cas, il existe bien un réel $x_n \in \left[0; 1 - \frac{1}{n}\right]$ tel que $f\left(x_n + \frac{1}{n}\right) = f(x_n)$.

b. En tâtonnant, pour $\alpha \in]0; 1[\setminus \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$, si on pose $f_\alpha : x \mapsto x - \left(\frac{\sin(\pi x/\alpha)}{\sin(\pi/\alpha)} \right)^2$ (somme d'une fonction périodique et d'une fonction affine), la fonction f_α est continue par opérations sur $[0; 1]$ car $\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) \neq 0$ puisque $\frac{\pi}{\alpha}$ n'est pas un multiple de π par hypothèse, elle vérifie bien $f_\alpha(0) = f_\alpha(1) = 1 - 1$. Mais, bizarrement, $\forall x \in [0; 1 - \alpha]$, $f_\alpha(x + \alpha) - f_\alpha(x) = x + \alpha - \left(\frac{\sin(\pi(x/\alpha) + \pi)}{\sin(\pi/\alpha)} \right)^2 - \left(x - \left(\frac{\sin(\pi x/\alpha)}{\sin(\pi/\alpha)} \right)^2 \right) = \alpha \neq 0$ donc il n'existe aucun réel $x \in [0; 1 - \alpha]$ tel que $f(x + \alpha) \neq f(x)$. Amazing !

7 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto x\sin(x) - c\cos(x)$ est dérivable sur $J_n = \overline{I_n} = \left[n\pi; n\pi + \frac{\pi}{2}\right]$, vérifie $f_n'(x) = \sin(x) + x\cos(x) + c\sin(x)$. Traitons deux cas :

- Si n est pair, f_n' reste strictement positive sur J_n donc f_n est strictement croissante sur J_n et

$f_n(n\pi) = -c < 0$ et $f_n\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = n\pi + \frac{\pi}{2} > 0$ donc, par le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection strictement croissante de J_n dans $\left[-c; n\pi + \frac{\pi}{2}\right]$. Comme 0 est à l'intérieur de cet intervalle, il existe un unique réel $x_n \in \overset{\circ}{J}_n = I_n$ tel que $f_n(x_n) = 0$, c'est-à-dire tel que $x_n \sin(x_n) - c\cos(x_n) = 0$.

• Si n est impair, f'_n reste strictement négative sur J_n donc f_n est strictement décroissante sur J_n et $f_n(n\pi) = c > 0$ et $f_n\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -n\pi - \frac{\pi}{2} < 0$ donc, par le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection strictement décroissante de J_n dans $\left[-n\pi - \frac{\pi}{2}; c\right]$. Comme 0 est à l'intérieur de cet intervalle, il existe un unique réel $x_n \in \overset{\circ}{J}_n = I_n$ tel que $f_n(x_n) = 0$, c'est-à-dire tel que $x_n \sin(x_n) - c\cos(x_n) = 0$.

Dans les deux cas, pour $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in \left]n\pi; n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $x_n \sin(x_n) c\cos(x_n) = 0$ d'où l'existence et l'unicité de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions de l'énoncé.

b. Comme $x_n \sin(x_n) - c\cos(x_n) = 0$ et $\cos(x_n) \neq 0$, on a $\tan(x_n) = \frac{c}{x_n} = \tan(x_n - n\pi)$ car $\tan$ est π-périodique. Or $x_n - n\pi \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\subset \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Par définition de la fonction Arctan, on a donc $x_n - n\pi = \mathrm{Arctan}\left(\frac{c}{x_n}\right)$. Mais $n\pi < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$ et $n\pi + \frac{\pi}{2} \underset{+\infty}{\sim} n\pi$ donc, par encadrement, $x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{c}{x_n} = 0$, de sorte que $x_n - n\pi \underset{+\infty}{\sim} \frac{c}{x_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{c}{n\pi} = y_n$ ou $x_n \underset{+\infty}{=} n\pi + \frac{c}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

c. En reprenant plus loin le développement limité précédent, $x_n - n\pi = \mathrm{Arctan}\left(\frac{c}{x_n}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{c}{x_n} - \frac{c^3}{3x_n^3} + o\left(\frac{1}{x_n^3}\right)$. Or $x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi$ donc $\frac{c^3}{3x_n^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{c^3}{3n^3\pi^3}$ qui s'écrit aussi $\frac{c^3}{3x_n^3} \underset{+\infty}{=} \frac{c^3}{3n^3\pi^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ et, pour la même raison, on peut aussi remplacer $o\left(\frac{1}{x_n^3}\right)$ par $o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ de sorte que $x_n - n\pi \underset{+\infty}{=} \dfrac{c}{n\pi + \frac{c}{n\pi} + o(\frac{1}{n})} - \frac{c^3}{3n^3\pi^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Ainsi, on obtient $x_n - n\pi \underset{+\infty}{=} \frac{c}{n\pi} \times \dfrac{1}{1 + \frac{c}{n^2\pi^2} + o(\frac{1}{n^2})} - \frac{c^3}{3n^3\pi^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{c}{n\pi}\left(1 - \frac{c}{n^2\pi^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{c^3}{3n^3\pi^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ qui se réduit en $x_n - n\pi \underset{+\infty}{=} \frac{c}{n\pi}\left(1 - \frac{c}{n^2\pi^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{c^3}{3n^3\pi^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{c}{n\pi} - \frac{c^2(3+c)}{3n^3\pi^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. On peut donc conclure que $x_n - n\pi - \frac{c}{n\pi} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{c^2(3+c)}{3n^3\pi^3}$.

8 **a.** Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\alpha : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f_\alpha(x) = x^\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{x^{2\alpha+2}}\right)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 1 + \frac{1}{x^{2\alpha+2}} > 1$. Déterminons un équivalent simple de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 0 :

• Si $\alpha > -1$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{2\alpha+2}} = 0$ donc $\ln\left(1 + \frac{1}{x^{2\alpha+2}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{2\alpha+2}}$ et $f_\alpha(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^\alpha}{x^{2\alpha+2}} = \frac{1}{x^{\alpha+2}}$.

• Si $\alpha = -1$, $f_{-1}(x) = \frac{\ln(2)}{x}$.

• Si $\alpha < -1$, on écrit $\ln\left(1 + \frac{1}{x^{2\alpha+2}}\right) = -(2\alpha+2)\ln(x) + \ln(1 + x^{2\alpha+2}) \underset{+\infty}{=} -(2\alpha+2)\ln(x) + o(\ln(x))$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2\alpha+2} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1 + x^{2\alpha+2}) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $f_\alpha(x) \underset{+\infty}{\sim} -(2\alpha+2)x^\alpha \ln(x)$.

Et maintenant quand x tend vers 0^+ :

• Si $\alpha > -1$, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{2\alpha+2}} = +\infty$ et $\ln\left(1 + \frac{1}{x^{2\alpha+2}}\right) = -(2\alpha+2)\ln(x) + \ln(1 + x^{2\alpha+2})$ donc $\ln\left(1 + \frac{1}{x^{2\alpha+2}}\right) \underset{0}{=} -(2\alpha+2)\ln(x) + o(\ln(x))$ donc $f_\alpha(x) \underset{0}{\sim} -(2\alpha+2)x^\alpha \ln(x)$ car $\ln(1 + x^{2\alpha+2}) \underset{0}{\sim} o(\ln(x))$.

• Si $\alpha=-1$, $f_{-1}(x)=\dfrac{\ln(2)}{x}$.

• Si $\alpha<-1$, $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^{2\alpha+2}}=0$ donc $\ln\left(1+\dfrac{1}{x^{2\alpha+2}}\right)\underset{0}{\sim}\dfrac{1}{x^{2\alpha+2}}$ et $f_\alpha(x)\underset{0}{\sim}\dfrac{x^\alpha}{x^{2\alpha+2}}=\dfrac{1}{x^{\alpha+2}}$.

On peut passer à l'intégrabilité de la fonction f_α sur $\mathbb{R}_+^*$:

• Si $\alpha>-1$, $f_\alpha(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{x^{\alpha+2}}$ avec $\alpha+2>1$ donc f_α est intégrable en $+\infty$ par Riemann et $f_\alpha(x)\underset{0}{=}o\left(\dfrac{1}{x^{\frac{1-\alpha}{2}}}\right)$ par croissances comparées donc f_α est intégrable en 0^+ par Riemann car $\dfrac{1-\alpha}{2}<1$.

• Si $\alpha=-1$, $f_{-1}(x)=\dfrac{\ln(2)}{x}$ donc, d'après Riemann, f_{-1} n'est ni intégrable en 0^+, ni en $+\infty$.

• Si $\alpha<-1$, $f_\alpha(x)\underset{+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{x^{\frac{1-\alpha}{2}}}\right)$ par croissances comparées donc f_α est intégrable en $+\infty$ par Riemann car $\dfrac{1-\alpha}{2}>1$ et $f_\alpha(x)\underset{0}{\sim}\dfrac{1}{x^{\alpha+2}}$ avec $\alpha+2<1$ donc f_α est intégrable en 0^+ par Riemann.

Ainsi, f_α est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\alpha\neq-1$, et comme f_α est positive, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^\alpha\ln\left(1+\frac{1}{x^{2\alpha+2}}\right)dx$ converge si et seulement si $\alpha\neq-1$.

b. Méthode 1 : pour calculer $I_\alpha=\displaystyle\int_0^{+\infty}x^\alpha\ln\left(1+\frac{1}{x^{2\alpha+2}}\right)dx$ dans le cas où $\alpha\neq-1$, on pose $u_\alpha:x\mapsto\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ et $v_\alpha:x\mapsto\ln\left(1+\dfrac{1}{x^{2\alpha+2}}\right)$ qui sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Traitons deux cas :

• Si $\alpha>-1$, on a $u_\alpha(x)v_\alpha(x)\underset{0}{\sim}-2x^{\alpha+1}\ln(x)$ donc $\displaystyle\lim_{x\to0^+}u_\alpha(x)v_\alpha(x)=0$ par croissances comparées car $\alpha+1>0$ et $u_\alpha(x)v_\alpha(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{x^{\alpha+1}}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}u_\alpha(x)v_\alpha(x)=0$. Ainsi, par intégration par parties,
$$I_\alpha=-\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\frac{-(2\alpha+2)x^{-2\alpha-3}}{1+x^{-(2\alpha+2)}}\right)dx=2\int_0^{+\infty}\frac{x^{-\alpha-2}dx}{1+(x^{-\alpha+1})^2}=\left[-\frac{1}{\alpha+1}\mathrm{Arctan}(x^{-\alpha-1})\right]_0^{+\infty}.$$
Comme $\displaystyle\lim_{x\to0^+}x^{-\alpha-1}=+\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^{-\alpha-1}=0$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\mathrm{Arctan}(t)=\frac{\pi}{2}$, on a $I_\alpha=\dfrac{\pi}{\alpha+1}$.

• Si $\alpha<-1$, $u_\alpha(x)v_\alpha(x)\underset{+\infty}{\sim}-2x^{\alpha+1}\ln(x)$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}u_\alpha(x)v_\alpha(x)=0$ par croissances comparées car $\alpha+1<0$ et $u_\alpha(x)v_\alpha(x)\underset{0}{\sim}\dfrac{1}{x^{\alpha+1}}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to0^+}u_\alpha(x)v_\alpha(x)=0$. Par conséquent, par intégration par parties,
$$I_\alpha=-\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\frac{-(2\alpha+2)x^{-2\alpha-3}}{1+x^{-(2\alpha+2)}}\right)dx=2\int_0^{+\infty}\frac{x^{-\alpha-2}dx}{1+(x^{-\alpha+1})^2}=\left[-\frac{1}{\alpha+1}\mathrm{Arctan}(x^{-\alpha-1})\right]_0^{+\infty}.$$
Comme $\displaystyle\lim_{x\to0^+}x^{-\alpha-1}=0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^{-\alpha-1}=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\mathrm{Arctan}(t)=\frac{\pi}{2}$, on a $I_\alpha=-\dfrac{\pi}{\alpha+1}$.

On peut unifier cette formule, $\forall\alpha\neq-1,\ I_\alpha=\dfrac{\pi}{|\alpha+1|}$.

Méthode 2 : on effectue, pour $\alpha\neq-1$, on pose $u=x^{\alpha+1}$, ou $x=\varphi_\alpha(u)=u^{\frac{1}{\alpha+1}}$. Traitons deux cas :

• Si $\alpha>-1$, φ_α est une bijection strictement croissante et de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, donc, par linéarité, $I_\alpha=\displaystyle\int_0^{+\infty}u^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\ln\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\left(\frac{1}{\alpha+1}u^{\frac{-\alpha}{\alpha+1}}\right)du=\frac{1}{\alpha+1}\int_0^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{u^2}\right)du$.

• Si $\alpha<-1$, φ_α est une bijection strictement décroissante et de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, donc, par linéarité, $I_\alpha=\displaystyle\int_{+\infty}^{0}u^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\ln\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\left(\frac{1}{\alpha+1}u^{\frac{-\alpha}{\alpha+1}}\right)du=-\frac{1}{\alpha+1}\int_0^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{u^2}\right)du$.

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{u^2}\right)du$ ne dépend pas de u, se calcule facilement par le même type d'intégration par parties que ci-dessus, et vaut π, on en déduit à nouveau que $\forall\alpha\neq-1,\ I_\alpha=\dfrac{\pi}{|\alpha+1|}$.

Il est à noter que cette méthode montrait que, pour $\alpha\neq-1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^\alpha\ln\left(1+\frac{1}{x^{2\alpha+2}}\right)dx$ était de même nature que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{u^2}\right)du$, c'est-à-dire convergente car $h:u\mapsto\ln\left(1+\dfrac{1}{u^2}\right)$ est continue sur

$\mathbb{R}_+^*$, vérifie $h(u) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{u^2}$ et $h(u) \underset{0}{\sim} -2\ln(u) \underset{0}{=} o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{u}}\Big)$, donc h est intégrable en 0 et en $+\infty$ par RIEMANN.

9 **a.** Comme f est continue, positive et non nulle sur $[a;b]$, d'après la contraposée d'un théorème du cours, il vient $A = \displaystyle\int_a^b f(x)dx > 0$. Comme f est continue sur $[a;b]$, d'après le théorème fondamental de l'intégration, $F : [a;b] \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a sur $[a;b]$. F est donc de classe C^1, strictement croissante car $F' = f > 0$ donc F réalise une bijection de l'intervalle $[a;b]$ dans $[0;A]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, les conditions imposées à $x_0, x_1, \cdots, x_n$ reviennent à $\forall k \in [\![1;n]\!], F(x_k) - F(x_{k-1}) = \dfrac{A}{n}$ donc, puisque $x_0 = a$ est imposé donc $F(x_0) = 0$, les conditions imposées se résument à $\forall k \in [\![0;n]\!],\ F(x_k) = \dfrac{kA}{n}$. Ceci montre l'existence et l'unicité de la subdivision demandée et qu'on a $\forall k \in [\![0;n]\!],\ x_k = F^{-1}\Big(\dfrac{kA}{n}\Big)$.

b. Pour $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\Big(F^{-1}\big(\dfrac{kA}{n}\big)\Big) = \dfrac{1}{A} \times \Bigg[\dfrac{A}{n}\sum_{k=0}^{n} g\Big(\dfrac{kA}{n}\Big)\Bigg] = \dfrac{g(0)}{n} + \dfrac{1}{A} \times \Bigg[\dfrac{A}{n}\sum_{k=1}^{n} g\Big(\dfrac{kA}{n}\Big)\Bigg]$ en définissant $g : [0;A] \to \mathbb{R}$ par $g(x) = f \circ F^{-1}(x)$. Comme g est continue sur le segment $[0;A]$ par composition puisque F^{-1} est continue de $[0;A]$ dans $[a;b]$, le théorème sur les sommes de RIEMANN montre que l'on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{A}\int_0^A g(x)dx = \dfrac{1}{A}\int_0^A f \circ F^{-1}(x)dx$. On peut effectuer le changement de variable $x = F(t)$ car F est de classe C^1, bijective et strictement croissante de $[a;b]$ dans $[0;A]$ et on obtient la nouvelle expression $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{A}\int_a^b \big(f \circ F^{-1} \circ F(t)\big) \times f(t)dt = \dfrac{1}{A}\int_a^b f(t)^2 dt$ car $F'(t) = f(t)$. Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{\displaystyle\int_a^b (f(x))^2 dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}$.

10 **a.** Soit $f : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \geqslant 1,\ f(x) = x - \ln(x)$. La fonction f est dérivable sur $[1;+\infty[$ et $\forall x \geqslant 1,\ f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x} \geqslant 0$ et f' ne s'annule qu'en 1 donc f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$ et, comme $f(1) = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ par croissances comparées, la fonction f réalise une bijection strictement croissante de $[1;+\infty[$ dans $[1;+\infty[$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comme $n \in [1;+\infty[$, il existe un unique réel $u_n \in [1;+\infty[$ tel que $f(u_n) = u_n - \ln(u_n) = n$.

b. <u>Limite</u> : comme $f(n) = n - \ln(n) < n = f(u_n)$ et que f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$, on en déduit que $n < u_n$. Par minoration, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

<u>Équivalent</u> : si $v_n = n + \sqrt{n}$, on a $f(v_n) = n + \sqrt{n} - \ln(n + \sqrt{n})$ donc $f(v_n) - n = \sqrt{n} - \ln(n) - \ln\Big(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)$ donc, par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(f(v_n) - n) = +\infty$. Ainsi, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geqslant n_0,\ f(v_n) > n = f(u_n)$ donc $u_n \leqslant v_n$. Ainsi, $\forall n \geqslant n_0,\ n \leqslant u_n \leqslant n + \sqrt{n}$. Par encadrement, on a donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} n$ car $n + \sqrt{n} \underset{+\infty}{\sim} n$.

c. Posons $x_n = u_n - n$, on a $x_n \underset{+\infty}{=} o(n)$ d'après **b.**. Comme $n + x_n - \ln(n + x_n) = n$, on en déduit que $x_n = \ln(n) + \ln\Big(1 + \dfrac{x_n}{n}\Big)$ donc $x_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + o(1)$ d'où $x_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$. On a déjà $u_n \underset{+\infty}{=} n + \ln(n) + o(1)$.

Reprenons, la relation $x_n = \ln(n) + \ln\Big(1 + \dfrac{x_n}{n}\Big)$ montre que $x_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \dfrac{x_n}{n} + o\Big(\dfrac{x_n}{n}\Big)$ par développements limités donc $x_n - \ln(n) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x_n}{n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$. On a déjà $u_n \underset{+\infty}{=} n + \ln(n) + \dfrac{\ln(n)}{n} + o\Big(\dfrac{\ln(n)}{n}\Big)$.

Revenons à la charge, $x_n = \ln(n) + \ln\Big(1 + \dfrac{x_n}{n}\Big)$ donc $x_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \dfrac{x_n}{n} - \dfrac{x_n^2}{2n^2} + o\Big(\dfrac{x_n^2}{n^2}\Big)$. Or on a vu que

$x_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$ donc $x_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)}{n^2} - \frac{x_n^2}{2n^2} + o\left(\frac{x_n^2}{n^2}\right) + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$. On peut simplifier car $\frac{\ln(n)}{n^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{x_n^2}{n^2}\right)$ car $x_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)^2$ et $o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{x_n^2}{n^2}\right)$ pour la même raison, on peut donc réduire à $x_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} - \frac{x_n^2}{2n^2} + o\left(\frac{x_n^2}{n^2}\right)$, ce qui garantit que $x_n - \ln(n) - \frac{\ln(n)}{n} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{x_n^2}{2n^2} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)^2}{2n^2}$.
Tout ceci montre qu'on a le développement asymptotique $u_n \underset{+\infty}{=} n + \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln^2(n)}{2n^2} + o\left(\frac{\ln^2(n)}{n^2}\right)$.

11 **a.** Soit $x \geqslant a$, la fonction $g_x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $g_x(t) = f(t)e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ puisque f l'est et $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ |g_x(t)| = f(t)e^{-xt} \leqslant f(t)e^{-at}$ alors que la fonction $t \mapsto f(t)e^{-at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par hypothèse. Ainsi, par comparaison, la fonction g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-at}dt$ est absolument convergente donc convergente.

b. Comme $h : t \mapsto e^{-at}f(t)$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, par le théorème fondamental de l'intégration, la fonction $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $F(t) = \int_0^t f(u)e^{-au}du$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ car c'est la primitive de h qui s'annule en 0. Comme $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-at}dt$ converge par hypothèse, la fonction F admet une limite finie $I = \int_0^{+\infty} e^{-at}f(t)dt$ en $+\infty$ par définition. Il est alors classique que F est bornée sur $\mathbb{R}_+$. En effet, en prenant $\varepsilon = 1 > 0$, il existe un réel $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall t \geqslant A,\ |F(t) - I| \leqslant \varepsilon = 1$ ce qui montre que $|F(t)| = |(F(t) - I) + I| \leqslant |F(t) - I| + |I| \leqslant |I| + 1$. Comme F est continue sur le segment $[0; A]$, elle y est bornée par le théorème des bornes atteintes donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall t \in [0; A],\ |F(t)| \leqslant M$. Par conséquent $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ |F(t)| \leqslant \mathrm{Max}(|I| + 1, M)$ et F est bien bornée sur $\mathbb{R}_+$. Traitons deux cas :

- Si $x = a$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ converge par hypothèse.
- Si $x > a$, en posant $u_x : t \mapsto e^{-(x-a)t}$ et $v = F$ qui sont C^1 sur $\mathbb{R}_+$ avec $\lim_{t\to+\infty} u_x(t)v(t) = 0$ car F est bornée, $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt = \int_0^{+\infty} u_x(t)v'(t)dt$ et $\int_0^{+\infty} u_x'(t)v(t)dt = \int_0^{+\infty} (a - x)e^{-(x-a)t}F(t)dt$ ont même nature par intégration par parties. Or, la fonction $a_x : t \mapsto e^{-(x-a)t}F(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $|a_x(t)| = |e^{-(x-a)t}||F(t)| \underset{+\infty}{=} O\left(|e^{-(x-a)t}|\right)$ d'après ce qui précède donc a_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison à des intégrales de référence. Ainsi, $\int_0^{+\infty} (a - x)e^{-(x-a)t}F(t)dt$ est absolument convergente donc convergente et, par suite, $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ converge.

Par conséquent, $\forall x \geqslant a,\ \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ converge.

12 **a.** Soit $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $x^T = (x_1 \ \cdots \ x_n)$ tel que $Ax \geqslant 0$. On a donc les inégalités $2x_1 - x_2 \geqslant 0$, $\forall i \in [\![2; n-1]\!]$, $-x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} \geqslant 0$ et $-x_{n-1} + 2x_n \geqslant 0$.

Soit un indice $i_0 \in [\![1; n]\!]$ tel que $x_{i_0} = \underset{i \in [\![1;n]\!]}{\mathrm{Min}}(x_i)$. Distinguons trois cas :

- si $i_0 = 1$, on a $x_1 \geqslant x_2 - x_1 \geqslant 0$ par minimalité de x_{i_0}.
- si $i_0 \in [\![2; n-1]\!]$, on a $(x_{i_0-1} - x_{i_0}) + (x_{i_0+1} - x_{i_0}) \leqslant 0$ alors que $x_{i_0-1} - x_{i_0} \geqslant 0$ et $x_{i_0+1} - x_{i_0} \geqslant 0$ donc $x_{i_0-1} - x_{i_0} = x_{i_0+1} - x_{i_0} = 0$ et $x_{i_0-1} = x_{i_0} = x_{i_0+1}$. On continue de proche en proche pour obtenir $x_1 = \cdots = x_n$ et on se ramène au premier ou au dernier cas pour avoir $x_{i_0} \geqslant 0$.
- si $i_0 = n$, on a $x_n \geqslant x_{n-1} - x_n \geqslant 0$.

Dans tous les cas, on a donc $x_{i_0} \geqslant 0$ donc $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $x_k \geqslant 0$ donc $x \geqslant 0$.

b. Si $x \in \mathrm{Ker}(A)$, $Ax = 0 \geqslant 0$ donc $x \geqslant 0$ d'après **a.** et $A(-x) = 0 \geqslant 0$ donc, de même, $-x \geqslant 0$ et on en déduit que $x = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ donc, comme $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est carrée, A est inversible.

c. La j-ième colonne de A^{-1} est $A^{-1}e_j$, et comme $A(A^{-1}e_j) = e_j \geqslant 0$, par définition de la monotonie d'une matrice, on a $A^{-1}e_j \geqslant 0$ donc tous les coefficients de la matrice A^{-1} sont positifs, ce qui s'écrit $A^{-1} \geqslant 0$.

13 **a.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, raisonnons par double implication :

($\Longrightarrow$) Si $A \simeq B$, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PB$, soit alors $X \in \mathrm{Ker}(B)$, alors $BX = 0$ donc $AX = PBX = 0$ donc $X \in \mathrm{Ker}(A)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(B) \subset \mathrm{Ker}(A)$. Réciproquement, si $X \in \mathrm{Ker}(A)$, $BX = P^{-1}AX = P^{-1}0 = 0$ donc $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(B)$. Par double inclusion, $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(B)$.

($\Longleftarrow$) Si $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(B)$, prenons un supplémentaire F de $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(B)$ dans $\mathbb{R}^n$. Soit a, b les endomorphismes canoniquement associés à A, B. D'après le théorème du rang version géométrique, a (resp. b) induit un isomorphisme de F dans $\mathrm{Im}\,(a)$ (resp. $\mathrm{Im}\,(b)$). Notons $r = \mathrm{rang}\,(A) = \mathrm{rang}\,(a) = \mathrm{rang}\,(B) = \mathrm{rang}\,(b)$ et $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_r, v_{r+1}, \cdots, v_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^n = F \oplus \mathrm{Ker}(a)$. La famille $(b(v_1), \cdots, b(v_r))$ est une base de $\mathrm{Im}\,(b)$ donc elle est libre. Par le théorème de la base incomplète, il existe une base de $\mathbb{R}^n$ de la forme $\mathcal{B}'' = (b(v_1), \cdots, b(v_r), w_{r+1}, \cdots, w_n)$. La famille $(a(v_1), \cdots, a(v_r))$ est une base de $\mathrm{Im}\,(a)$ donc elle est libre. Par le théorème de la base incomplète, il existe une base de $\mathbb{R}^n$ de la forme $\mathcal{B}' = (a(v_1), \cdots, b(v_r), z_{r+1}, \cdots, z_n)$. Soit u l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ envoyant $b(v_j)$ sur $a(v_j)$ pour $j \in [\![1; r]\!]$ et w_k sur z_k pour $k \in [\![r+1; n]\!]$. Pour $j \in [\![1; r]\!]$, on a $a(v_j)) = u(b(v_j))$ par construction et, pour $k \in [\![r+1; n]\!]$, $a(v_k) = u(b(v_k)) = 0$. Ainsi, a et $u \circ b$ coïncident sur une base donc $a = u \circ b$. Si on note P la matrice de u dans la base canonique, on a $A = PB$ avec $P \in GL_n(\mathbb{R})$ car u envoyant la base $\mathcal{B}'$ sur la base $\mathcal{B}''$, u est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$. On a bien $A \simeq B$.

Par double implication, on a l'équivalence $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(B) \iff A \simeq B$. Bien sûr, $\simeq$ est une relation d'équivalence sur les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: elle est réflexive, symétrique et transitive.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang $r \in [\![0;n]\!]$, traitons trois cas :

- Si $r = 0$, alors $A = 0$ et la seule matrice B telle que $A \simeq B$ est la matrice nulle $B = 0$. Ainsi, $A \simeq 0$.
- Si $1 \leqslant r \leqslant n-1$, $A \simeq \begin{pmatrix} C \\ 0_{n-r,n} \end{pmatrix}$ avec $C \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ et $\text{rang}\,(C) = r$.
- Si $r = n$, alors A est inversible et, en prenant $P = A \in GL_n(\mathbb{R})$, on a $A = PI_n = AI_n$ donc $A \simeq I_n$.

14 **a.** En notant $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et d'après A, $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = -e_1 + e_3$, $f(e_3) = e_4$ et $f(e_4) = -2e_3$. Comme $f(e_1) + f(e_3) = e_2 + e_4$, la famille $(e_1 + e_3, f(e_1) + f(e_3))$ est libre donc F est un plan de $\mathbb{R}^4$. De même, $f(e_3) = e_4$ et $(e_3, f(e_3))$ est libre donc F_2 est aussi un plan de $\mathbb{R}^4$.

Puisque $f(e_1+e_3) = f(e_1)+f(e_3) \in F_1$ et que $f(f(e_1)+f(e_3)) = f(e_2+e_4) = -(e_1+e_3) \in F_1$, par combinaison linéaire, tout vecteur de F_1 a son image par f dans F_1 car $(e_1 + e_3, e_2 + e_4)$ est une base de F_1.

Puisque $f(e_3) \in F_2$ et que $f(f(e_3)) = f(e_4) = -2e_3 \in F_2$, par combinaison linéaire, tout vecteur de F_2 a son image par f dans F_2 car (e_3, e_4) est une base de F_2.

Les sous-espaces F_1 et F_2 sont donc stables par f.

b. Si $x \in F_1 \cap F_2$, il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $x = a(e_1+e_3)+b(e_2+e_4) = ce_3+de_4$ donc, en identifiant les coordonnées sur la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on a $a = 0$, $b = 0$, $a = c$, $b = d$ donc $a = b = c = d = 0$. Ainsi, $x = 0$ donc $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. Par Grassmann, $\dim(F_1+F_2) = \dim(F_1)+\dim(F_2)-\dim(F_1 \cap F_2) = 2+2-0 = 4$ donc $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^4$. Ainsi, $\mathbb{R}^4 = F_1 \oplus F_2$ et F_1, F_2 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

c. $x = e_1$, $f(x) = e_2$, $f^2(x) = f(e_2) = -e_1 + e_3$ et $f^3(x) = -f(e_1) + f(e_3) = -e_2 + e_4$. La matrice P de cette famille $\mathcal{B}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\mathcal{B}$ est une base car P est inversible puisque $\det(P) = 1$ (P est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale).

d. Comme $f^4(x) = f(-e_2 + e_4) = -f(e_2) + f(e_4) = e_1 - e_3 - 2e_3 = e_1 - 3e_3 = -2x - 3f^2(x)$, on obtient $C = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (c'est une matrice compagnon).

15 **a.** Posons S_n l'ensemble de toutes les permutations de $[\![1;n]\!]$ et $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des dérangements de $[\![1;n]\!]$.

Méthode 1 : pour un entier $i \in [\![1;n]\!]$, soit F_i l'ensemble des permutations de $[\![1;n]\!]$ qui fixent l'élément i, c'est-à-dire $F_i = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = 1\}$. Par définition, une permutation qui n'est pas un dérangement fixe au moins un entier i de $[\![1;n]\!]$ donc $\overline{\mathcal{D}_n} = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$. Par la formule du crible (hors programme), on a donc

$$\text{card}\,(\overline{\mathcal{D}_n}) = \sum_{i=1}^{n} \text{card}\,(F_i) - \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \text{card}\,(F_i \cap F_j) + \sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant n} \text{card}\,(F_i \cap F_j \cap F_k) - \cdots + (-1)^{n-1} \text{card}\,(F_1 \cap \cdots \cap F_n).$$

Pour $j \in [\![1;n]\!]$, quelle que soit la famille $(i_1, \cdots, i_j)$ telle que $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_j$, il y a $(n-j)!$ permutations dans $\bigcap_{k=1}^{j} F_{i_k}$ car les éléments $i_1, \cdots, i_j$ sont fixes par une permutation de cet ensemble et les images des $n - j$ autres sont quelconques, ce qui fait $(n-j)!$ manières de les permuter. Comme il y a $\binom{n}{j}$ façons de prendre une telle famille $(i_1,\cdots,i_j)$ telle que $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_j$ car il faut juste choisir j éléments parmi n, on a donc $\text{card}\,(\overline{\mathcal{D}_n}) = n! - \text{card}\,(\mathcal{D}_n) = n! - D_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}(n-k)!$. On a donc $D_n = n! + \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)! = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)!$ car $(-1)^0\binom{n}{0}(n-0)! = n!$. Mais $\binom{n}{k}(n-k)! = \dfrac{n!(n-k)!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{k!}$ donc $D_n = n!\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k!}$.

Méthode 2 : si on note $\mathcal{D}_n^k$ l'ensemble des permutations de $[\![1;n]\!]$ qui ont exactement k points fixes pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, il est clair que $\{\mathcal{D}_n^0,\cdots,\mathcal{D}_n^n\}$ est une partition de S_n donc $\text{card}\,(S_n) = n! = \sum\limits_{k=0}^{n}\text{card}\,(\mathcal{D}_n^k)$. Or, $\mathcal{D}_n^0 = \mathcal{D}_n$ donc $\text{card}\,(\mathcal{D}_n^0) = D_n$, $\mathcal{D}_n^n = \{\text{id}_{[\![1;n]\!]}\}$ donc $\text{card}\,(\mathcal{D}_n^n) = 1 = D_0$ en posant $D_0 = 1$ par convention et $\mathcal{D}_n^{n-1} = \emptyset$ donc $\text{card}\,(\mathcal{D}_n^{n-1}) = 0 = \binom{n}{1}D_1$ car $D_1 = 0$. En général, pour $k \in [\![1;n-1]\!]$, pour choisir une permutation σ de $\mathcal{D}_n^k$, on choisit de $\binom{n}{k}$ manières les k éléments de $[\![1;n]\!]$ qui vont être fixes par σ. Ensuite il faut déranger les $n-k$ autres, et on a D_{n-k} façons de le faire. Ainsi, on en déduit que $\text{card}\,(\mathcal{D}_n^k) = \binom{n}{k}D_{n-k}$ ce qui donne $n! = \sum\limits_{j=0}^{n}\binom{n}{n-j}D_j = \sum\limits_{j=0}^{n}\binom{n}{j}D_j$ en posant $k = n-j$ car $\binom{n}{n-j} = \binom{n}{j}$. Par conséquent, on a $\forall i \in [\![0;n]\!],\ i! = \sum\limits_{j=0}^{n}\binom{i}{j}D_j$, ce qui se traduit matriciellement par $AX = Y$ avec $A = \left(\binom{i}{j}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n}$, $X^T = (D_0\ D_1\ \cdots\ D_n)$ et $Y^T = (0!\ 1!\ \cdots\ n!)$. La matrice $A^T = \left(\binom{j}{i}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ est triangulaire supérieure et "contient" le triangle de PASCAL, c'est surtout la matrice de l'endomorphisme $f : P \mapsto P(X+1)$ de $E = \mathbb{R}_n[X]$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1,X,\cdots,X^n)$. Comme f est un automorphisme de E avec $f^{-1} : P \mapsto P(X-1)$, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \left((-1)^{j-i}\binom{j}{i}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ donc $A^{-1} = \left((-1)^{i-j}\binom{i}{j}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n}$. Alors, $X = A^{-1}Y$ donc, en regardant sur la dernière ligne de cette relation matricielle, on a la relation $D_n = \sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}j! = n!\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\dfrac{1}{(n-j)!} = n!\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k!}$ en posant $k = n-j$.

b. D'après **a.**, $\dfrac{D_n}{n!} = \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k!}$ est la somme partielle de la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{(-1)^n}{n!}$. Or on sait que $\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{z^n}{n!}$. Pour $z = -1$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{z^n}{n!} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$. Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{D_n}{n!} = \dfrac{1}{e} \sim 0,37$ qui représente la probabilité limite qu'une permutation quelconque a d'être un dérangement, ou la proportion limite de dérangements parmi les permutations de $[\![1;n]\!]$.

c. Méthode 1 : A est symétrique réelle donc, d'après le théorème spectral elle est diagonalisable. Comme $A + I_n = (1)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est de rang 1, $\text{Ker}(A+I_n) = E_{-1}(A)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ par la formule du rang, il est d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$ et est l'hyperplan orthogonal au vecteur $(1,\cdots,1)$. Comme $\text{Tr}\,(A) = 0$, la dernière valeur propre de A est $n-1$ et elle est simple. En posant $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $U^T = (1\ \cdots\ 1)$, on a $AU = (n-1)U$ donc $E_{n-1}(A) = \text{Vect}(U)$. A est donc semblable à $D = \text{diag}(-1,\cdots,-1,n-1)$ donc $\det(A) = \det(D) = (-1)^{n-1}(n-1)$.

Méthode 2 : avec l'opération de Gauss $C_n \longleftarrow C_n + \cdots + C_1$ et par linéarité par rapport à la dernière colonne, $\det(A) = (n-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$, puis, avec les opérations $C_1 \longleftarrow C_1 - C_n$, $C_2 \longleftarrow C_2 - C_n$, $\cdots$, $C_{n-1} \longleftarrow C_{n-1} - C_n$, on obtient $\det(A) = (n-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (n-1)(-1)^{n-1}$.

d. Avec la formule du déterminant clairement hors programme, on a $\det(A) = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod\limits_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k}$ où S_n est l'ensemble de toutes les permutations de $[\![1;n]\!]$ et $\varepsilon(\sigma)$ la signature de la permutation σ. Pour $\sigma \in S_n$, s'il existe $k \in [\![1;n]\!]$ tel que $\sigma(k) = k$, on a $a_{\sigma(k),k} = 0$ donc $\prod\limits_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} = 0$. Ainsi, les seules permutations qui contribuent à $\det(A)$ sont les dérangements σ pour lesquels $\prod\limits_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k} = 1$. Si on note $\mathcal{D}_n$ les dérangements de S_n, $\mathcal{D}_n^+$ les dérangements de S_n de signature $+1$ et $\mathcal{D}_n^-$ les dérangements de S_n de signature -1, on a $\det(A) = \sum\limits_{\sigma \in \mathcal{D}_n} \varepsilon(\sigma) = \sum\limits_{\sigma \in \mathcal{D}_n^+} 1 - \sum\limits_{\sigma \in \mathcal{D}_n^-} 1 = D_n^+ - D_n^-$.

e. D'après **a.**, **c.** et **d.**, $D_n^+ + D_n^- = D_n = n! \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ et $D_n^+ - D_n^- = (-1)^{n-1}(n-1)$. Par conséquent, on trouve $D_n^+ = \frac{1}{2}\Big((-1)^{n-1}(n-1) + n! \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\Big)$ et $D_n^- = \frac{1}{2}\Big((-1)^{n}(n-1) + n! \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\Big)$.

16 **a.** Si $x \in \mathrm{Ker}(g)$, $x = (f+g)(x) = f(x)$ donc $x \in \mathrm{Im}\,(f)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Im}\,(f)$ d'où $\dim(\mathrm{Ker}(g)) \leqslant \dim(\mathrm{Im}\,(f))$. Par la formule du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(g)) = n - \mathrm{rang}\,(g) \geqslant \mathrm{rang}\,(f) = \dim(\mathrm{Im}\,(f))$ d'après l'énoncé. On en conclut que $\dim(\mathrm{Ker}(g)) = \dim(\mathrm{Im}\,(f))$ et, par inclusion et égalité des dimensions, on a $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}\,(f)$.

b. Comme $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$, on a $g \circ f = 0$. En effet, si $x \in E$, $f(x) \in \mathrm{Im}\,(f)$ donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(g)$ et $g(f(x)) = 0_E$. Par symétrie des rôles joués par f et g, on a aussi $f \circ g = 0$.

c. D'après la question précédente, $g = g \circ \mathrm{id}_E = g \circ (f+g) = g \circ f + g \circ g = g^2$ ce qui prouve que g est un projecteur de E. Par symétrie encore, f est aussi un projecteur de E. Comme $f = \mathrm{id}_E - g$, f est le projecteur associé à g, et g est le projecteur associé à f, ce qui signifie que si g est la projection sur G parallèlement à F, alors f est la projection sur F parallèlement à G.

d. Pour $x \in E$, on a $x = \mathrm{id}_E(x) = \sum\limits_{k=1}^{p} f_k(x)$ avec $f_k(x) \in \mathrm{Im}\,(f_k)$ donc $E = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{Im}\,(f_k)$. Comme on sait que $\dim\Big(\sum\limits_{k=1}^{p} \mathrm{Im}\,(f_k)\Big) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{p} \dim(\mathrm{Im}\,(f_k)) = \sum\limits_{k=1}^{p} \mathrm{rang}\,(f_k)$, on a $n \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{rang}\,(f_k) \leqslant n$ et donc $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{rang}\,(f_k) = n$. Comme $E = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{Im}\,(f_k)$ et que $\dim(E) = n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dim(\mathrm{Im}\,(f_k))$, on peut conclure d'après le cours que cette somme est directe et donc que $E = \bigoplus\limits_{k=1}^{p} \mathrm{Im}\,(f_k)$.

Pour $k \in [\![1;p]\!]$ et $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - f_k)$, on a $x = f_k(x) \in \mathrm{Im}\,(f_k)$, ce qui montre que $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - f_k) \subset \mathrm{Im}\,(f_k)$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - f_k)) \leqslant \mathrm{rang}\,(f_k)$ et, avec la formule du rang, que $\mathrm{rang}\,(\mathrm{id}_E - f_k) \geqslant \dim(\mathrm{Ker}(f_k))$.

Or $\operatorname{rang}(\mathrm{id}_E - f_k) = \operatorname{rang}\Big(\sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{p} f_i\Big) \leqslant \sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{p} \operatorname{rang}(f_i)$ donc $\operatorname{rang}(\mathrm{id}_E - f_k) \leqslant n - \operatorname{rang}(f_k) = \dim(\operatorname{Ker}(f_k))$ avec la formule du rang. Ainsi, $\operatorname{rang}(\mathrm{id}_E - f_k) = \dim(\operatorname{Ker}(f_k))$ et $\dim(\operatorname{Ker}(\mathrm{id}_E - f_k)) = \operatorname{rang}(f_k)$ donc $\operatorname{Ker}(\mathrm{id}_E - f_k) \subset \operatorname{Im}(f_k)$ devient l'égalité $\operatorname{Ker}(\mathrm{id}_E - f_k) = \operatorname{Im}(f_k)$. Par conséquent, $(\mathrm{id}_E - f_k) \circ f_k = 0$ donc $f_k^2 = f_k$, ce qui justifie que f_k est un projecteur de E.

17 Raisonnons par récurrence sur p.

Initialisation : si $p = 1$ et F une droite de $\mathbb{K}[X]$. Alors $F = \operatorname{Vect}(P_0)$ avec $P_0 \neq 0 \in \mathbb{K}[X]$.

Hérédité : soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons que tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ de dimension p admette une base composée de polynômes de degrés deux à deux distincts. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ de dimension $p+1$. Soit $\mathcal{B} = (P_1, \cdots, P_{p+1})$ une base de F, notons $d = \operatorname{Max}(\deg(P_1), \cdots, \deg(P_{p+1}))$, il existe donc un indice $j \in [\![1; p+1]\!]$ tel que $\deg(P_j) = d$. Quitte à réordonner les vecteurs de $\mathcal{B}$, on peut supposer que $j = p+1$. Posons $a_d \neq 0$ le coefficient dominant de P_{p+1} et posons, pour $k \in [\![1; p]\!], Q_k = P_k$ si $\deg(P_k) < d$ et $Q_k = P_k - \dfrac{\operatorname{dom}(P_k)}{a_d} P_{p+1}$. Par construction, tous les polynômes $Q_1, \cdots, Q_p$ sont de degrés strictement inférieurs à d. Posons $\mathcal{B}' = (Q_1, \cdots, Q_p, P_{p+1})$. Tous les polynômes de $\mathcal{B}'$ sont des combinaisons linéaires de polynômes de $\mathcal{B}$ et vice-versa, ainsi $\operatorname{Vect}(\mathcal{B}) = \operatorname{Vect}(\mathcal{B}') = F$. Si on note $G = \operatorname{Vect}(Q_1, \cdots, Q_p)$, on a $G \subset \mathbb{R}_{d-1}[X]$ d'après ce qui précède et, comme $(Q_1, \cdots, Q_p)$ est une sous-famille de $\mathcal{B}'$, elle est libre donc $(Q_1, \cdots, Q_p)$ est une base de G donc $\dim(G) = p$. Par hypothèse de récurrence, il existe une base $(U_1, \cdots, U_p)$ de G composée de polynômes de degrés deux à deux distincts, ces degrés étant strictement inférieurs à d car $G \subset \mathbb{R}_{d-1}[X]$. Ainsi, en notant $\mathcal{B}'' = (U_1, \cdots, U_p, P_{p+1})$ est, comme avant, une base de F et elle est formée de polynômes de degrés deux à deux distincts.

Conclusion : par principe de récurrence, tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ admet une base composée de polynômes de degrés deux à deux distincts.

18

19 **a.** Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifie $X \in \operatorname{Ker}(B)$, alors $BX = 0$ donc $AX = A^2BX = A^2 0 = 0$ donc $X \in \operatorname{Ker}(A)$. Ainsi, $\operatorname{Ker}(B) \subset \operatorname{Ker}(A)$. De plus, par la formule du rang, $\dim(\operatorname{Ker}(B)) = n - \operatorname{rang}(B) = n - \operatorname{rang}(A) = \dim(\operatorname{Ker}(A))$ donc, par inclusion et égalité des dimensions, on a $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Ker}(B)$.

b. Soit $X \in \operatorname{Im}(B) \cap \operatorname{Ker}(B) = \operatorname{Im}(B) \cap \operatorname{Ker}(A)$, alors $AX = 0$ et $\exists Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X = BY$. Ainsi, $ABY = AX = 0$ donc $AY = A^2BY = A0 = 0$ donc $Y \in \operatorname{Ker}(A)$. Mais $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Ker}(B)$ donc $BY = 0$ d'où $X = 0$. Ainsi, $\operatorname{Im}(B) \cap \operatorname{Ker}(B) = \{0\}$ donc $\operatorname{Im}(B)$ et $\operatorname{Ker}(B)$ sont en somme directe. Mais $\dim(\operatorname{Im}(B)) + \dim(\operatorname{Ker}(B)) = n$ par la formule du rang donc $\operatorname{Im}(B)$ et $\operatorname{Ker}(B)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$, ce qui s'écrit $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im}(B) \oplus \operatorname{Ker}(B)$.

c. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qu'on décompose $X = X_1 + X_2$ avec $X_1 \in \operatorname{Im}(B)$ et $X_2 \in \operatorname{Ker}(B)$ grâce à **b.**.

- comme $X_1 \in \operatorname{Im}(B)$, il existe $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X_1 = BU$ et on a alors $B^2AX_1 - BX_1 = B^2(AB - I_n)U$ or $A(AB - I_n) = 0$ donc $\operatorname{Im}(AB - I_n) \subset \operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Ker}(B)$ donc $B(AB - I_n) = 0$, ou $BAB = B$ et on a donc la relation $B^2AX_1 = BX_1$.
- comme $X_2 \in \operatorname{Ker}(B)$, on a $BX_2 = 0$ et $B^2AX_2 = 0$ aussi car $X_2 \in \operatorname{Ker}(A)$ d'après **a.**, ainsi $B^2AX_2 = BX_2$.

Par conséquent, $B^2AX = B^2A(X_1 + X_2) = B^2AX_1 + B^2AX_2 = BX_1 + BX_2 = BX$. Ceci étant vrai pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a l'égalité matricielle $B^2A = B$.

20 **a.** Comme $f^2 - 3f + 2\mathrm{id}_E = 0$, $f \circ \left(\frac{1}{2}(3\mathrm{id}_E - f)\right) = f \circ \left(\frac{1}{2}(3\mathrm{id}_E - f)\right) = \mathrm{id}_E$ donc $f \in GL(E)$ et $f^{-1} = \frac{1}{2}(3\mathrm{id}_E - f)$.

Puisque $P = X^2 + 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ est annulateur de f et scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$, f est diagonalisable, que E soit un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ou un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. En plus les sous-espaces $E_1(f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et $E_2(f) = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires dans E.

b. Initialisation : on a $f^0 = \mathrm{id}_E = 0.f + 1.\mathrm{id}_E$ donc $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ conviennent.

Hérédité : si on suppose l'existence de $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f^n = x_n f + y_n \mathrm{id}_E$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on a alors $f^{n+1} = f^n \circ f = (x_n f + y_n \mathrm{id}_E) \circ f = x_n f^2 + y_n f = x_n(3f - 2\mathrm{id}_E) + y_n f = (3x_n + y_n)f - 2x_n \mathrm{id}_E$ donc $x_{n+1} = 3x_n + y_n$ et $y_{n+1} = -2x_n$ conviennent.

Par principe de récurrence, les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ et les relations de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = 3x_n + y_n$ et $y_{n+1} = -2x_n$ vérifient bien $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = x_n f + y_n \mathrm{id}_E$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+2} = 3x_{n+1} + y_{n+1} = 3x_{n+1} - 2x_n$ et l'équation caractéristique associée à cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 étant $z^2 - 3z + 2 = 0$ et ayant pour racines 1 et 2, il existe des réels A et B tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = A.1^n + B.2^n$. Les valeurs $x_0 = 0 = A + B$ et $x_1 = 3x_0 + y_0 = 1 = A + 2B$ donnent $A = -1$ et $B = 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = 2^n - 1$. De plus, pour $n \geqslant 1$, on a $y_n = -2x_{n-1} = 2 - 2^n$ et on vérifie que $y_0 = 1 = 2 - 2^0$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = 2 - 2^n$.

En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = (2^n - 1)f - (2^n - 2)\mathrm{id}_E$.

c. S'il n'y a pas unicité pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $(x_n, y_n) \neq (x'_n, y'_n)$ tels que $f^n = x_n f + y_n \mathrm{id}_E = x'_n f + y'_n \mathrm{id}_E$. Si $x_n \neq x'_n$, on a donc $f = \dfrac{y'_n - y_n}{x_n - x'_n}\mathrm{id}_E$ donc f est une homothétie. Si $x_n = x'_n$, on a $(y_n - y'_n)\mathrm{id}_E = 0$ donc $y_n = y'_n$ ce qui est exclus. Cherchons donc les homothéties qui vérifient les hypothèse de l'énoncé. Si $f = \lambda \mathrm{id}_E$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $f^2 - 3f + 2\mathrm{id}_E = (\lambda^2 - 3\lambda + 1)\mathrm{id}_E = 0$ donc $(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$ et $f = \mathrm{id}_E$ ou $f = 2\mathrm{id}_E$. Traitons donc trois cas :

- Si $f = \mathrm{id}_E$, $f^n = \mathrm{id}_E = f^n = x_n f + y_n \mathrm{id}_E$ pour l'infinité de couples $(x_n, y_n) \in \mathbb{K}^2$ tels que $x_n + y_n = 1$.
- Si $f = 2\mathrm{id}_E$, $f^n = 2^n \mathrm{id}_E = x_n f + y_n \mathrm{id}_E$ pour l'infinité de couples $(x_n, y_n) \in \mathbb{K}^2$ tels que $x_n + y_n = 2^n$.
- Si n'est pas une homothétie, donc si $f \neq \mathrm{id}_E$ et $f \neq 2\mathrm{id}_E$, si on a $f^n = x_n f + y_n \mathrm{id}_E = x'_n f + y'_n \mathrm{id}_E$, alors $(x_n - x'_n)f + (y_n - y'_n)\mathrm{id}_E$ et la famille (id_E, f) est libre donc $x_n - x'_n = y_n - y'_n = 0$ et $(x_n, y_n) = (x'_n, y'_n)$ et on a unicité de l'écriture de f^n en fonction de f et id_E.

Par conséquent, il y a unicité de (x_n, y_n) dans $f^n = x_n f + y_n \mathrm{id}_E$ si et seulement si f n'est pas une homothétie.

d. Pour $p_1 = \alpha(f - 2\mathrm{id}_E)$, $p_1^2 = \alpha^2(f^2 - 4f + 4\mathrm{id}_E) = \alpha^2(3f - 2\mathrm{id}_E - 4f + 4\mathrm{id}_E) = -\alpha^2(f - 2\mathrm{id}_E) = -\alpha p_1$ pour tout scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$. Pour que p_1 soit un projecteur, on a trois cas :

- Si $\alpha = 0$, p_1 est l'endomorphisme nul donc un projecteur.
- Si $\alpha = -1$, $p_1^2 = p_1$ donc p_1 est la projection sur $\mathrm{Im}(p_1) = \mathrm{Ker}(p_1 - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) = E_1(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p_1) = \mathrm{Ker}(2\mathrm{id}_E - f) = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_E) = E_2(f)$.
- Si $f = 2\mathrm{id}_E$, alors p_1 est l'endomorphisme nul quelle que soit la valeur de α.

Pour $p_2 = \beta(f - \mathrm{id}_E)$, $p_2^2 = \beta^2(f^2 - 2f + \mathrm{id}_E) = \alpha^2(3f - 2\mathrm{id}_E - 2f + \mathrm{id}_E) = \beta^2(f - \mathrm{id}_E) = \beta p_2$ pour tout scalaire $\beta \in \mathbb{K}$. Pour que p_2 soit un projecteur, on a trois cas :

- Si $\beta = 0$, p_2 est l'endomorphisme nul donc un projecteur.
- Si $\beta = 1$, $p_2^2 = p_2$ donc p_2 est la projection sur $\mathrm{Im}\,(p_2) = \mathrm{Ker}(p_2 - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_E) = E_2(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p_2) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) = E_1(f)$.
- Si $f = \mathrm{id}_E$, alors p_2 est l'endomorphisme nul quelle que soit la valeur de β.

Pour la suite, seul nous intéresse le cas où f n'est pas une homothétie et où $\alpha = -1$ et $\beta = 1$, auquel cas $p_1 = 2\mathrm{id}_E - f$ et $p_2 = f - \mathrm{id}_E$ sont des projecteurs spectraux associés à l'endomorphisme diagonalisable f.

e. <u>Méthode 1</u> : avec **a.**, $f^n = (2^n - 1)f - (2^n - 2)\mathrm{id}_E = p_1 + 2^n p_2$ mais ce n'est pas l'esprit. Il s'agit surtout de retrouver cette relation par une méthode plus directe, ne faisant pas intervenir de récurrence.

<u>Méthode 2</u> : si $f = \mathrm{id}_E$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = \mathrm{id}_E$ et si $f = 2\mathrm{id}_E$, $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = 2^n\mathrm{id}_E$ (cas peu intéressants). Si f n'est pas une homothétie, en écrivant $X^n = (X-1)(X-2)Q + a_nX + b_n$ la division euclidienne de X^n par P, en évaluant en 1 et en 2, on a $a_n + b_n = 1$ et $2a_n + b_n = 2^n$ donc $a_n = 2^n - 1$ et $b_n = 2 - 2^n$ donc, en remplaçant X par f dans cette division euclidienne, $f^n = (2^n - 1)f + (2 - 2^n)\mathrm{id}_E = p_1 + 2^n p_2$.

<u>Méthode 3</u> : on a $f = 2p_1 + p_2$ et $(f - \mathrm{id}_E) \circ (f - 2\mathrm{id}_E) = (f - 2\mathrm{id}_E) \circ f(-\mathrm{id}_E) = f^2 - 3f + 2\mathrm{id}_E = 0$ donc $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$ donc, par le binôme de Newton, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k p_1^k p_2^{n-k}$. Si $k \in [\![1; n-1]\!]$, il va rester $p_1 \circ p_2$ dans le terme de la somme donc ce terme sera nul, il ne reste donc que les termes $k = 0$ et $k = n$, d'où $f^n = \binom{n}{0} 2^0 p_2^n + \binom{n}{n} p_1^n = 2^n p_2 + p_1$.

21 **a.** Comme F est stable par D et que $P \in D$, les polynômes $P, D(P), \cdots, D^d(P)$ appartiennent à F. Or $\forall k \in [\![0; d]\!]$, $D^k(P) = P^{(k)}$ est de degré $d - k$. La famille $\mathcal{B} = (P, P', \cdots, P^{(d)})$ est de degrés échelonnés donc elle est libre et elle comporte $d+1$ vecteurs tous inclus dans $\mathbb{K}_d[X]$ de dimension $d+1$, ainsi $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}_d[X]$. Par conséquent, $\mathrm{Vect}(P, P', \cdots, P^{(d)}) = \mathbb{K}_d[X] \subset F$.

b. ($\subset$) Si $F = \{0\}$, F est stable par D. Si $F = \mathbb{K}_d[X]$ pour $d \in \mathbb{N}$, alors $\forall P \in F$, $D(P) = P'$ vérifie $\deg(D(P)) < \deg(P) \leqslant d$ donc $D(P) \in F$ et F est encore stable par D.

($\supset$) Soit F un sous-espace de $\mathbb{K}[X]$ stable par D. Posons $A = \{\deg(P) \mid P \in F \setminus \{0\}\}$. Traitons trois cas :

- Si A est vide, alors F ne contient que le polynôme nul et $F = \{0\}$.
- Si $A \neq \emptyset$ et A n'est pas majoré, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$ il existe $d \in A$ tel que $d \geqslant m$ donc F contient un polynôme de degré d et $\mathbb{K}_d[X] \subset F$ d'après **a.**. Or $\mathbb{K}_m[X] \subset \mathbb{K}_d[X]$ donc $\mathbb{K}_m[X] \subset F$. Comme ceci est vrai pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $F = \mathbb{K}[X]$.
- Si $A \neq \emptyset$ et A est majoré, comme A est une partie de $\mathbb{N}$, on peut poser $d = \mathrm{Max}(A)$. Il existe donc un polynôme $P \in F$ tel que $\deg(P) = d$. On a vu en **a.** que $\mathbb{K}_d[X] \subset F$ et, par maximalité de d, on a aussi $F \subset \mathbb{K}_d[X]$. Ainsi, par double inclusion, on a $F = \mathbb{K}_d[X]$.

Les sous-espaces de $\mathbb{K}[X]$ stables par D sont $\{0\}$ et $\mathbb{K}[X]$, mais aussi tous les sous-espaces $K_d[X]$ avec $d \in \mathbb{N}$.

22 **a.** Pour $(M, M') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on écrit $M = A + \lambda I_n$ et $M' = B + \lambda' I_n$ avec $(A, B) \in F^2$ et $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2$ puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = F \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$, alors $p(M) = \lambda I_n$ et $p(M') = \lambda' I_n$ et $MM' = (AB + \lambda B + \lambda' A) + \lambda\lambda' I_n$. Comme $AB + \lambda B + \lambda' A \in F$ car F est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par produit matriciel, on obtient $p(MM') = \lambda\lambda' I_n$

donc $p(MM') = p(M)p(M')$.

b. De même, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si on écrit $M = A + \lambda I_n$ avec $A \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $M^2 = (A^2 + 2\lambda A) + \lambda^2 I_n$ avec $A^2 + 2\lambda A \in F$. Si $M^2 \in F$, alors $p(M^2) = \lambda^2 I_n = 0$ donc $\lambda = 0$ et $M \in F$.

c. D'après le cours, $\forall (i,j,k,\ell) \in [\![1;n]\!]^2,\ E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$.

d. Pour $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, traitons deux cas :

<u>Si $i \neq j$</u> , $E_{i,j}^2 = E_{i,j}E_{i,j} = \delta_{j,i}E_{i,j} = 0$ donc $E_{i,j}^2 \in F$ car $0 \in F$ donc, d'après la question précédente, $E_{i,j} \in F$.

<u>Si $i = j$</u> , avec $k \in [\![1;n]\!] \setminus \{i\}$ $(n \geqslant 2)$, $E_{i,k}E_{k,i} = E_{i,i} \in F$ car $E_{i,k} \in F$ et $E_{k,i} \in F$ et d'après le premier cas.

Ainsi, toutes les matrices élémentaires sont dans F, ce qui montre que $\mathrm{Vect}(E_{i,j} \mid (i,j) \in [\![1;n]\!]^2) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset F$ donc que $F = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Mais ceci contredit le fait que F soit un hyperplan de E.

Il n'existe donc aucun hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par produit dont $\mathrm{Vect}(I_n)$ soit un supplémentaire.

Pour $n = 1$, un tel hyperplan existerait bien et ce serait $F = \{0\}$, mais ça n'a que peu d'intérêt.

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 3 SÉRIES NUMÉRIQUES, SÉRIES DE FONCTIONS ET SÉRIES ENTIÈRES

23 **a.** D'abord, le fait que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge impose que le rayon de convergence R de cette série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n t^n$ vérifie $R \geqslant 1$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $u_n : [-1;1] \to \mathbb{R}$ définie par $u_n(t) = a_n t^n$.

Premier cas : si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs, comme on a $||u_n||_{\infty,[-1;1]} = a_n$, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge normalement sur $[-1;1]$, intervalle sur lequel toutes les u_n sont continues ainsi, par théorème, la fonction S est bien définie et continue sur $[-1;1]$. Alors, $\lim_{t\to 1^-} S(t) = S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Second cas : si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée et $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elle tend aussi vers 0 puisque la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées. Mieux, pour $t \in [0;1]$, la suite $(a_n t^n)_{n\geqslant 0}$ est alternée et $(|a_n|t^n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et tend vers 0 donc, par le critère spécial des séries alternées, en posant $R_n : t \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(t)$ pour $n \geqslant -1$, on peut majorer $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0;1], |R_n(t)| \leqslant |a_{n+1}t^{n+1}| \leqslant |a_{n+1}|$ donc R_n est bornée sur $[0;1]$ et $||R_n||_{\infty,[0;1]} \leqslant |a_{n+1}|$ ce qui montre par encadrement que $\lim_{n\to+\infty} ||R_n||_{\infty,[0;1]} = 0$, donc que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge uniformément sur $[0;1]$. Comme les u_n sont continues sur $[0;1]$, S l'est aussi par théorème et, comme avant, $\lim_{t\to 1^-} S(t) = S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$. Comme $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3}$, la série à termes positifs $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge par critère de Riemann. Ainsi, d'après la question **a.** (premier cas), en notant $S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{t^n}{n(n+1)(n+2)}$ pour $t \in [-1;1]$, on a $\lim_{t\to 1^-} S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. On a classiquement $a_n = \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{2(n+2)}$ en décomposant en éléments simples donc, pour $t \in]0;1[$, avec les développements classiques en série entière, on obtient la relation $S(t) = \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{t^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{t^n}{n+1} + \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{t^n}{n+2} = -\dfrac{\ln(1-t)}{2} + \dfrac{1}{t}\big(\ln(1-t)+t\big) - \dfrac{1}{2t^2}\Big(\ln(1-t)+t+\dfrac{t^2}{2}\Big)$.
On a donc $\forall t \in]0;1[,\ S(t) = \dfrac{\ln(1-t)}{2t^2}(-t^2+2t-1)1 - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2t} = -\dfrac{(1-t)^2\ln(1-t)}{2t^2} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2t}$. Par croissances comparées, $\lim_{t\to 1^-} (1-t)^2\ln(1-t) = 0$ donc $\lim_{t\to 1^-} S(t) = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Autre méthode : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \Big(\dfrac{1}{2k} - \dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{2(k+2)}\Big) = \dfrac{H_n}{2} - \Big(H_n + \dfrac{1}{n+1} - 1\Big) + \dfrac{1}{2}\Big(H_n + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} - 1 - \dfrac{1}{2}\Big)$ si on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ avec la définition habituelle de $H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ (somme partielle de la série harmonique). On a donc $S_n = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2(n+1)} + \dfrac{1}{2(n+2)}$ donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{4}$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$. Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée et que $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0, d'après la question **a.** (second cas), en notant $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n t^n}{2n+1}$ pour $t \in [0;1]$, on a

$\lim\limits_{t\to 1^-} S(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$. Or, $\forall t \in [0;1[$, $S(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n t^n}{2n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{t}} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n (\sqrt{t})^{2n+1}}{2n+1} = \dfrac{\text{Arctan}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$ donc, en passant à la limite quand t tend vers 1^-, $\lim\limits_{t\to 1^-} S(t) = \text{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{4} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

<u>Autre méthode</u> : en posant $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^n}{2k+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$, comme $\dfrac{1}{2k+1} = \displaystyle\int_0^1 t^{2k} dt$, par linéarité de l'intégrale, on a $S_n = \displaystyle\int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{n} (-t^2)^k \Big) dt = \int_0^1 \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} dt$. Comme $\forall t \in [0;1]$, $\dfrac{t^{2(n+1)}}{1+t^2} \leqslant t^{2(n+1)}$, par inégalité triangulaire, $\left| S_n - \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \right| = \left| \int_0^1 \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} dt \right| = \int_0^1 \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2} dt \leqslant \int_0^1 t^{2(n+1)} dt = \frac{1}{2n+3}$ donc, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \big[\text{Arctan}(t)\big]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

d. Comme on parle de la limite de S en 1^-, S est définie sur $[0;1[$, donc que le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ vérifie $R \geqslant 1$. Posons $S_n : [0;1[\to \mathbb{R}$ définie par $S_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k t^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On ne somme que des quantités positives, donc $0 \leqslant S_n(t) \leqslant S(t)$ pour $t \in [0;1[$ et $n \in \mathbb{N}$. Comme S_n est polynomiale donc continue en 1, en passant à la limite quand t tend vers 1^- dans cette inégalité, on obtient $0 \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \leqslant \ell$. Ainsi, les sommes partielles de la série numérique à termes positifs $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ sont majorées donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge. D'après le premier cas de la question **a.**, on a donc $\lim\limits_{t\to 1^-} S(t) = \ell = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

24 **a.** Pour $\beta \in]1;\alpha[$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{(n+1)^\beta u_{n+1}}{n^\beta u_n} > 0$, alors $\ln(v_n) = \beta \ln\Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big) + \ln\Big(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\Big)$ donc $\ln(v_n) \underset{+\infty}{=} \dfrac{\beta}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big) + \ln\Big(1 - \dfrac{\alpha}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\Big) \underset{+\infty}{=} \dfrac{\beta}{n} - \dfrac{\alpha}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\Big) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\beta - \alpha}{n}$ car $\beta - \alpha \neq 0$ donc $\ln(v_n)$ est négatif pour n assez grand. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $v_n \leqslant 1$ donc $\forall n \geqslant n_0$, $(n+1)^\beta u_{n+1} \leqslant n^\beta u_n$ et la suite $(n^\beta u_n)_{n\geqslant n_0}$ est décroissante. Ainsi, $\forall n \geqslant n_0$, $n^\beta u_n \leqslant n_0^\beta u_{n_0}$ donc $u_n \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{n^\beta}\Big)$ ce qui montre, par comparaison à une série de RIEMANN, que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

b. D'après le cours, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $x \in]-1;1[$, on a $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} \prod\limits_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)$ donc, pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$, comme $\forall n \geqslant 1$, $\prod\limits_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n} \prod\limits_{k=1}^{n-1} (2k-1) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n} \times \dfrac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!} = \dfrac{(-1)^{n-1}(2n)!}{(2n-1)4^n n!}$, $\forall x \in]-1;1[$, $\sqrt{1+x} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}(2n)! x^n}{(2n-1)(n!)^2 4^n} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_0 = 1$ et $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}(2n)!}{(2n-1)(n!)^2 4^n}$ si $n \in \mathbb{N}^*$.

<u>Méthode 1</u> : si on pose $u_n = |a_n| = \dfrac{(2n)!}{(2n-1)4^n (n!)^2} > 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)(2n-1)}{4(2n+1)(n+1)^2}$ qui se simplifie en $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \Big(1 - \dfrac{1}{2n}\Big)\Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)^{-1} \underset{+\infty}{=} \Big(1 - \dfrac{1}{2n}\Big)\Big(1 - \dfrac{1}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\Big) \underset{+\infty}{=} 1 - \dfrac{\alpha}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$ avec $\alpha = \dfrac{3}{2} > 1$ de sorte que, avec la question **a.**, on a la convergence absolue des séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ et de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n(-1)^n$.

<u>Méthode 2</u> : si $u_n = |a_n| = \dfrac{(2n)!}{(2n-1)4^n (n!)^2} > 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n} e^{2n}}{(2\pi n) e^{2n} (2n) 4^n n^{2n}}$ avec STIRLING donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi} n^{3/2}}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ et de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n(-1)^n$ convergent absolument.

Le domaine de définition de $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est donc $[-1;1]$.

c. Pour $x \in]-R;R[$, on a $xS(x)^2 = x\Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n\Big) = x \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}\Big) x^n$ par produit de CAUCHY qu'on peut effectuer dans l'intervalle ouvert de convergence, ainsi $xS(x)^2 = x\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = S(x) - 1$. Comme $S(x)$ est racine réelle du polynôme $X^2 - xX + 1 \in \mathbb{R}[X]$, son discriminant $\Delta = 1 - 4x$ est positif de sorte que $x \leqslant \frac{1}{4}$ pour tout $x \in]-R;R[$. Ceci impose $R \leqslant \frac{1}{4}$.

De plus, $\forall x \in]-R;R[,\ S(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ ou $S(x) = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$. Comme $f : x \mapsto 2xS(x) - 1$ est développable en série entière sur $]-R;R[$, elle y est continue et $\forall x \in]-R;R[,\ f(x) = \pm\sqrt{1-4x}$ d'après ce qui précède. La continuité de f et le fait que f ne s'annule pas sur $]-R;R[$ montre que l'on a soit $\forall x \in]-R;R[,\ f(x) = \sqrt{1-4x}$ soit $\forall x \in]-R;R[,\ f(x) = -\sqrt{1-4x}$. Mais comme f vaut -1 en 0, elle est négative sur $]-R;R[$ et on a donc $\forall x \in]-R;R[,\ f(x) = -\sqrt{1-4x}$ donc $S(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.

d. Soit $T : \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[\to \mathbb{R}$ définie par $T(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$. D'après la question **b.**, T est développable en série entière sur $\left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$ (et même sur $\left[-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right]$ mais on n'en a pas besoin) et, avec les calculs précédents, on a $\forall x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[,\ T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!x^{n-1}}{2(2n-1)(n!)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+2)!x^n}{2(2n+1)((n+1)!)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!x^n}{(n+1)(n!)^2}$. On a bien sûr, pour $\forall x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$, la relation $T(x)^2 - T(x) + x = \frac{1-2\sqrt{1-4x}+(1-4x)}{4} - \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} + x = 0$. En effectuant un produit de Cauchy sur $\left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$, et en identifiant les coefficients, on trouve $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} v_k v_{n-k}$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient les mêmes conditions initiales et la même relation de récurrence donc, par récurrence forte, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n = \frac{(2n)!}{(n+1)(n!)^2} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

On reconnaît les nombres de Catalan : $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 5$, $u_4 = 14$, $u_5 = 42$,....

25 **a.** Comme f est continue et décroissante sur $[n-1;n]$ pour $n \geqslant n_0+1$, on a $\forall t \in [n-1;n],\ f(n) \leqslant f(t) \leqslant f(n-1)$ donc, par croissance de l'intégrale, $\int_{n-1}^{n} f(n)dt = f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)dt \leqslant f(n-1) = \int_{n-1}^{n} f(n-1)dt$. On a donc $0 \leqslant w_n \leqslant f(n-1) - f(n)$. D'après le théorème de la limite monotone, comme f est décroissante et minorée par 0, elle admet une limite finie en $+\infty$ et on peut donc poser $\ell = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ et on a $\lim_{n\to+\infty} f(n) = \ell$. Comme la suite $(f(n))_{n\geqslant n_0}$ converge, par dualité suite-série, la série télescopique $\sum_{n\geqslant n_0+1} (f(n-1) - f(n))$ converge aussi et, par comparaison, la série $\sum_{n\geqslant n_0+1} w_n$ converge.

b. Pour $n \geqslant n_0+1$, on définit la somme partielle $S_n = \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k)$ et $F : [n_0+\infty[\to \mathbb{R}$ par $F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)dt$, il s'agit de la primitive de f s'annulant en n_0. D'après la question précédente, la série $\sum_{n\geqslant n_0+1} w_n$ converge, donc en notant $W_n = \sum_{k=n_0+1}^{n} w_k$ pour $n \geqslant n_0+1$, on a $\lim_{n\to+\infty} W_n = W = \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} w_n$. Or, par Chasles, on a $\forall n \geqslant n_0+1,\ W_n = \int_{n_0}^{n} f(t)dt - \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) = F(n) - S_n$, de sorte que $\lim_{n\to+\infty} (F(n) - S_n) = W$.

$(\Longrightarrow)$ Si $\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$ converge, si on note $\lim_{n\to+\infty} S_n = S = \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} f(n)$, comme $F(n) = (F(n) - S_n) + S_n$, on a donc $\lim_{n\to+\infty} F(n) = W + S = I$ donc $(F(n))_{n\geqslant n_0}$ converge. Comme cette suite est croissante car $F' = f \geqslant 0$

donc F est croissante sur $[n_0+1;+\infty[$, on a $\forall x \in [n_0;+\infty[,\ F(x) \leqslant F(\lfloor x \rfloor + 1) \leqslant I$ car $\lfloor x \rfloor + 1$ est un entier supérieur à n_0+1 donc $F(\lfloor x \rfloor +1)$ est un terme de la suite $(F(n))_{n \geqslant n_0}$. Comme la fonction F est croissante et majorée, elle admet une limite finie en $+\infty$, ce qui est la définition de la convergence de $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$. Dans ce cas, $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{n \to +\infty} F(n) = W + S = I$.

$(\Longleftarrow)$ Si $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$ converge, F admet une limite finie en $+\infty$ notée $I = \displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \to +\infty} F(x)$ par définition. Par caractérisation séquentielle de la limite (l'implication facile, déjà utilisée ci-dessus), on a donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} F(n) = I$ donc, comme $S_n = (S_n - F(n)) + F(n)$, la suite $(S_n)_{n \geqslant n_0+1}$ converge par somme et on a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n = -W + I = S$. C'est la définition de la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant n_0+1} f(n)$.

Par double implication, on a bien établi que $\displaystyle\sum_{n \geqslant n_0} f(n)$ et $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.

c. Si $a \leqslant 0$, on a $\dfrac{1}{n} \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{n\ln^a(n)}\Big)$ donc, si $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n\ln^a(n)}$ convergeait, par comparaison, la série harmonique $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n}$ convergerait aussi, ce qui est faux. Ainsi, par contraposée, $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n\ln^a(n)}$ diverge si $a \leqslant 0$.

Pour $a > 0$, soit $f_a : [2;+\infty[$ définie par $f_a(x) = \dfrac{1}{x\ln^a(x)} = x^{-1}(\ln(x))^{-a}$ qui est positive sur $[2;+\infty[$. La fonction f_a est dérivable par opérations et $\forall x \geqslant 2,\ f_a'(x) = -x^{-2}(\ln(x))^{-a} - ax^{-1}\Big(\dfrac{1}{x}(\ln(x))^{-a-1}\Big)$ donc $f_a'(x) = \dfrac{-\ln(x) - a}{x^2(\ln(x))^{a+1}} \leqslant 0$ car $x \geqslant 2$ et $a \geqslant 0$. Ainsi, la fonction f_a est décroissante sur $[2;+\infty[$. Si on avait pris $a \in \mathbb{R}$, la fonction f_a était aussi décroissante mais seulement sur $[\mathrm{Max}(e^{-a},2);+\infty[$ donc f_a est décroissante sur $[n_0;+\infty[$ avec $n_0 = \lfloor \mathrm{Max}(e^{-a},2) \rfloor + 1$.

D'après **b.**, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n\ln^a(n)}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\ln^a(t)}$ sont de même nature. Traitons trois cas :

- Si $a \in]0;1[$, $\forall x \geqslant 2$, $\displaystyle\int_2^x \frac{dt}{t\ln^a(t)} = \Big[\frac{\ln^{1-a}(t)}{1-a}\Big]_2^x = \frac{\ln^{1-a}(x)}{1-a} - \frac{\ln^{1-a}(2)}{1-a} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $1 - a > 0$.
- Si $a = 1$, $\forall x \geqslant 2$, $\displaystyle\int_2^x \frac{dt}{t\ln(t)} = \big[\ln(\ln(t))\big]_2^x = \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2)) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- Si $a \in]1;+\infty[$, $\forall x \geqslant 2$, $\displaystyle\int_2^x \frac{dt}{t\ln^a(t)} = \frac{\ln^{1-a}(x)}{1-a} - \frac{\ln^{1-a}(2)}{1-a} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln^{1-a}(2)}{a-1}$ car $1 - a < 0$.

Ainsi, l'intégrale de Bertrand $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\ln^a(t)}$ converge si et seulement si $a > 1$ donc la série de Bertrand $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n\ln^a(n)}$ converge si et seulement si $a > 1$ d'après **b.**.

d. On prend ici $a = -1$ donc $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t}dt$ diverge et $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{\ln(n)}{n}$ diverge d'après **c**. Posons la somme partielle $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$. On a vu en question **a.** qu'en posant $W_n = \displaystyle\sum_{k=4}^{n} w_k$, comme $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ est continue, positive et décroissante sur $[e;+\infty[$ avec $e \sim 2,7$ donc sur $[3;+\infty[$, la suite $(W_n)_{n \geqslant 4}$ convergeait vers un réel W. Or, pour $n \geqslant 4$, $W_n = \displaystyle\sum_{k=4}^{n} \Big(\int_{k-1}^{k} f(t)dt - f(k)\Big) = \int_3^n \frac{\ln(t)}{t}dt - S_n + \frac{\ln(3)}{3} + \frac{\ln(2)}{2}$. Comme $\displaystyle\int_3^n \frac{\ln(t)}{t}dt = \Big[\frac{\ln^2(t)}{2}\Big]_3^n = \frac{\ln^2(n)}{2} - \frac{\ln^2(3)}{2}$, on en déduit que la suite $\Big(S_n - \dfrac{\ln^2(n)}{2}\Big)_{n \geqslant 4}$ converge vers $\dfrac{\ln(3)}{3} + \dfrac{\ln(2)}{2} - \dfrac{\ln^2(3)}{2} - W$. On peut résumer en $S_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{\ln^2(n)}{2} + O(1)$, ou encore, en perdant de l'information à nouveau, en $S_n \underset{+\infty}{=} u_n + o(u_n)$ si $u_n = \dfrac{\ln^2(n)}{2}$. Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{2}$.

26

27 **a.** <u>Existence</u> : la fonction $h_n : x \mapsto (-1)^n 2^{-nx^2}$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ donc elle admet, par exemple, une primitive $g_n : x \mapsto \displaystyle\int_1^x h_n(t)dt$ qui s'annule en 1 par le théorème fondamental de l'intégration. De même, g_n étant continue (elle est même de classe C^1) sur $\mathbb{R}_+^*$, elle admet une primitive qui s'annule en 1, la fonction $a_n : x \mapsto \displaystyle\int_1^x g_n(t)dt$. La fonction g_n étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, a_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $f_n : x \mapsto a_n(x) - a_n(2)(x-1)$ est aussi de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie $f_n(1) = a_n(1) = 0$, $f_n(2) = a_n(2) - a_n(2) = 0$ et $\forall x > 0,\ f_n''(x) = a_n''(x) = g_n'(x) = h_n(x) = (-1)^n 2^{-nx^2}$.

<u>Unicité</u> : Soit $k_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $k_n(1) = k_n(2) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ k_n''(x) = (-1)^n 2^{-nx^2}$, alors la fonction $b_n = f_n - k_n$ est de classe C^2, vérifie $\forall x > 0,\ b_n''(x) = h_n(x) - h_n(x) = 0$ donc elle est affine sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, d'où l'existence de $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ b_n(x) = \alpha_n x + \beta_n$. Mais $b_n(1) = b_n(2) = 0$ donc $\alpha_n + \beta_n = 2\alpha_n + \beta_n = 0$, ce qui prouve que $\alpha_n = \beta_n = 0$, donc que $k_n = f_n$.

b. Soit $[a;b]$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$, on a $||f_n''||_{\infty,[a;b]} = 2^{-nb^2}$ donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n''$ converge normalement donc uniformément sur $[a;b]$ car la série géométrique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (2^{-b^2})^n$ converge puisque $|2^{-b^2}| < 1$.

c. .

d. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $F''(x) = -2^{-x^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}(2^{-x^2})^{n-1} = \frac{-2^{-x^2}}{1+2^{-x^2}} = -\frac{1}{1+2^{x^2}}$.

28 **a.** Notons S la limite de la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$ et que les deux suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, par somme, la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on a la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n} + \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = S + 0 = S$. Ainsi, par le théorème des indices pairs et impairs, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = S$, ce qui montre que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S$.

b. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k\sqrt{k}$. En séparant les indices pairs et impairs, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $T_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{2k}\sqrt{2k} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{2k-1}\sqrt{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{2k} - \sqrt{2k-1}\right)$. Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = \sqrt{2k} - \sqrt{2k-1} > 0$ et soit la fonction $f : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \sqrt{2t} - \sqrt{2t-1}$ qui est dérivable et décroissante sur $[1;+\infty[$ car $\forall t \geqslant 1,\ f'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2t}} - \dfrac{1}{\sqrt{2t-1}} < 0$.

Pour tout $k \geqslant 1$, par croissance de l'intégrale, on a $\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant f(k)$ et $f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)dt$ qu'on peut sommer pour $k \in [\![1;n]\!]$ pour la première et pour $k \in [\![2;n]\!]$ pour la seconde et on obtient $\displaystyle\int_1^{n+1} f(t)dt \leqslant T_{2n}$ et $\displaystyle\int_1^{n} f(t)dt \leqslant T_{2n} - (\sqrt{2}-1)$, d'où l'encadrement $\displaystyle\int_1^{n+1} f(t)dt \leqslant T_{2n} \leqslant \sqrt{2} - 1 + \int_1^{n} f(t)dt$.

Or $\displaystyle\int_1^x f(t)dt = \int_1^x (\sqrt{2t} - \sqrt{2t-1})dt = \left[\frac{1}{3}(2t)^{3/2} - \frac{1}{3}(2t-1)^{3/2}\right]_1^x = \frac{1}{3}\left((2x)^{3/2} - (2x-1)^{3/2}\right) - C$ pour $x \geqslant 1$ avec $C = \dfrac{1}{3}\left(2^{3/2} - 1\right)$. Or $(2x)^{3/2} - (2x-1)^{3/2} = (2x)^{3/2}\left(1 - \left(1 - \dfrac{1}{2x}\right)^{3/2}\right)$ donc, avec les développements limités, $(2x)^{3/2} - (2x-1)^{3/2} \underset{+\infty}{=} (2x)^{3/2}\left(1 - 1 + \dfrac{3}{4x} + O\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{3.2^{3/2}.\sqrt{x}}{4} = \dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{2}}$.

Ainsi, $\displaystyle\int_1^{n+1} f(t)dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$ et $\displaystyle\sqrt{2}-1+\int_1^n f(t)dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$ et, par encadrement, on arrive à $T_{2n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2n}}{2}$. Comme $T_{2n+1} = T_{2n} - \sqrt{2n+1} \underset{+\infty}{=} \dfrac{\sqrt{2n}}{2} - \sqrt{2n}.\sqrt{1+\dfrac{1}{2n}} + o(\sqrt{n})$, on parvient à $T_{2n+1} \underset{+\infty}{=} \dfrac{\sqrt{2n}}{2} - \sqrt{2n}(1+o(1)) + o(\sqrt{n}) \underset{+\infty}{=} -\dfrac{\sqrt{2n}}{2} + o(\sqrt{n}) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{\sqrt{2n}}{2} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{\sqrt{2n+1}}{2}$. Par le théorème des indices pairs et impairs, on a donc $T_n \underset{+\infty}{\sim} (-1)^n \dfrac{\sqrt{n}}{2}$.

29 **a.** Si $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{k\to+\infty}(1-q^k x) = 1$ donc on ne peut pas utiliser le critère de D'ALEMBERT. Traitons deux cas :

- S'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $1-q^k x = 0$, alors $\forall n \geqslant k+1,\ (x,q)_n = 0$ donc la suite $\big((x,q)_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire (elle devient nulle à partir d'un certain rang) donc converge et on a $(x,q)_\infty = 0$.
- Si $\forall k \in \mathbb{N},\ 1-q^k x \neq 0$, comme $\lim\limits_{k\to+\infty} q^k x = 0$, il existe un entier k_0 tel que $\forall k \geqslant k_0,\ 1-q^k x > 0$ (ceci est le cas en particulier si $x \leqslant 0$ avec la valeur $k_0 = 0$ car on a alors $\forall k \geqslant 0,\ 1-q^k x \geqslant 1 > 0$). Pour $n \geqslant k_0+1$, $(x,q)_n = \prod\limits_{k=0}^{n-1}(1-q^k x) = \Big(\prod\limits_{k=0}^{k_0-1}(1-q^k x)\Big) \times \Big(\prod\limits_{k=k_0}^{n-1}(1-q^k x)\Big) = (x,q)_{k_0} \prod\limits_{k=k_0}^{n-1}(1-q^k x)$. Posons $v_n = \prod\limits_{k=k_0}^{n-1}(1-q^k x) > 0$ pour $n \geqslant k_0+1$, alors $\ln(v_n) = \sum\limits_{k=k_0}^{n-1} \ln(1-q^k x)$. Si on pose $w_k = \ln(1-q^k x)$, on a $w_k \underset{+\infty}{\sim} -q^k x$ et $\sum\limits_{k\geqslant k_0} q^k x$ converge absolument car $|q| < 1$ donc $\sum\limits_{k\geqslant k_0} w_k$ converge aussi absolument par comparaison ce qui montre la convergence de la suite de sommes partielles $(u_n)_{n\geqslant k_0+1}$ si $u_n = \sum\limits_{k=k_0}^{n-1} \ln(1-q^k x)$. Par continuité de l'exponentielle, comme $v_n = e^{u_n}$, la suite $(v_n)_{n\geqslant k_0}$ converge donc la suite $\big((x,q)_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel qu'on note $(x,q)_\infty$.

b. On veut à nouveau passer au $\ln$ car on n'a de théorème de continuité que sur les séries de fonctions. Pour $b > 0$, soit $I_b =]-\infty; b]$. Comme avant, il existe un entier $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geqslant k_0,\ 1-q^k b > 0$. Alors, pour $x \in I_b$, on a $\forall k \in \mathbb{N},\ 1-q^k x \geqslant 1 > 0$ si $x \leqslant 0$ et $\forall k \geqslant k_0,\ 1-q^k x \geqslant 1-q^k b > 0$ si $x \in]0; b]$. Ainsi, pour tout $x \in I_b$, en écrivant encore, pour $n \geqslant k_0+1$, $\forall x \in I_b,\ (x,q)_n = (x,q)_{k_0} \prod\limits_{k=k_0}^{n-1}(1-q^k x)$ comme la fonction $h : x \mapsto (x,q)_{k_0}$ est continue sur I_b car elle est polynomiale, il ne reste plus qu'à montrer la continuité de $q : x \mapsto \prod\limits_{k=k_0}^{+\infty}(1-q^k x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=k_0}^{n-1}(1-q^k x)$ sur I_b pour avoir, par produit, la continuité de p sur I_b. Pour $n \geqslant k_0+1$, posons $q_n(x) = \prod\limits_{k=k_0}^{n-1}(1-q^k x)$ et $g_n(x) = \ln(q_n(x)) = \sum\limits_{k=k_0}^{n-1} f_k(x)$ avec $f_k(x) = \ln(1-q^k x)$ pour tout $x \in I_b$. Utilisons maintenant le théorème de continuité des séries de fonctions :

- Toutes les fonctions f_k sont continues sur I_b par opérations.
- Comme f_k n'est pas bornée sur I_b car $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x) = +\infty$, on fixe $a \in]-\infty; b[$ et, par décroissance de f_k sur $[a;b]$, on a $||f_k||_{\infty,[a;b]} = \mathrm{Max}(|f_k(a)|, |f_k(b)|) = \mathrm{Max}(f_k(a), -f_k(b))$. Plus simplement, $||f_k||_{\infty,[a;b]} \leqslant |f_k(a)| + |f_k(b)|$ et les séries $\sum\limits_{n\geqslant k_0} |f_n(a)|$ et $\sum\limits_{n\geqslant k_0} |f_n(b)|$ convergent d'après **a.**, la série $\sum\limits_{n\geqslant k_0} f_n$ convergent normalement sur $[a;b]$ donc sur tout segment de I_b.

Par ce théorème, $g : x \mapsto \sum\limits_{n=k_0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I_b donc $q = e^g$ est continue sur I_b par continuité de $\exp$. Par produit, $p = hq$ est continue sur $I_b =]-\infty; b]$ pour tout réel $b > 0$, donc p est continue sur $\mathbb{R}$.

c. ($\Longrightarrow$) on vient de voir en question **b.** que la fonction p est continue sur $\mathbb{R}$, de plus $p(0) = \lim\limits_{n\to+\infty}(0,q)_n = 1$ car $\forall n \in \mathbb{N},\ (0,q)_n = \prod\limits_{k=0}^{n-1}(1-q^k.0) = 1$. Ensuite, pour tout réel x et tout entier naturel n, on a la relation $(1-x)(qx,q)_n = (1-x)\prod\limits_{k=0}^{n-1}(1-q^k.(qx)) = (1-x)\prod\limits_{k=0}^{n-1}(1-q^{k+1}x) = \prod\limits_{k=0}^{n}(1-q^kx) = (x,q)_{n+1}$ donc, en passant à la limite dans $(1-x)(qx,q)_n = (x,q)_{n+1}$ (elles existent d'après **a.**), on a $(1-x)p(qx) = p(x)$.

($\Longleftarrow$) Réciproquement, soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifie $f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (1-x)f(qx)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = (1-x)f(qx) = (1-x)(1-qx)f(q^2x)$ et, par une récurrence simple, on obtient $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = \Big(\prod\limits_{k=0}^{n-1}(1-q^kx)\Big)f(q^nx)$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} q^nx = 0$ et que f est continue en 0, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(q^nx) = f(0) = 1$ donc, en passant à la limite dans $f(x) = (x,q)_nf(q^nx)$, on a $f(x) = p(x).1 = p(x)$.

Ainsi, p est l'unique fonction continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (1-x)f(qx)$.

30 **a.** D'après l'énoncé, on ne peut aller que vers le nord (N), vers l'est (E) ou vers le sud (S). Après un pas, on ne peut avoir fait que $\mathsf{N}, \mathsf{E}, \mathsf{S}$ donc $u_1 = 3$. Avec les conditions de marche, après deux pas le chemin ne peut qu'être en $\mathsf{NN}, \mathsf{NE}, \mathsf{EN}, \mathsf{EE}, \mathsf{ES}, \mathsf{SE}, \mathsf{SS}$ donc $u_2 = 7$. Et après trois pas, on ne avoir fait que $\mathsf{NNN}, \mathsf{NNE}, \mathsf{NEN}, \mathsf{NEE}, \mathsf{NES}, \mathsf{ENN}, \mathsf{ENE}, \mathsf{EEN}, \mathsf{EEE}, \mathsf{EES}, \mathsf{ESE}, \mathsf{ESS}, \mathsf{SEN}, \mathsf{SEE}, \mathsf{SES}, \mathsf{SSE}, \mathsf{SSS}$ donc $u_3 = 17$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour dénombrer les u_{n+1} chemins possibles, on fait une disjonction de cas selon les premiers pas. Le nombre de chemins possibles jusqu'à l'étape $n+1$ sachant qu'on commence par :

- E est u_n (on peut faire ce qu'on veut après N).
- NE (ou SE) est u_{n-1} (on peut faire ce qu'on veut après NE (ou SE)).
- NNE (ou SSE) est u_{n-2} (on revient “au point de départ” avec deux pas déjà effectués).
- $\mathsf{N}\cdots\mathsf{NE}$ où il y a $k \in [\![3;n]\!]$ fois N (ou $\mathsf{S}\cdots\mathsf{SE}$) est u_{n-k} pour les mêmes raisons (même si $k = n$).
- $\mathsf{N}\cdots\mathsf{N}$ (ou $\mathsf{S}\cdots\mathsf{S}$) toujours vers le nord (ou le sud) est 1.

Ainsi, $\forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} = u_n + 2\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} u_{n-k}\Big) + 2 = u_n + 2\Big(\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k\Big) + 2$. Cette relation est encore vraie pour $n = 0$ car $3 = u_1 = u_0 + 0 + 2 = 1 + 0 + 2$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2\Big(\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k\Big) + 2 = 2\Big(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\Big) + 2 - u_n$.

c. <u>Initialisation</u> : $u_0 = 1 \leqslant 3^0$, $u_1 = 3 \leqslant 3^1$, $u_2 = 7 \leqslant 3^2 = 9$ et $u_3 = 17 \leqslant 3^3 = 27$.

<u>Hérédité</u> : soit un entier $n \geqslant 3$ tel que $\forall k \in [\![1;n]\!],\ u^k \leqslant 3^k$. On a alors $u_{n+1} \leqslant 3^n + 2\Big(\sum\limits_{k=0}^{n-1} 3^k\Big) + 2$ d'où $u_{n+1} \leqslant 3^n + 2.\dfrac{3^n-1}{3-1} + 2 \leqslant 2(3^n+1) \leqslant 3^{n+1}$ car $3^n \geqslant 2$.

Ainsi, par principe de récurrence forte, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 3^n$ donc le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_nx^n$ est supérieur à celui de $\sum\limits_{n\geqslant 0} 3^nx^n$ qui vaut $\dfrac{1}{3}$. Comme $R \geqslant \dfrac{1}{3}$, on a bien $R > 0$. On pouvait dire directement que $u_n \leqslant 3^n$ car à chaque pas, on n'a que trois possibilités, N, E ou S, et il y a n pas.

d. Pour tout $x \in]-\mathrm{Min}(R,1);\mathrm{Min}(R,1)[$, par produit de Cauchy à l'intérieur des intervalles ouverts de convergence, $\dfrac{2}{1-x} \times S(x) = 2\Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n\Big)\Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_nx^n\Big) = 2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\Big)x^n$. Avec la relation de récurrence de la question **b.**, on a la relation $\dfrac{2S(x)}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1} + u_n - 2)x^n$, qu'on peut multiplier par x pour avoir

$\dfrac{2xS(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1}+u_n-2)x^{n+1} = S(x)-1+xS(x)-\dfrac{2x}{1-x}$. Ainsi, $(1-2x-x^2)S(x) = 1+x$ donc, comme $1+x \neq 0$ car $x \in]-\text{Min}(R,1);\text{Min}(R,1)[$, $1-2x+x^2 \neq 0$ donc $S(x) = \dfrac{1+x}{1-2x-x^2}$, si $x \in \left]-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right[$ au moins.

e. Les racines de X^2+2X-1 sont $\alpha = -1+\sqrt{2} > 0$ et $\beta = -1-\sqrt{2} < 0$ qui vérifient $\alpha+\beta = -2$ et $\alpha\beta = -1$. Soit la fonction $f :]-\alpha;-\alpha[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1+x}{1-2x-x^2} = \dfrac{1+x}{(\alpha-x)(x-\beta)}$, comme cette fraction rationnelle est mise sous forme irréductible et qu'elle est de degré strictement négatif, on sait qu'il existe deux réels a et b tels que $f(x) = \dfrac{a}{\alpha-x}+\dfrac{b}{\beta-x}$. On trouve classiquement $a = \dfrac{1+\alpha}{\alpha-\beta} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$ et $b = \dfrac{1+\beta}{\beta-\alpha} = \dfrac{-\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, $\forall x \in]-\alpha;\alpha[$, $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\alpha}\times\dfrac{1}{1-(x/\alpha)}+\dfrac{1}{\beta}\times\dfrac{1}{1-(x/\beta)}\right)$ et, comme $\left|\dfrac{x}{\alpha}\right| < 1$ et $\left|\dfrac{x}{\beta}\right| < 1$ car $\alpha < |\beta|$, on arrive à $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{\alpha^n}+\dfrac{1}{\beta}\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{\beta^n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\alpha^{-n-1}+\beta^{-n-1}}{2}x^n$ puis $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-\beta)^{n+1}+(-\alpha)^{n+1}}{2}x^n$ car $\alpha\beta = -1$ donc $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(1+\sqrt{2})^{n+1}+(1-\sqrt{2})^{n+1}}{2}x^n$. Comme $\alpha > \dfrac{1}{3}$, $\forall x \in \left]-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right[$, $f(x) = S(x)$ donc, par unicité du développement en série entière, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(1+\sqrt{2})^{n+1}+(1-\sqrt{2})^{n+1}}{2}$.

Comme $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{(1+\sqrt{2})^{n+1}}{2} > 0$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{\sim} 1+\sqrt{2}$ donc, par D'ALEMBERT, le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ vaut $R = \dfrac{1}{-\beta} = \alpha = \sqrt{2}-1 \sim 0,41$. De plus, pour calculer la limite de $u_n^{1/n}$, on écrit $u_n^{1/n} = \dfrac{1}{2^{1/n}}\exp\left(\dfrac{\ln\left((1+\sqrt{2})^{n+1}+(1-\sqrt{2})^{n+1}\right)}{n}\right) = \dfrac{1}{2^{1/n}}e^{\frac{n+1}{n}\ln(1+\sqrt{2})}\exp\left(\dfrac{1}{n}\ln\left(1+\dfrac{(1-\sqrt{2})^{n+1}}{(1+\sqrt{2})^{n+1}}\right)\right)$ ce qui montre que $\lim_{n\to+\infty} u_n^{1/n} = e^{\ln(1+\sqrt{2})} = 1+\sqrt{2}$.

C'est le critère de CAUCHY, si cette limite existe, on a $R = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$ (cela ressemble à D'ALEMBERT).

31

32 D'abord, pour $n \in \mathbb{N}$, $|xq^n| \leqslant |x|$ car $|q| \leqslant 1$ donc $1-xq^n > 1-|x| > 0$ ce qui permet la définition de $S_N(x)$ car les dénominateurs $1-xq^n$ ne s'annulent jamais.

a. Comme $\lim_{n\to+\infty} axq^n = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (qui dépend de x) tel que $\forall n \geqslant n_0$, $1-axq^n > 0$. On peut considérer $\ln\left(\dfrac{1-axq^n}{1-xq^n}\right)$ dès que $n \geqslant n_0$ est assez grand. Pour $N \geqslant n_0$, $S_N(x) = S_{n_0}(x)\times\prod_{n=n_0+1}^{N}\dfrac{1-axq^n}{1-xq^n}$ avec $v_N = \prod_{n=n_0+1}^{N}\dfrac{1-axq^n}{1-xq^n} > 0$. Ainsi, $\ln(v_N) = \sum_{n=n_0+1}^{N}\ln\left(\dfrac{1-axq^n}{1-xq^n}\right)$ + équivalents + convergence.

b. On a $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $S_N(0) = 1$ donc, en passant à la limite quand N tend vers $+\infty$, $S(0) = 0$. De plus, $\forall x \in]-1;1[$, $(1-ax)S_N(qx) = (1-ax)\prod_{n=0}^{N}\dfrac{1-axq^{n+1}}{1-xq^{n+1}} = (1-x)\times\dfrac{1-ax}{1-x}\times\prod_{m=1}^{N+1}\dfrac{1-axq^m}{1-xq^m}$ donc $(1-ax)S_N(qx) = (1-x)\times\prod_{n=0}^{N+1}\dfrac{1-axq^n}{1-xq^n} = (1-x)S_{N+1}(x)$. En passant à la limite quand N tend vers $+\infty$, on obtient $(1-ax)S(qx) = (1-x)S(x)$.

c. <u>Analyse</u> : supposons qu'il existe $r \in]0;1[$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $\forall x \in]-r;r[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Avec l'équation fonctionnelle de la question précédente, on a $S(x)-xS(x) = S(qx)-axS(qx)$, ce qui donne $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a a_{n-1} q^{n-1} x^n$. Par unicité des coefficients, pour tout entier

$n \in \mathbb{N}^*$, on a $(1-q^n)a_n = (1-aq^{n-1})a_{n-1}$ ou $a_n = \dfrac{1-aq^{n-1}}{1-q^n}a_{n-1}$. Comme $a_0 = S(0) = 1$, on en déduit par une récurrence simple que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1-aq^{k-1}}{1-q^k}$ etc....

33 **a.** On a $u_1 > 0$ et, si $u_n > 0$ pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, alors $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{\sqrt{n}} > 0$. Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0$. On peut donc considérer, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\ln(u_{k+1}) = \ln\left(\dfrac{u_k^2}{\sqrt{k}}\right) = 2\ln(u_k) - \dfrac{\ln(k)}{2}$. On a donc $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ 4\dfrac{\ln(u_{k+1})}{2^{k+1}} - 4\dfrac{\ln(u_k)}{2^k} = -\dfrac{\ln(k)}{2^k}$. Par télescopage, on obtient donc $S_{n-1}\dfrac{\ln(u_n)}{2^n} - \dfrac{\ln(u_1)}{2}$.

b. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge car $\dfrac{\ln(k)}{2^k} \underset{+\infty}{=} O(1/(3/2)^k)$.

34

35 **a.** Posons $u_n = H_n - \ln(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\forall n \geqslant 2,\ u_n - u_{n-1} = \dfrac{1}{n} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ donc, avec les développements limités, $u_n - u_{n-1} \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc, par comparaison, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2}(u_n - u_{n-1})$ converge. Par dualité suite-série, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Si on note γ sa limite, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(H_n - \ln(n)) = \gamma$, ce qui s'écrit aussi $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

b. D'après **a.**, $H_{2n} - H_n \underset{+\infty}{=} \ln(2n) + \gamma - \ln(n) - \gamma + o(1)$ donc $H_{2n} - H_n \underset{+\infty}{=} \ln(2) + o(1)$ et on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(H_{2n} - H_n) = \ln(2)$. On pouvait aussi, comme $H_{2n} - H_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k} = \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{1}{n+j}$ en posant $k = n+j$, obtenir cette limite avec les sommes de Riemann. En effet, $H_{2n} - H_n = \dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)$ en posant $a = 0$, $b = 1$ et $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ qui est continue sr le segment $[0;1]$. Par théorème, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(H_{2n} - H_n) = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$ avec la même conclusion.

c. La fraction rationnelle $\dfrac{1}{2X^3 + 3X^2 + X}$ est de degré -3, est écrite sous forme irréductible, et admet 0, -1 et $\dfrac{1}{2}$ comme pôles simples car $2X^3 + 3X^2 + X = 2X\left(X^2 + \frac{3}{2}X + \frac{1}{2}\right) = 2X(X+1)\left(X - \frac{1}{2}\right)$. En écrivant donc $\dfrac{1}{2X^3+3X^2+X} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X+1} + \dfrac{c}{2X+1}$, on obtient $a = 1$, $b = 1$ et $c = -4$ par des méthodes usuelles ou par identification, de sorte que $\dfrac{1}{2X^3+3X^2+X} = \dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{X+1} - \dfrac{4}{2X+1}$.

d. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{a_n}$ converge par critère de Riemann car $\forall n \in \mathbb{N}^*\ a_n \neq 0$ et que l'on a la formule classique $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ donc $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^3}{3}$ et $\dfrac{1}{a_n} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$. Si on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k}$, d'après **c.**, il vient $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{6}{k} + \dfrac{6}{k+1} - \dfrac{24}{2k+1}\right) = 6H_n + 6\left(H_n + \dfrac{1}{n+1} - 1\right) - 24\left(-1 + \sum\limits_{k=1}^{2n+1}\dfrac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2k}\right)$, donc $S_n = 6H_n + 6\left(H_n + \dfrac{1}{n+1} - 1\right) - 24\left(-1 + H_{2n} + \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{H_n}{2}\right) = 18 - 24(H_{2n} - H_n) + \dfrac{6}{n+1} - \dfrac{24}{2n+1}$.
En passant à la limite avec **b.**, on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 18 - 24\ln(2) \sim 1,36$.

36 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{\pi}{2n^2}$ donc, par comparaison et critère de Riemann, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge pour tout réel x. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et f est définie sur $D = \mathbb{R}$.

b. La majoration précédente montre même que f_n est bornée sur $\mathbb{R}$ et que $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} \leqslant \dfrac{\pi}{2n^2}$ (on a même égalité car $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \dfrac{\pi}{2n^2}$) et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\pi}{2n^2}$ converge donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Comme toutes les f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, par théorème, la fonction somme S est aussi continue sur $\mathbb{R}$.

37 **a.** Initialisation : pour $n = 2$, comme $a_2 = a_1 + a_0 = 1$, on a bien $(2-2)! = 0! = 1 \leqslant a_2 \leqslant 2! = 2$. Mais on a aussi $a_3 = 2(a_2 + a_1) = 2$ et $(3-2)! = 1 \leqslant a_3 \leqslant 6 = 3!$.

Hérédité : Soit $n \geqslant 2$ tel que $(n-2)! \leqslant a_n \leqslant n!$ et $(n-1)! \leqslant a_{n+1} \leqslant (n+1)!$, alors $a_{n+2} = (n+1)(a_{n+1}+a_n)$ donc $(n+1)((n-1)!+(n-2)!) \leqslant a_{n+2} \leqslant (n+1)((n+1)!+n!)$, qui se factorise, comme $(n-1)! = (n-1)(n-2)!$ et $(n+1)! = (n+1)n!$, en $(n-2)!n(n+1) \leqslant a_{n+2} \leqslant (n+2)!$ et on a bien $n! \leqslant a_{n+2} \leqslant (n+2)!$ car $(n-2)!n(n+1) \geqslant n!$ puisque $n+1 \geqslant n-1$.

Conclusion : par principe de récurrence double on a $\forall n \geqslant 2,\ (n-2)! \leqslant a_n \leqslant n!$.

b. Comme $\forall n \geqslant 2,\ 0 \leqslant \dfrac{(n-2)!}{n!} = \dfrac{1}{n(n-1)} \leqslant \dfrac{a_n}{n!} \leqslant 1 = \dfrac{n!}{n!}$, on sait d'après le cours que le rayon de convergence R est compris entre celui des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{x^n}{n(n-1)}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 2} x^n$. Comme ces deux rayons valent 1 car $(x^n)_{n\geqslant 2}$ et $\left(\dfrac{x^n}{n(n-1)}\right)_{n\geqslant 2}$ sont bornées si et seulement si $|x| \leqslant 1$, on en déduit que $R = 1$.

c. On peut dériver terme à terme la fonction somme d'une série entière dans l'intervalle ouvert de convergence donc $\forall x \in]-1;1[,\ S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_n x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_{n+1}x^n}{n!}$. Ainsi, en n'écrivant que des termes en x^n, on trouve

$$(1-x)S'(x) - xS(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{n+1}x^n}{n!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}x^n}{(n-1)!} = a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+1} - n(a_n + a_{n-1})}{n!} x^n = 0$$

car $a_1 = 0$ et avec la relation de récurrence définissant la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

d. S est donc solution de (E) : $y' - \dfrac{x}{1-x}y = 0$ sur $]-1;1[$. En posant $a : x \mapsto \dfrac{x}{1-x} = -1 + \dfrac{1}{1-x}$, une primitive de a sur $]-1;1[$ est $A : x \mapsto -x - \ln(1-x)$, les solutions de (E) sur $]-1;1[$ sont les fonctions $y : x \mapsto \lambda e^{-x-\ln(1-x)} = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$. Comme $S(0) = a_0 = 1$, on a $\forall x \in]-1;1[,\ S(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x} = e^{-x} \times \dfrac{1}{1-x}$. On sait que $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{n!}$ et $\forall x \in]-1;1[,\ \dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$. Par produit de Cauchy de séries entières, on en déduit que $\forall x \in]-1;1[,\ S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}\right)x^n$. Par unicité du développement en série entière (comme $R > 0$), on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{a_n}{n!} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$ donc $a_n = n! \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$.

On reconnaît en a_n l'expression du nombre de dérangements de $[\![1;n]\!]$. Posons donc $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des dérangements de $[\![1;n]\!]$ et $a_n = \operatorname{card}(\mathcal{D}_n)$ et expliquons d'où vient la relation de récurrence de l'énoncé. D'abord, $a_0 = 1$ est conventionnel et $a_1 = 0$ car $\mathcal{D}_1 = \emptyset$. De plus, si $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}_{n+2} = \mathcal{D}_{n+2}^0 \sqcup \mathcal{D}_{n+2}^1$ avec $\mathcal{D}_{n+2}^0$ qui contient les dérangements σ de $[\![1;n+2]\!]$ tel que $\sigma(n+2) = k$ et $\sigma(k) = n+2$ et $\mathcal{D}_{n+2}^1$ contient les dérangements σ de $[\![1;n+2]\!]$ tels que $\sigma(n+2) = k$ et $\sigma(k) \neq n+2$.

- Pour choisir un dérangement de $\mathcal{D}_{n+2}^0$, il faut d'abord choisir $k \in [\![1;n+1]\!]$, cela fait $n+1$ choix, et ensuite σ induit un dérangement de $[\![1;n+1]\!] \setminus \{k\}$ qui est de cardinal n donc il a a_n choix pour les images par σ des éléments de $[\![1;n+1]\!] \setminus \{k\}$. Ainsi, $\operatorname{card}(\mathcal{D}_{n+2}^0) = (n+1)a_n$.

• Pour choisir un dérangement de $\mathcal{D}^1_{n+2}$, il faut d'abord choisir $k \in [\![1;n+1]\!]$, cela fait $n+1$ choix. En posant τ la transposition qui échange k et $n+2$, on vérifie que la permutation $\tau \circ_s$ est un dérangement de $[\![1;n+1]\!]$. Réciproquement, pour un dérangement σ' de $[\![1;n+1]\!]$, la permutation $\sigma = \tau^{-1} \circ \sigma' = \tau \circ \sigma'$ appartient à $\mathcal{D}^1_{n+2}$. Ainsi, $\text{card}\,(\mathcal{D}^1_{n+2}) = (n+1)\text{card}\,(\mathcal{D}_{n+1}) = (n+1)a_{n+1}$.

Ainsi, $\text{card}\,(\mathcal{D}_{n+2}) = a_{n+2} = (n+1)a_n + (n+1)a_{n+1} = (n+1)(a_{n+1} + a_n) = \text{card}\,(\mathcal{D}^0_{n+2}) + \text{card}\,(\mathcal{D}^1_{n+2})$.

38

39 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$. Traitons trois cas :

• Si $x = 0$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et, comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est alternée, que la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge par le critère spécial des séries alternées.

• Si $x > 0$, $|u_n| = \dfrac{e^{-nx}}{n} \underset{+\infty}{=} o((e^{-x})^n)$ et la série géométrique $\sum\limits_{n \geqslant 1} (e^{-x})^n$ converge car $|e^{-x}| < 1$ donc, par comparaison, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge absolument donc converge.

• Si $x < 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n| = +\infty$ donc $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ diverge grossièrement.

Ainsi, le domaine de définition D de S est $D = \mathbb{R}_+$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

(H_1) la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ d'après **a.**.

(H_2) les fonctions f_n sont toutes continues sur $\mathbb{R}_+$ par opérations.

(H_3) Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, comme $(|f_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0, par le critère spécial des séries alternées, si $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$, on a $|R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| = \dfrac{e^{-(n+1)x}}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Ainsi, R_n est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et $||R_n||_{\infty, \mathbb{R}_+} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ donc $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ par encadrement car $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$.

Ainsi, par le théorème de continuité des séries de fonctions, S est continue sur $\mathbb{R}_+$.

c. S est continue sur $[0; +\infty[$ et, comme la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n(x)$ converge par le critère spécial des séries alternées car la suite $(|f_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0 pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on sait majorer le reste et avoir, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $|S(x)| = |R_0(x)| \leqslant |f_1(x)| = e^{-x}$. Comme $S(x) \underset{+\infty}{=} O(e^{-x})$, par comparaison à une intégrale de référence, S est intégrable en $+\infty$.

d. Utilisons cette fois-ci le théorème de dérivation des séries de fonctions :

(H_1) la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}_+$.

(H_2) les fonctions f_n sont toutes de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations et $f'_n(x) = (-1)^{n+1} e^{-nx}$.

(H_3) pour $a > 0$, $x \in [a; +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $|f'_n(x)| = e^{-nx} \leqslant e^{-na} = (e^{-a})^n = |f'_n(a)|$. Ainsi, $||f'_n||_{\infty [a;+\infty[} = (e^{-a})^n$ et, comme la série géométrique $\sum\limits_{n \geqslant 1} (e^{-a})^n$ converge, $\sum\limits_{n \geqslant 1} f'_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ on peut remplacer $[a; +\infty[$ par $[a; b]$ sans rien changer.

Par ce théorème, la fonction S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

e. Pour $x > 0$, on a $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} e^{-nx} = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ car $|e^{-x}| < 1$. Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle et que $x \mapsto -\ln(1+e^{-x})$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0,\ S(x) = C - \ln(1+e^{-x})$.
Par convergence uniforme de $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$, comme $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0 = \ell_n$, le théorème de la double limite permet de conclure que $\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 0$. Ainsi, comme $\lim_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$, on conclut que $C = 0$ donc que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ S(x) = -\ln(1+e^{-x})$. Mais comme S et $x \mapsto -\ln(1+e^{-x})$ sont continues en 0 d'après **b.**, on a donc $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ S(x) = -\ln(1+e^{-x})$. C'était direct avec les séries entières car on sait que $\forall u \in]-1;1[,\ \ln(1+u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}u^n}{n}$. Restait à prolonger en 0.

f. Utilisons le théorème d'intégration terme à terme.

- (H_1) la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ d'après **a.**.
- (H_2) les fonctions f_n sont toutes continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+$ car $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x) \underset{+\infty}{=} O(e^{-x})$.
- (H_3) la fonction S est continue sur $\mathbb{R}_+$ d'après **b.**.
- (H_4) pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} |f_n(x)|dx = \dfrac{1}{n}\Big[-\dfrac{e^{-nx}}{n}\Big]_0^{+\infty} = \dfrac{1}{n^2}$ et la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge.

Ainsi, S est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (on le savait déjà) et $\int_0^{+\infty} S(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$. Posons $T_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\dfrac{(-1)^{k+1}}{k^2} \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{k^2}\Big)$, par comparaison, la série $\sum_{k\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ converge donc la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $T_{2n} = S_{2n} - 2\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(2k)^2} S_{2n} - \dfrac{S_n}{2}$ donc $\lim_{n\to+\infty} T_n = \lim_{n\to+\infty} T_{2n} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\pi^2}{6} = \dfrac{\pi^2}{12}$. Ainsi, $\int_0^{+\infty} S(x)dx = -\dfrac{\pi^2}{12}$.

40 **a.** Pour $x = 0$, $f_n(0) = 0$ donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n(0)$ converge. Si $x \neq 0$, on a $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n^2}$ donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge absolument donc converge par comparaison aux séries de Riemann. Par conséquent, le domaine de définition de f est $D = \mathbb{R}$ et la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$. De plus, comme toutes les fonctions f_n sont impaires, on en déduit que f est aussi impaire.
b. Soit $a > 0$, alors $\forall x \in [-a;a],\ |f_n(x)| \leqslant \dfrac{a}{0^2+n^2}$ donc $||f_n||_{\infty,[-a;a]} \leqslant \dfrac{a}{n^2}$. Comme $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge par Riemann, $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement vers f sur $[-a;a]$. Comme toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, par le théorème de continuité des séries de fonctions, f est continue sur $\mathbb{R}$.
c. Par contre, $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} \geqslant f_n(n) = \dfrac{1}{2n}$ donc $\sum_{n\geqslant 1} ||f_n||_{\infty,\mathbb{R}}$ diverge par comparaison à la série harmonique et il n'y a pas converge normale de $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$. Bien sûr, une étude de fonction faisait le travail, en effet $f_n'(x) = \dfrac{n^2-x^2}{(x^2+n^2)^2}$ donc f_n atteint son maximum en valeur absolue en $\pm n$ d'où $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} = f_n(n)$.
d. On effectue une comparaison série/intégrale, en posant, pour $x > 0$ fixé, la fonction $\varphi_x : t \mapsto \dfrac{x}{x^2+t^2}$. φ_x est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \int_k^{k+1} \varphi_x(t)dt \leqslant \varphi_x(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} \varphi_x(t)dt$. On somme ces inégalités : $\int_1^{+\infty} \varphi_x(t)dt \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \varphi_x(t)dt \iff \Big[\mathrm{Arctan}\Big(\dfrac{t}{x}\Big)\Big]_1^{+\infty} \leqslant f(x) \leqslant \Big[\mathrm{Arctan}\Big(\dfrac{t}{x}\Big)\Big]_0^{+\infty}$ (tout

converge). Ainsi, on a $\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant f(x) \leqslant \frac{\pi}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ par encadrement.

e. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ pour tout entier n, si on avait convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de la double limite, on aurait $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\big(\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)\big) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$, on n'a pas convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ vers f sur $\mathbb{R}$ (ni sur tout intervalle de la forme $[a; +\infty[$).

f. On doit trouver $f(x) - \frac{\pi}{2} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2x}$.

(41) **a.** $\forall n \in \mathbb{N},\ g_n(0) = 0$ et $\forall x \neq 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-nx^2} = 0$ et $\big(\mathrm{Arctan}(nx^2)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = 0$. Ainsi, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle $g = 0$.

b. $\forall x \geqslant a,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |g_n(x) - g(x)| = |g_n(x)| \leqslant \frac{e^{-na^2}\pi}{2}$ donc $||g_n - g||_{\infty,[a;+\infty[} \leqslant \frac{e^{-na^2}\pi}{2}$ ce qui montre par encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} ||g_n - g||_{\infty,[a;+\infty[} = 0$. Ainsi, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur $[a; +\infty[$.

c. D'abord, $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |g_n(x)| \leqslant \frac{\pi}{2}$ donc $g_n - g$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et on peut définir $||g_n - g||_{\infty,\mathbb{R}}$.

<u>Méthode 1</u> : comme $g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = e^{-1}\,\mathrm{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4e}$, on a $||g_n - g||_{\infty,\mathbb{R}} \geqslant \frac{\pi}{4e}$ donc la suite $\big(||g_n - g||_{\infty,\mathbb{R}}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, ce qui montre que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers g sur $\mathbb{R}$.

<u>Méthode 2</u> : pour $n \in \mathbb{N}$, g_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ g_n'(x) = -2nxe^{-nx^2}\,\mathrm{Arctan}(nx^2) + \frac{2nxe^{-nx^2}}{1 + n^2x^4}$ donc $g_n'(x) = 2nxe^{-nx^2}\left(\frac{1}{1+n^2x^4} - \mathrm{Arctan}(nx^2)\right) = 2nxe^{-nx^2}h(nx^2)$ en posant $h : t \mapsto \frac{1}{1+t^2} - \mathrm{Arctan}(t)$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ h'(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^2} - \frac{1}{1+t^2} < 0$ donc h est strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$. Comme $h(0) = 1 > 0$ et $\ll_{t\to+\infty} h(t) = -\frac{\pi}{2} < 0$, d'après le théorème de la bijection, h réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}; 1\right]$ donc il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $h(\alpha) = 0$ ($\alpha \sim 0,747$). D'après ce qui précède, g_n est donc paire, positive, strictement croissante sur $\left[0; \sqrt{\frac{\alpha}{n}}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\sqrt{\frac{\alpha}{n}}; +\infty\right[$. Ainsi, $||g_n - g||_{\infty,\mathbb{R}} = \left|g_n\left(\sqrt{\frac{\alpha}{n}}\right)\right| = e^{-\alpha}\,\mathrm{Arctan}(\alpha) > 0$ donc $\big(||g_n - g||_{\infty,\mathbb{R}}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers g sur $\mathbb{R}$.

(42) **a.** Soit $x \in [0; 1]$, distinguons deux cas :

- si $x = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(0) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.
- si $x \in]0; 1]$, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{nx}{nx+1} = 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = (x^2 + a)e^{-x}$.

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0; 1]$ vers $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in]0; 1],\ f(x) = (x^2 + a)e^{-x}$.

b. • Si $a \neq 0$, la fonction f n'est pas continue en 0 car $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = a \neq f(0)$ donc, comme toutes les fonctions f_n sont continues sur $[0; 1]$, on n'a pas convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur $[0; 1]$.

• Si $a = 0$, $\forall x \in [0; 1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(x) - f(x)| = \frac{x^2e^{-x}}{nx+1} \leqslant \frac{x^2}{nx+1} = g_n(x)$. Or g_n est dérivable sur $[0; 1]$ et $\forall x \in [0; 1],\ g_n'(x) = \frac{x(nx+2)}{(nx+1)^2} \geqslant 0$. Ainsi, g_n est croissante sur $[0; 1]$ donc maximale sur $[0; 1]$ en 1 avec $g_n(1) = \frac{1}{n+1}$. On en déduit que $\forall x \in [0; 1],\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}$ donc $f_n - f$ est bornée et $||f_n - f||_{\infty,[0;1]} \leqslant \frac{1}{n+1}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, il y a convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur $[0; 1]$.

c. On majore, $\forall x \in [R;1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x) - f(x)| = \dfrac{x^2 e^{-x}}{nx+1} \leqslant \dfrac{1}{nx+1} \leqslant \dfrac{1}{nR+1}$. Par conséquent, $f_n - f$ est bornée sur $[R;1]$ et $||f_n - f||_{\infty,[R;1]} \leqslant \dfrac{1}{nR+1}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{nR+1} = 0$, n en déduit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[R;1]$ si $0 < R < 1$.

43 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{P}_n =$ "$0 \leqslant u_{n+2} \leqslant 2^{n+2},\ 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2^{n+1},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 2^n$".

Initialisation : $0 \leqslant u_2 = 3 \leqslant 4 = 2^2$, $0 \leqslant u_1 = 2 \leqslant 2 = 2^1$ et $0 \leqslant u_0 = 0 \leqslant 1 = 2^0$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie, on a déjà $0 \leqslant u_{n+2} \leqslant 2^{n+2}$, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2^{n+1}$. De plus, $0 = 0 + 0 \leqslant u_{n+3} = u_{n+1} + u_n \leqslant 2^{n+1} + 2^n = 3.2^n \leqslant 2^{n+3}$ car $3 \leqslant 8$. Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Par principe de récurrence, on a bien $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2^n$.

b. Pour $x \in \mathbb{R}$, d'après **a.**, $|u_n x^n| \leqslant |2x|^n$ donc $(u_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si $|x| \leqslant \dfrac{1}{2}$ ce qui prouve, par définition du rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$, que $R \geqslant \dfrac{1}{2}$. On a donc bien $R > 0$.

c. Pour $x \in]-R;R[$, on a $x^3 f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+3} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (u_{n+3} - u_{n+1}) x^{n+3}$ ce qui s'écrit aussi, en rajoutant les termes manquants $x^3 f(x) = \big[f(x) - u_0 - u_1 x - u_2 x^2\big] - x^2\big[f(x) - u_0\big]$ ou encore $(1 - x^2 - x^3) f(x) = 2x + 3x^2$. Si on avait $1 - x^2 - x^3 = 0$, alors on aurait aussi $2x + 3x^2 = 0$ donc $x = 0$ ou $x = -\dfrac{2}{3}$. Or ni 0, ni $-\dfrac{2}{3}$ ne sont racines du polynôme $P = X^3 + X^2 - 1$ car $P(0) = -1 \neq 0$ et $P\Big(-\dfrac{2}{3}\Big) = -\dfrac{8}{27} + \dfrac{4}{9} - 1 = \dfrac{-8+12-27}{27} = -\dfrac{23}{27} \neq 0$. Ainsi, $\forall x \in]-R;R[$, $1 - x^2 - x^3 \neq 0$ donc $f(x) = \dfrac{2x + 3x^2}{1 - x^2 - x^3}$.

d. Le polynôme P admet trois racines complexes r_1, r_2, r_3 d'après le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS. La fonction polynomiale P vérifie $P'(x) = 3x^2 + 2x = x(3x+2)$ donc P est strictement croissante sur $\Big]-\infty;-\dfrac{2}{3}\Big]$, strictement croissante sur $\Big[-\dfrac{2}{3};0\Big]$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $P\Big(-\dfrac{2}{3}\Big) = -\dfrac{23}{27} < 0$ et $P(0) = -1 < 0$, P ne s'annule qu'une seule fois sur $\mathbb{R}$ en un réel $\alpha \in]0;1[$ ($\alpha \sim 0,755$) car $P(1) = 1 > 0$. Prenons $r_1 = \alpha$, les deux autres racines de P sont donc complexes conjuguées car P est un polynôme à coefficients réels, donc $r_3 = \overline{r_2}$. Comme $r_1 r_2 \overline{r_2} = 1$ avec les relations coefficients-racines, on a $|r_2|^2 = \dfrac{1}{r_1} > 1$ donc $|r_2| > |r_1| = r_1$. P est donc scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ et $P = (X - r_1)(X - r_2)(X - \overline{r_2})$.

D'après la question **c.**, $\forall x \in]-R;R[$, $P(x) \neq 0$ donc $r_1 \notin]-R;R[$ ce qui prouve que $R \leqslant r_1$.

En posant $A = 2X + 3X^2$, la fraction rationnelle $F = -\dfrac{A}{P} = \dfrac{2X + 3X^2}{1 - X^2 - X^3}$ est mise sous forme irréductible car les racines de A, 0 et $-\dfrac{2}{3}$, ne sont pas racines de P. F est de degré -1 strictement négatif et n'a que des pôles simples donc on sait qu'il existe des constantes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ telles que $F = \dfrac{\alpha_1}{X - r_1} + \dfrac{\alpha_2}{X - r_2} + \dfrac{\alpha_3}{X - r_3}$ (il n'y a pas de partie entière). On sait d'après le cours que $\alpha_i = -\dfrac{A(r_i)}{P'(r_i)}$ donc, comme $A = P'$, on a $\alpha_i = -1$. Par conséquent, $F = \dfrac{1}{r_1 - X} + \dfrac{1}{r_2 - X} + \dfrac{1}{r_3 - X} = \dfrac{1}{r_1}.\dfrac{1}{1 - (X/r_1)} + \dfrac{1}{r_2}.\dfrac{1}{1 - (X/r_2)} + \dfrac{1}{\overline{r_2}}.\dfrac{1}{1 - (X/\overline{r_2})}$.

Soit $x \in]-r_1;r_1[$, comme $\left|\dfrac{x}{r_1}\right| < 1$, $\left|\dfrac{x}{r_2}\right| < 1$ et $\left|\dfrac{x}{\overline{r_2}}\right| < 1$, on a $\dfrac{1}{1 - \dfrac{x}{r_1}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{r_1^n}$, $\dfrac{1}{1 - \dfrac{x}{r_2}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{r_2^n}$ et $\dfrac{1}{1 - \dfrac{x}{\overline{r_2}}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{\overline{r_2}^n}$ donc $\dfrac{2x + 3x^2}{1 - x^2 - x^3} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \Big(\dfrac{1}{r_1^{n+1}} + \dfrac{1}{r_2^{n+1}} + \dfrac{1}{\overline{r_2}^{n+1}}\Big) x^n$. Par unicité des coefficients d'une série entière sur $]-R;R[$, on a $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\dfrac{1}{r_1^{n+1}}+\dfrac{1}{r_2^{n+1}}+\dfrac{1}{\overline{r_2}^{n+1}}$ donc $u_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{r_1^{n+1}}$ et, par D'ALEMBERT, $R=r_1$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{1}{r_1}$. C'est général, le rayon du convergence d'une fraction rationnelle qui n'admet pas 0 comme pôle est le plus petit module de ses racines.

44 **a.** Pour $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$, posons $u_n=\dfrac{e^{-nx}}{n}$. Traitons trois cas :

- Si $x=0$, $u_n=\dfrac{1}{n}$ et la série harmonique de RIEMANN $\sum\limits_{n\geqslant1}\dfrac{1}{n}$ diverge.
- Si $x>0$, $u_n=\dfrac{e^{-nx}}{n}\underset{+\infty}{=}o((e^{-x})^n)$ et la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant1}(e^{-x})^n$ converge car $|e^{-x}|<1$ donc, par comparaison, la série à termes positifs $\sum\limits_{n\geqslant1}u_n$ converge aussi.
- Si $x<0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ donc $\sum\limits_{n\geqslant1}u_n$ diverge grossièrement.

Ainsi, le domaine de définition D de S est $D=\mathbb{R}_+^*$.

b. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit $f_n:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ définie par $f_n(x)=\dfrac{e^{-nx}}{n}$.

Limite en $+\infty$:

(H_1) la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant1}f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ d'après **a.**.

(H_2) les fonctions f_n admettent des limites finies en $+\infty$ qui sont $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)=0=\ell_n$.

(H_3) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a $||f_n||_{\infty,[1;+\infty[}=|f_n(1)|=\dfrac{e^{-n}}{n}\underset{+\infty}{=}o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ par croissances comparées donc, comme la série de RIEMANN $\sum\limits_{n\geqslant1}\dfrac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum\limits_{n\geqslant1}f_n$ converge normalement sur $[1;+\infty[$.

Ainsi, par le théorème de double limite, $\lim\limits_{x\to+\infty}S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ell_n=0$.

Limite en 0^+ : pour $n\in\mathbb{N}^*$, en notant $S_n:x\mapsto\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{e^{-kx}}{k}$, on a $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ 0\leqslant S_n(x)\leqslant S(x)$ car on ne somme que des quantités positives. Comme toutes les f_n sont décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$, S est aussi décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par le théorème de la limite monotone, S admet une limite ℓ, finie ou $+\infty$, en 0^+. En passant à la limite quand x tend vers 0^+ dans l'inégalité $0\leqslant S_n(x)\leqslant S(x)$, on obtient $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}=H_n\leqslant\ell$ (valable même si $\ell=+\infty$). Or on sait que la série harmonique diverge donc que $\lim\limits_{n\to+\infty}H_n=+\infty$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, on a $\ell=+\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to0^+}S(x)=+\infty$.

c. Pour $x\in\mathbb{R}_+^*$, comme $|e^{-x}|<1$ et que $\forall t\in]-1;1[,\ \ln(1-t)=-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{t^n}{n}$, on a $S(x)=-\ln(1-e^{-x})$.

d. Utilisons le théorème d'intégration terme à terme.

(H_1) la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant1}f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après **a.**.

(H_2) les fonctions f_n sont toutes continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ f_n(x)\underset{+\infty}{=}O(e^{-x})$ et f_n se prolonge par continuité en 0 en posant $f_n(0)=\dfrac{1}{n}$.

(H_3) la fonction S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ car toutes les fonctions f_n le sont et que, comme en **c.**, on a convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant1}f_n$ sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

(H_4) pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}|f_n(x)|dx=\frac{1}{n}\Big[-\frac{e^{-nx}}{n}\Big]_0^{+\infty}=\frac{1}{n^2}$ et la série de RIEMANN $\sum\limits_{n\geqslant1}\dfrac{1}{n^2}$ converge.

Ainsi, $\int_0^{+\infty} S(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

45 **a.** • Pour $s = 0$, on sait d'après le cours que la série entière géométrique $\sum_{n\geqslant 1} x^n$ est de rayon 1 avec divergence grossière pour $x = \pm 1$ donc le domaine de définition de $x \mapsto f_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ est $]-1;1[$.

• Pour $s = 1$, on sait d'après le cours que la série entière logarithme $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ est de rayon 1 (c'est la primitive formelle de la précédente) avec divergence pour $x = 1$ (série harmonique) et convergence pour $x = -1$ par le critère spécial des séries alternées car $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0. Ainsi, le domaine de définition de $x \mapsto f_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ est $[-1;1[$.

De plus, on sait que $\forall x \in]-1;1[,\ f_0(x) = x\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \frac{x}{1-x}$ et $\forall x \in]-1;1[,\ f_1(x) = -\ln(1-x)$.

b. Posons $u_n = \frac{1}{n^s} > 0$ pour $n \geqslant 1$. On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^s = 1 = L$ donc, d'après le cours, le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^s}$ vaut $R_s = \frac{1}{L} = 1$.

c. Comme $R_s = 1$, le domaine de définition de f_s vérifie la double inclusion $]-1;1[\subset I_s \subset [-1;1]$ d'après le cours sur les séries entières. Traitons trois cas :

Si $s > 1$, d'après le critère des séries de RIEMANN, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s}$ converge donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^s}$ converge absolument pour $x = \pm 1$. Ainsi, $I_s = [-1;1]$.

Si $s \in]0;1]$, parRIEMANN, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s}$ diverge mais $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^s}$ converge par le critère spécial des séries alternées car $\left(\frac{1}{n^s}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0. Ainsi, $I_s = [-1;1[$.

Si $s \leqslant 0$, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^s}$ divergent grossièrement. Ainsi, $I_s =]-1;1[$.

d. Pour $x \in]-1;1[$, on est dans l'intervalle ouvert de convergence donc on peut dériver terme à terme et avoir $f_s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{x^{n-1}}{n^s}$. On a donc $xf_s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^{s-1}} = f_{s-1}(x)$.

e. Pour $x \in]-1;1[$, on a $f_{-1}(x) = xf_0'(x)$ d'après **d.** et $f_0(x) = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 1$ d'après **a.** donc $f_{-1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$. De même, $f_{-2}(x) = xf_{-1}'(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$.

f. .

46 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$ et par croissances comparées, la suite $\left(\frac{2x^n}{n^2-1}\right)_{n\geqslant 2}$ est bornée si et seulement si $|x| \leqslant 1$ donc $R = 1$. Par RIEMANN, si $x = \pm 1$, $\frac{2x^n}{n^2-1} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum_{n\geqslant 2} \frac{2}{n^2-1}$ et $\sum_{n\geqslant 2} \frac{2(-1)^n}{n^2-1}$ convergent absolument. Ainsi, le domaine de définition D de S est $[-1;1]$.

b. Si $x \in]-1;1[\setminus\{0\}$, comme $\frac{2}{n^2-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$, on a $S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$ (les deux séries convergent) donc $S(x) = x\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} - \frac{1}{x}\left(-x - \frac{x^2}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = -x\ln(1-x) + 1 + \frac{x}{2} + \frac{\ln(1-x)}{x}$.

c. En définissant, pour tout entier $n \geqslant 2$, $u_n : [-1;1] \to \mathbb{R}$ par $u_n(x) = \frac{2x^n}{n^2-1}$, on a $||u_n||_{\infty,[-1;1]} = \frac{2}{n^2-1}$

et $\sum_{n\geqslant 2} \frac{2}{n^2-1}$ converge donc $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge normalement sur $[-1;1]$. Comme toutes les u_n sont continues sur $[-1;1]$, S est continue sur $[-1;1]$ donc $S(1) = \lim_{x\to 1^-} S(x)$ et $S(-1) = \lim_{x\to -1^+} S(x)$.

d. Calcul de $S(1)$: pour $x \in]-1;1[$, $S(x) = \frac{(1-x)(1+x)}{x}\ln(1-x) + 1 + \frac{x}{2}$ donc, comme $\lim_{t\to 0^+} t\ln(t) = 0$, on a $S(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n^2-1} = \lim_{x\to 1^-} S(x) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, ce qu'on pouvait avoir plus facilement en écrivant $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+1} = 1 + \frac{1}{2} + H_{n-1} - H_{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ par télescopage. Comme $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = 0$, $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{2} = S(1)$.

Calcul de $S(-1)$: $S(-1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1} = \lim_{x\to -1^+} S(x) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ car $\lim_{x\to -1^+} \frac{(1-x)(1+x)}{x}\ln(1-x) = 0$.

Là encore, si on pose $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2-1}$ pour $n \geqslant 2$, on a $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{2(-1)^k}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$ donc $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k-1} - \sum_{k=4}^{n+2} \frac{(-1)^k}{k-1} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{(-1)^{n+1}}{n} - \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}$ et on a $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2} = S(-1)$.

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 4
ESPACES VECTORIELS NORMÉS

47 D'abord, pour $P \in E$, $f(P)$ est bien un polynôme à coefficients réels donc $f(P) \in E$. Pour $(P,Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $f(\lambda P+Q) = \frac{1}{2}\Big((\lambda P+Q)\Big(\frac{X}{2}\Big) + (\lambda P+Q)\Big(\frac{X+1}{2}\Big)\Big) = \frac{\lambda}{2}\Big(P\Big(\frac{X}{2}\Big) + P\Big(\frac{X+1}{2}\Big)\Big) + \frac{1}{2}\Big(Q\Big(\frac{X}{2}\Big) + Q\Big(\frac{X+1}{2}\Big)\Big)$ ce qui donne $f(\lambda P+Q) = \lambda f(P) + f(Q)$ donc f est en endomorphisme de E.

a. Pour $P \in E$ et $a \in \mathbb{R}$, $f^2(P)(a) = f(f(P))(a) = \frac{1}{2}\Big(f(P)\Big(\frac{a}{2}\Big) + f(P)\Big(\frac{a+1}{2}\Big)\Big)$ et, par définition de $f(P)$, on a $f^2(P)(a) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\Big(P\Big(\frac{a}{4}\Big) + P\Big(\frac{a+1}{4}\Big)\Big) + \frac{1}{2}\Big(P\Big(\frac{a+2}{4}\Big) + P\Big(\frac{a+3}{4}\Big)\Big)\right)$ ce qui donne l'initialisation suivante : $f^2(P)(a) = \frac{1}{4}\Big(P\Big(\frac{a}{4}\Big) + P\Big(\frac{a+1}{4}\Big) + P\Big(\frac{a+2}{4}\Big) + P\Big(\frac{a+3}{4}\Big)\Big)$.

Soit $n \geqslant 1$ tel que $\forall P \in E$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $f^n(P)(a) = \frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{2^n-1} P\Big(\frac{a+k}{2^n}\Big)$. Par définition, comme $f^{n+1} = f^n \circ f$, on a $f^{n+1}(P)(a) = f^n(f(P))(a) = \frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{2^n-1} f(P)\Big(\frac{a+k}{2^n}\Big)$ par hypothèse de récurrence puis, par définition de f, $f^{n+1}(P)(a) = \frac{1}{2^{n+1}}\sum\limits_{k=0}^{2^n-1}\Big(P\Big(\frac{a+k}{2^{n+1}}\Big) + P\Big(\frac{a+k+2^n}{2^{n+1}}\Big)\Big) = \frac{1}{2^{n+1}}\sum\limits_{k=0}^{2^n-1} P\Big(\frac{a+k}{2^{n+1}}\Big) + \frac{1}{2^{n+1}}\sum\limits_{k=0}^{2^n-1} P\Big(\frac{a+k+2^n}{2^{n+1}}\Big)$. En posant $j = k+2^n$ dans la seconde somme, on a $\sum\limits_{k=0}^{2^n-1} P\Big(\frac{a+k+2^n}{2^{n+1}}\Big) = \sum\limits_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} P\Big(\frac{a+j}{2^{n+1}}\Big)$ donc, en changeant j en k et en regroupant les deux sommes, on arrive bien à $f^{n+1}(P)(x) = \frac{1}{2^{n+1}}\sum\limits_{k=0}^{2^{n+1}-1} P\Big(\frac{a+k}{2^{n+1}}\Big)$.

Par principe de récurrence, $\forall P \in E$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $f^n(P)(x) = \frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{2^n-1} P\Big(\frac{a+k}{2^n}\Big)$, cette formule étant même valable quand $n = 0$ car $f^0(P)(a) = P(a) = \frac{1}{2^0}\sum\limits_{k=0}^{2^0-1} P\Big(\frac{a+k}{2^0}\Big)$ puisque $f^0 = \mathrm{id}_E$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons la somme de Riemann $R_n(g) = \frac{1-0}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} g\Big(0 + k\frac{1-0}{n}\Big)$ associée à $g : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue. D'après un théorème du cours, $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(g) = \int_0^1 g(t)dt$. D'après **a.**, $f^n(P)(0) = R_{2^n}(P)$. Comme $(R_{2^n}(P))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(R_n(P))_{n\in\mathbb{N}^*}$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f^n(P)(0) = \int_0^1 P(t)dt$.

c. Pour $x \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $f^n(P)(x) - f^n(P)(0) = \frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{2^n-1}\Big(P\Big(\frac{x+k}{2^n}\Big) - P\Big(\frac{k}{2^n}\Big)\Big)$ donc, par inégalité triangulaire, $|f^n(P)(x) - f^n(P)(0)| \leqslant \frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{2^n-1}\Big|P\Big(\frac{x+k}{2^n}\Big) - P\Big(\frac{k}{2^n}\Big)\Big|$. Par inégalité des accroissements finis, en posant $M = ||P'||_{\infty,[0;2]}$ qui existe puisque la P' est continue sur le segment $[0;2]$ d'après le théorème des bornes atteintes, $\Big|P\Big(\frac{x+k}{2^n}\Big) - P\Big(\frac{k}{2^n}\Big)\Big| \leqslant \frac{Mx}{2^n}$ car $\Big(\frac{x+k}{2^n}, \frac{k}{2^n}\Big) \in [0;2]^2$. Ainsi, $|f^n(P)(x) - f^n(P)(0)| \leqslant \frac{2^n Mx}{2^{2n}} \leqslant \frac{M}{2^n}$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}(f^n(P)(x) - f^n(P)(0)) = 0$ dont on déduit que $\forall x \in [0;1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f^n(P)(x) = \int_0^1 P(t)dt$ en écrivant $f^n(P)(x) = \big(f^n(P)(x) - f^n(P)(0)\big) + f^n(P)(0)$. On peut donc affirmer que la suite de fonctions (polynomiales) $(f^n(P))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction constante $c : x \mapsto \int_0^1 P(t)dt$ sur $[0;1]$. D'ailleurs, avec ce qui précède, $|f^n(P)(x)-c(x)| = |f^n(P)(x)-f^n(P)(0)+f^n(P)(0)-c(x)| \leqslant |f^n(P)(x)-f^n(P)(0)|+|f^n(P)(0)-c(x)|$ donc $|f^n(P)(x)-c(x)| \leqslant \dfrac{M}{2^n}+\left|f^n(P)(0)-\displaystyle\int_0^1 P(t)dt\right|$. Ainsi, $||f^n(P)-c||_{\infty,[0;1]} \leqslant \dfrac{M}{2^n}+\left|f^n(P)(0)-\displaystyle\int_0^1 P(t)dt\right|$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{M}{2^n}+\left|f^n(P)(0)-\int_0^1 P(t)dt\right|\right)=0$ donc $(f^n(P))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers c sur $[0;1]$.

d. Comme $f(1)=1$ et que $1\neq 0$, 1 est valeur propre de f. Soit $P\in E_1(T)$, alors $f(P)=P$ donc, par une récurrence simple, on a $\forall n\in\mathbb{N},\ f^n(P)=P$. Ainsi, $\forall x\in[0;1],\ P(x)=\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f^n(P)(x)=\int_0^1 P(t)dt$ ce qui prouve que P est constant. Ainsi, $E_1(f)=\mathrm{Vect}(1)$.

e. Soit $k\in\mathbb{R}$ tel que $|k|>1$. Supposons qu'il existe $P\in E$ telle que $f(P)=kP$. Par une autre récurrence simple, il vient $\forall n\in\mathbb{N},\ f^n(P)=k^nP$. Pour $x\in[0;1]$, comme $(f^n(P)(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge d'après **c.** et que $(k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, ceci impose que $P(x)=0$ pour tout $x\in[0;1]$. Seule la fonction nulle est dans $E_k(f)$ donc k n'est pas valeur propre de f si $|k|>1$. Par le même argument, comme $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, on en déduit aussi que $E_{-1}(f)=\{0\}$ donc que -1 n'est pas valeur propre de T.

f. Pour $P\in E$, on a $f(P)'=\dfrac{1}{4}\left(P'\left(\dfrac{X}{2}\right)+P'\left(\dfrac{X+1}{2}\right)\right)=\dfrac{f(P')}{2}$. Soit $P\in E_{1/2}(f)$, alors $f(P)=\dfrac{P}{2}$ donc $\dfrac{P'}{2}=f(P)'=\dfrac{f(P')}{2}$ et $f(P')=P'$ ce qui, d'après **e.**, montre que $P'\in\mathbb{R}_0[X]$ d'où $P\in\mathbb{R}_1[X]$. Réciproquement, si on pose $P=aX+b$, alors $P\in E$ et $f(P)=\dfrac{1}{2}\left(a\dfrac{X}{2}+b+a\dfrac{X+1}{2}+b\right)=\dfrac{aX}{2}+\dfrac{a}{4}+b=\dfrac{aX+b}{2}=\dfrac{P}{2}$ si et seulement si $a+2b=0$ ce qui montre que $P=b(1-2X)$. Ainsi, $E_{1/2}(f)=\mathrm{Vect}(1-2X)$ et $\dfrac{1}{2}\in\mathrm{Sp}(f)$.

48 **a.** Images des multiples : $\Psi(0_E)=\Psi(0_E+0_E)=\Psi(0_E)+\Psi(0_E)$ donc $\Psi(0_E)=0_E$. Ainsi, pour $x\in E$, on a $\Psi(0.x)=\Psi(0_E)=0_E=0.\Psi(x)$ mais aussi $\Psi(1.x)=1.\Psi(x)$. Si, pour un entier $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\Psi(n.x)=n.\Psi(x)$, alors $\Psi((n+1).x)=\Psi(n.x+x)=\Psi(n.x)+\Psi(x)=n.\Psi(x)+\Psi(x)$ par hypothèse de récurrence donc $\Psi((n+1).x)=(n+1).\Psi(x)$. On a établi par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N},\ \Psi(n.x)=n.\Psi(x)$.

Continuité en 0_E : soit $\varepsilon>0$, il existe un entier $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{M}{n}\leqslant\varepsilon$. Alors, en posant $\alpha=\dfrac{1}{n}>0$, on a $\forall x\geqslant E,\ ||x||\leqslant\alpha\Longrightarrow ||n.x||\leqslant 1\Longrightarrow ||\Psi(n.x)||\leqslant M\Longleftrightarrow n||\Psi(x)||\leqslant M\Longleftrightarrow ||\Psi(x)||\leqslant\dfrac{M}{n}\leqslant\varepsilon$. La fonction Ψ est bien continue en 0_E.

Continuité sur E : soit $x_0\in E$, d'après l'équation fonctionnelle vérifiée par Ψ, $\Psi(x)-\Psi(x_0)=\Psi(x-x_0)$ pour $x\in E$. Par continuité de Ψ en 0_E, on a $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\Psi(x-x_0)=\lim_{h\to 0_E}\Psi(h)=0_E$ donc $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\big(\Psi(x)-\Psi(x_0)\big)=0_E$ ce qui montre $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\Psi(x)=\Psi(x_0)$ et la continuité de Ψ en x_0.

La fonction Ψ est donc continue sur E.

b. Pour tout vecteur $x\in E$, on sait déjà d'après la question **a.** que $\forall n\in\mathbb{N},\ \Psi(n.x)=n.\Psi(x)$ donc $\Psi(0_E)=0_E=\Psi(n.x+(-n).x)=\Psi(n.x)+\Psi((-n).x)$ puis $\Psi((-n).x)=-\Psi(n.x)=-n.\Psi(x)=(-n).\Psi(x)$. Ainsi, $\forall n\in\mathbb{Z},\ \forall x\in E,\ \Psi(n.x)=n.\Psi(x)$. Pour $q\in\mathbb{N}^*$, en posant $y=\dfrac{1}{q}.x$, on a $\Psi(q.y)=q\Psi(y)$ donc $\Psi\left(\dfrac{1}{q}.x\right)=\dfrac{1}{q}.\Psi(x)$ et, pour $p\in\mathbb{Z}$, on a $\Psi\left(\dfrac{p}{q}.x\right)=\Psi\left(p.\left(\dfrac{1}{q}.x\right)\right)=p.\left(\Psi\left(\dfrac{1}{q}.x\right)\right)=\dfrac{p}{q}.\Psi(x)$. Par conséquent, on a $\forall r\in\mathbb{Q},\ \Psi(r.x)=r.\Psi(x)$. Reste à passer des rationnels aux réels.

Pour tout réel λ, si on pose $\alpha_n=\dfrac{\lfloor n\lambda\rfloor}{n}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$, par définition de la partie entière, $n\lambda-1<\lfloor n\lambda\rfloor\leqslant n\lambda$

donc $\lambda - \dfrac{1}{n} < a_n \leqslant \lambda$ et on a $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lambda$ par encadrement. Comme $||a_n.x - \lambda.x|| = |a_n - \lambda|\,||x||$, on a aussi $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n.x = \lambda.x$ puis, par continuité de Ψ, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \Psi(a_n.x) = \Psi(\lambda.x)$. Or $\Psi(a_n.x) = a_n.\Psi(x)$ car a_n est un rationnel donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \Psi(a_n.x) = \lambda.\Psi(x)$. Par unicité de la limite, il vient $\Psi(\lambda.x) = \lambda.\Psi(x)$. Ceci étant valable pour tout réel λ et tout vecteur $x \in E$, et comme on a déjà $\forall (x,y) \in E^2,\ \Psi(x+y) = \Psi(x) + \Psi(y)$ par hypothèse, on peut conclure que Ψ est un endomorphisme de E.

49 **a.** Un espace euclidien est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

b. On prend $E = \mathbb{R}^2$ qu'on munit de la norme classique $||\,.\,||_2$ (associée au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$) et on prend $(v_1, v_2) = (e_1, e_2)$ la base canonique, alors pour tout couple $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, on a $||\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2||_2 = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} = \sqrt{|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2} = ||\,|\lambda_1| v_1 + |\lambda_2| v_2||_2$.

c. On prend $E = \mathbb{R}^2$ qu'on munit à nouveau de la norme $||\,.\,||_2$ et on prend $(v_1, v_2) = (e_1, e_1 + e_2)$. Alors $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ ||\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2||_2 = ||(\lambda_1 + \lambda_2) e_1 + \lambda_2 e_2||_2 = \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + \lambda_2^2} = \sqrt{\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_2^2}$ mais $||\,|\lambda_1| v_1 + |\lambda_2| v_2||_2 = ||(|\lambda_1| + |\lambda_2|) e_1 + |\lambda_2| e_2||_2 = \sqrt{(|\lambda_1| + |\lambda_2|)^2 + |\lambda_2|^2} = \sqrt{\lambda_1^2 + 2|\lambda_1\lambda_2| + 2\lambda_2^2}$ donc $||\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2||_2 \neq |||\lambda_1| v_1 + |\lambda_2| v_2||_2$ dès que $\lambda_1\lambda_2 < 0$.

d. Soit $(\mu, \mu') \in \mathbb{R}^2$, $f\Big(\dfrac{\mu + \mu'}{2}\Big) = \Big|\Big|\dfrac{\mu + \mu'}{2} v_1 + v_2\Big|\Big|$ donc $f\Big(\dfrac{\mu + \mu'}{2}\Big) = \Big|\Big|\dfrac{1}{2}\Big(\mu v_1 + v_2\Big) + \dfrac{1}{2}\Big(\mu' v_1 + v_2\Big)\Big|\Big|$ et $f\Big(\dfrac{\mu + \mu'}{2}\Big) \leqslant \dfrac{1}{2}||\mu v_1 + v_2|| + \dfrac{1}{2}||\mu' v_1 + v_2||$ par inégalité triangulaire d'où $f\Big(\dfrac{\mu + \mu'}{2}\Big) \leqslant \dfrac{1}{2}\Big(f(\mu) + f(\mu')\Big)$.

e. Par dichotomie on fait tendre une suite de $\Big(\dfrac{k_n}{2^n}\Big)_{n \in \mathbb{N}}$ vers $\lambda \in]0;1[$ et...

50 **a.** Par l'absurde, soit un vecteur colonne $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul de $\mathrm{Ker}(A)$, alors $Ax = 0$ et $x \neq 0$, soit un indice $m \in [\![1;n]\!]$ tel que $|x_m| = ||x||_\infty = \underset{i \in [\![1;n]\!]}{\mathrm{Max}}(|x_i|) > 0$. La m-ième ligne de Ax donne la relation $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{m,j} x_j = 0$ ou $a_{m,m} x_m = -\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^{n} a_{m,j} x_j$. Ainsi, $|a_{m,m} x_m| = \Big|\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^{n} a_{m,j} x_j\Big| \leqslant \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^{n} |a_{m,j}|\,|x_j|$ par inégalité triangulaire donc $|a_{m,m}|\,|x_m| \leqslant \Big(\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^{n} |a_{m,j}|\Big)|x_m|$. En divisant par $|x_m| > 0$, on obtient $|a_{m,m}| \leqslant \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^{n} |a_{m,j}|$ qui contredit l'énoncé. Par conséquent, $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ donc, comme A est carrée, A est inversible.

b. Soit $(u, v) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ tel que $Ev = Fu$ et $u \neq 0$. Pour tout indice $i \in [\![1;n]\!]$, comme $[Ev]_i = [Fu]_i$, on a la relation $\sum\limits_{k=i}^{n} a_{i,k} v_k + \sum\limits_{k=1}^{i-1} a_{i,k} u_k = 0$.

Initialisation : pour $i = n$, $a_{n,n} v_n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_{n,k} u_k = 0$ donc $|v_n| \leqslant \dfrac{1}{|a_{n,n}|}\sum\limits_{k=1}^{n-1} |a_{n,k}|\,|u_k| \leqslant \dfrac{||u||_\infty}{|a_{n,n}|}\sum\limits_{k=1}^{n-1} |a_{n,k}|$ par inégalité triangulaire, ce qui donne $|v_n| < ||u||_\infty$ car A est à diagonale strictement dominante.

Hérédité : soit $\ell \in [\![2;n]\!]$ pour lequel on a montré que $\forall i \in [\![\ell;n]\!],\ |v_i| < ||u||_\infty$. Comme on a la relation $\sum\limits_{k=\ell-1}^{n} a_{\ell-1,k} v_k + \sum\limits_{k=1}^{\ell-2} a_{\ell-1,k} u_k = 0$, il vient $|v_{\ell-1}| \leqslant \dfrac{1}{|a_{\ell-1,\ell-1}|}\Big(\sum\limits_{k=1}^{\ell-2} |a_{\ell-1,k}|\,|u_k| + \sum\limits_{k=\ell}^{n} |a_{\ell-1,k}|\,|v_k|\Big)$ par inégalité triangulaire donc, par hypothèse de récurrence, $|v_{\ell-1}| \leqslant \dfrac{||u||_\infty}{|a_{\ell-1,\ell-1}|}.\sum\limits_{k=1, k \neq \ell-1}^{n} |a_{\ell-1,k}| < ||u||_\infty$ car A est à diagonale strictement dominante.

Conclusion : par récurrence forte, finie et descendante, $\forall \ell \in [\![1;n]\!],\ |v_\ell| < ||u||_\infty$ donc $||v||_\infty < ||u||_\infty$.

c. Avec les notations de la question précédente, comme $\forall \ell \in [\![1;n]\!],\ \alpha_\ell = \dfrac{1}{|a_{\ell,\ell}|}.\displaystyle\sum_{j=1,j\neq\ell}^{n} |a_{\ell,j}| < 1$, on peut poser $k = \mathrm{Min}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n) < 1$. Reprenons $(u,v) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ tel que $Ev = Fu$ et $u \neq 0$. À nouveau, $\forall i \in [\![1;n]\!],\ [Ev]_i = [Fu]_i$ donc $\displaystyle\sum_{j=i}^{n} a_{i,k}v_k + \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}u_j = 0$.

Initialisation : pour $i = n$, $a_{n,n}v_n + \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} a_{n,j}u_j = 0$ donc $|v_n| \leqslant \dfrac{1}{|a_{n,n}|}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} |a_{n,j}|\,|u_j| \leqslant \dfrac{||u||_\infty}{|a_{n,n}|}\sum_{k=1}^{n-1} |a_{n,k}|$ par inégalité triangulaire, ce qui donne $|v_n| \leqslant k||u||_\infty$ car A est à diagonale strictement dominante.

Hérédité : soit $\ell \in [\![2;n]\!]$ pour lequel on a montré que $\forall i \in [\![\ell;n]\!],\ |v_i| \leqslant k||u||_\infty$. Comme on a la relation $\displaystyle\sum_{j=\ell-1}^{n} a_{\ell-1,j}v_j + \sum_{j=1}^{\ell-2} a_{\ell-1,j}u_j = 0$, il vient $|v_{\ell-1}| \leqslant \dfrac{1}{|a_{\ell-1,\ell-1}|}\Big(\displaystyle\sum_{j=1}^{\ell-2} |a_{\ell-1,j}|\,|u_j| + \sum_{j=\ell}^{n} |a_{\ell-1,j}|\,|v_j|\Big)$ par inégalité triangulaire donc, par hypothèse de récurrence, $|v_{\ell-1}| \leqslant \dfrac{||u||_\infty}{|a_{\ell-1,\ell-1}|}.\displaystyle\sum_{j=1,j\neq\ell-1}^{n} |a_{\ell-1,j}| \leqslant k||u||_\infty$ car A est à diagonale strictement dominante.

Conclusion : par récurrence forte, finie et descendante, $\forall \ell \in [\![1;n]\!],\ |v_\ell| \leqslant k||u||_\infty$ donc $||v||_\infty \leqslant k||u||_\infty$.

d. La matrice E est inversible car elle est triangulaire supérieure avec des termes non nuls sur la diagonale donc la bonne définition de la suite est $x_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\forall p \in \mathbb{N},\ x_{p+1} = E^{-1}(Fx_p + b)$ et, sous cette forme, il est clair que la suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bien définie quelle que soit la valeur de x_0.

e. Si la suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers x, par linéarité de E et F en dimension finie, comme E et F sont donc continues sur $\mathbb{R}^n$, on a $\lim\limits_{p\to+\infty} Ex_p = Ex$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} Fx_p = Fx$ donc on a $Ex = Fx + b$, soit $Ax = b$ car $A = E - F$ et $x = A^{-1}b$. Montrons que $\lim\limits_{p\to+\infty} x_p = A^{-1}b$. Posons $y_p = x_p - A^{-1}b$ pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, de sorte que $\forall p \in \mathbb{N},\ E(y_{p+1} + A^{-1}b) = F(x_p + A^{-1}b) + b$ mais, comme $EA^{-1}b = FA^{-1}b + b$ car $A = E - F$, on en déduit que $Ey_{p+1} = Fy_p$. Par une récurrence facile, comme d'après la question **c.** on a $||y_{p+1}|| \leqslant k||y_p||$ (ceci étant vrai même si $y_p = 0$ car alors on aurait $y_{p+1} = 0$), on a $\forall p \in \mathbb{N},\ ||y_p|| \leqslant k^p||y_0||$. Ainsi, comme $|k| < 1$, par encadrement, il vient $\lim\limits_{p\to+\infty} y_p = 0$ donc $\lim\limits_{p\to+\infty} x_p = A^{-1}b$, et ceci quelle que soit la valeur de x_0.

Il s'agit de l'algorithme de Gauss-Siedel.

51 **a.** Pour $f \in E$, f^2 et f^4 sont continues sur le segment $[0;1]$ donc $\int_0^1 |f(t)|^2dt$ et $\int_0^1 |f(t)|^4dt$ existent et sont positives par positivité de l'intégrale donc $||f||_2 = \sqrt{\int_0^1 f(t)^2dt}$ et $||f||_4 = \sqrt[4]{\int_0^1 f(t)^4dt}$ existent.

Séparation :

Homogénéité :

Inégalité triangulaire :

b. La norme $||\,.\,||_2$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire classique $(f,g) \mapsto (f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ sur E donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à f^2 et à 1, on a $|(f^2|1)| \leqslant ||f^2||_2\,||1||_2$ qui s'écrit aussi $||f||_2^2 \leqslant ||f||_4^2$ car $||1||_2 = 1$. En passant à la racine, on a bien $||f||_2 \leqslant ||f||_4$. Ainsi, $||\,.\,||_4$ domine $||\,.\,||_2$.

c. Gros calculs et $||f_n||_2$ tend vers $\sqrt{2}$ alors que $||f_n||_4$ tend vers $+\infty$. Elles ne sont pas équivalentes.

d. ça donne $N_{n,2}(A) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2$.

52 **a.** On dit que f est bornée sur Ω s'il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que $\forall x \in \Omega,\ |f(x)| \leqslant M$.

b. On dit que f admet un maximum (en $x_0 \in \Omega$) sur Ω s'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $\forall x \in \Omega,\ f(x) \leqslant f(x_0)$.

c. Si $x \in \mathbb{R}$, $s(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin(x)$ par EULER donc s est bornée sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ |s(x)| \leqslant 1$. Par contre, si $y \in \mathbb{R}$, on a $s(iy) = \dfrac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = i\dfrac{e^{y} - e^{-y}}{2} = i\,\mathrm{sh}\,(y)$ et on sait que $\lim\limits_{y \to +\infty} \mathrm{sh}\,(y) = +\infty$ donc s n'est pas bornée sur $i\mathbb{R}$. A fortiori, s n'est pas bornée sur $\mathbb{C}$.

d. Pour $z \in D$, on peut écrire $z = re^{i\theta} \in D$ avec $r \in [0;1]$ et $\theta \in \mathbb{R}$, ce qui donne $\varphi(z) = \left|\dfrac{e^{ire^{i\theta}} - e^{-ire^{i\theta}}}{2}\right|^2$ donc $\varphi(z) = \left|\dfrac{e^{ir\cos(\theta)}e^{-r\sin(\theta)} - e^{-ir\cos(\theta)}e^{r\sin(\theta)}}{2}\right|^2 \leqslant \left(\dfrac{e^{-r\sin(\theta)} + e^{r\sin(\theta)}}{2}\right)^2 \leqslant \mathrm{ch}\,(r)^2 \leqslant \mathrm{ch}\,(1)^2$.

Ainsi, φ est bornée sur D et $||\varphi||_{\infty,D} \leqslant \mathrm{ch}\,(1)^2$.

e. La fonction s est continue sur $\mathbb{C}$ par composition car les fonctions $z \mapsto iz$, $z \mapsto -iz$ et $z \mapsto e^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ sont continues sur $\mathbb{C}$, les deux premières car elles sont sont 1-lipschitziennes (par exemple) ou linéaires en dimension finie et, en posant $u_n : z \mapsto \dfrac{z^n}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$, on a $||u_n||_{\infty,B_f(0,r)} = \dfrac{r^n}{n!}$ si $r > 0$ donc $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ converge normalement sur toute boule fermée $B_f(0,r)$ et les u_n sont continues comme fonctions polynomiales. Ainsi, comme $z \mapsto |z|$ est continue sur $\mathbb{C}$ car 1-lipschitzienne et $t \mapsto t^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, la fonction φ est continue sur $\mathbb{C}$ par composition. Comme φ est continue sur $D \subset \mathbb{C}$ et que D est un fermé borné en dimension finie, avec le théorème des bornes atteintes, φ est bornée et atteint ses bornes sur D.

Pour $z \in D$, $\varphi(z) = \left|\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right|^2 = \left|\dfrac{1}{2i}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(iz)^n}{n!} - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-iz)^n}{n!}\right)\right|^2 = \left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right|^2$ car, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $(i)^{2n} - (-i)^{2n} = 0$ et $(i)^{2n+1} - (-i)^{2n+1} = 2i(-1)^n$. Comme cette série converge absolument par le lemme d'ABEL car le rayon de convergence de la série entière exponentielle vaut $+\infty$, $\varphi(z) \leqslant \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)^2 = \mathrm{sh}\,(|z|)^2 \leqslant \mathrm{sh}\,(1)^2$. Mieux qu'en question **d.**, $||\varphi||_{\infty,D} \leqslant \mathrm{sh}\,(1)^2$. Si $|z| < 1$, on a $|\varphi(z)| < \mathrm{sh}\,(1)$ car sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc le maximum de $|\varphi|$ est atteint sur $\mathbb{U}$.

Pour que $|1 + iz| = 1 + |z|$, il est nécessaire et suffisant que 1 et iz soient positivement alignés, donc que z soit un imaginaire pur. Ainsi, si $z \in \mathbb{U}$ n'est pas un imaginaire pur, on a $|1 + iz| < 1 + |z|$ donc $\left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| \leqslant |1 + iz| + \left|\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| < 1 + |z| + \sum\limits_{2=0}^{+\infty} \dfrac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!} = \mathrm{sh}\,(|z|)$ et $\varphi(z) < \mathrm{sh}\,(1)^2$. Les deux seuls imaginaires purs de $\mathbb{U}$ sont $\pm i$ et $\varphi(i) = i\mathrm{sh}\,(1)$ et $\varphi(-i) = -i\mathrm{sh}\,(1)$ donc $\varphi(i)| = \varphi(-i) = \mathrm{sh}\,(1)^2$. Par conséquent, $||\varphi||_{\infty,D} \leqslant \mathrm{sh}\,(1)^2$ et φ atteint son maximum sur D en i ou $-i$ uniquement.

53 On peut constater que, par une récurrence simple, et pour tout $a > 0$, tous les termes de la suite $(u_n(a))_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont bien définis et strictement positifs.

a. ($\Longrightarrow$) Si $a \in E_\infty$, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n(a) = +\infty$ par définition, pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ u_n(a) \geqslant A$. En prenant $A = 1$, il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ u_n(a) \geqslant 1$. Par exemple, pour $n = n_0$, on a bien $u_n(a) \geqslant 1$.

($\Longleftarrow$) S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n_0}(a) \geqslant 1$, montrons par récurrence que $\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1}(a) > u_n(a) \geqslant 1$.

Initialisation : $u_{n_0+1}(a) - u_{n_0}(a) = u_{n_0}(a)(u_{n_0}(a) - 1) + \dfrac{1}{n_0 + 1}$ et $u_{n_0}(a)(u_{n_0}(a) - 1) \geqslant 0$ alors que $\dfrac{1}{n_0 + 1} > 0$ donc, par somme $u_{n_0+1}(a) - u_n(a) > 0$ et $u_{n_0+1}(a) > u_{n_0}(a) \geqslant 1$.

Hérédité : si $u_{n+1}(a) > u_n(a) \geqslant 1$ pour $n \geqslant n_0$, $u_{n+2}(a) - u_{n+1}(a) = u_{n+1}(a)(u_{n+1}(a) - 1) + \dfrac{1}{n+2}$, on a encore $u_{n+2}(a) - u_{n+1}(a) > 0$ avec les mêmes arguments donc $u_{n+2}(a) > u_{n+1}(a) \geqslant 1$.

Par principe de récurrence, on a bien $\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1}(a) > u_n(a)$ donc la suite $(u_n(a))_{n \geqslant n_0}$ est croissante. Si elle convergeait vers un réel ℓ, en passant à la limite dans $u_{n+1}(a) = u_n^2(a) + \dfrac{1}{n+1}$, on aurait $\ell^2 = \ell$ donc $\ell = 0$ ou $\ell = 1$, ce qui contredit le fait que $u_{n_0+1}(a) > 1$ et que la suite $(u_n(a))_{n \geqslant n_0}$ est croissante. Ainsi, par le théorème de la limite monotone, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n(a) = +\infty$ donc $a \in E_\infty$.

b. Initialisation : on a $u_1 : a \mapsto a$ donc la fonction u_1 est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que u_n est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, alors $u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{1}{n+1}$ donc, comme u_n est positive, on a u_n^2 croissante car $t \mapsto t^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc u_{n+1} croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Conclusion : par principe de récurrence, toutes les fonctions u_n sont croissantes sur $\mathbb{R}_+^*$.
Ainsi, si $(a, b) \in E_\infty^2$ avec $a < b$ et si on prend $c \in [a; b]$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n(a) \leqslant u_n(c) \leqslant u_n(b)$. Mais, par définition, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n(a) = +\infty$ donc, par encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n(c) = +\infty$. Par conséquent, E_∞ est un intervalle car si $(a, b) \in E_\infty^2$ avec $a < b$, on a $[a; b] \subset E_\infty$.
De plus, si $a \in [1; +\infty[$, $u_1(a) = a \geqslant 1$ donc, d'après **a.**, $a \in E_\infty$, ce qui montre l'inclusion $[1; +\infty[\subset E_\infty$.

c. Initialisation : $u_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*} : t \mapsto t$ donc u_1 est polynomiale de degré $1 = 2^0$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que u_n soit une fonction polynomiale de degré 2^n. La relation $u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{1}{n+1}$ montre que u_{n+1} est polynomiale et que $\deg(u_{n+1}) = 2\deg(u_n) = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$.
Par principe de récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est une fonction polynomiale de degré 2^n sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle y est continue. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall a > 0,\ u_n(b) \underset{b \to a}{\longrightarrow} u_n(a)$.

d. D'après la question **a.**, $E_\infty = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} u_n^{-1}([1; +\infty[)$. Dommage, car $[1; +\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$ donc, par continuité de u_n, $u_n^{-1}([1; +\infty[)$ est un fermé de $\mathbb{R}$. Mais on ne peut rien dire de la réunion infinie de fermés. En reprenant la question **a.** avec > 1 à la place de $\geqslant 1$, on se rend compte facilement qu'on a aussi l'équivalent $a \in E_\infty \iff (\exists n \in \mathbb{N}^*,\ u_n(a) > 1)$. Ceci prouve que $E_\infty = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} u_n^{-1}(]1; +\infty[)$. Maintenant, comme $]1; +\infty[$ est un ouvert et que u_n est continue, $u_n^{-1}(]1; +\infty[)$ est un ouvert donc E_∞, en tant que réunion d'ouverts, est un ouvert. Par conséquent, E_∞ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}_+^*$.

54 D'abord, pour $x \in E$, $A_x = \{||x - f|| \mid f \in F\}$ est une partie non vide, car $F \neq \emptyset$ et minorée par 0 de $\mathbb{R}$, on sait qu'alors A_x admet une borne inférieure qu'on note donc $d_F(x) = d(x, F) = \underset{f \in F}{\mathrm{Inf}}(||x - f||)$: la distance de x à F.

a. $x \in F$ car F fermé.

b. classique et vu en cours : d_F est 1-lipschitzienne.

c. TBA. Pour $x \in E$, montrer que $\Gamma(x)$ est non vide.

d. Si deux éléments distincts f_1 et f_2 appartenait à $\Gamma(x)$, on aurait donc $||x - f_1|| = ||x - f_2|| = d(x, F)$. Comme F est convexe par hypothèse dans cette question, en posant $f = \dfrac{f_1 + f_2}{2} = \dfrac{1}{2}.f_1 + \dfrac{1}{2}.f_2$, on aurait $f \in F$. De plus, Ainsi, comme $\Gamma(x)$ est non vide d'après **c.**, on en déduit que $\Gamma(x)$ contient exactement un élément qu'on note u_x.

e. Soit $x \in E$, on a noté $p_F(x) = u_x$ à la question précédente. Comme $u_x \in F$, $d_F(x) = 0 = ||u_x - u_x||$ et $\Gamma(u_x) = \{u_x\}$ donc $u_{u_x} = u_x$, ce qui s'écrit aussi $p_F(p_F(x)) = p_F(u_x) = u_x = p_F(x)$. Ainsi, $p_F^2 = p_F$ donc

p_F est idempotent mais il n'y a aucune raison pour que p_F soit linéaire donc p_F ne peut pas être appelé un projecteur.

55

56 On va d'abord montrer que pour $A \subset \mathbb{R}$, (A dense dans $\mathbb{R}$) $\Longleftrightarrow \big(\forall [\alpha;\beta],\ \alpha < \beta \Longrightarrow (\exists a \in A,\ a \in [\alpha;\beta])\big)$.

($\Longrightarrow$) Si A est dense, $\overline{A} = \mathbb{R}$ donc tout réel est la limite d'une suite d'éléments de A. Soit $[\alpha;\beta]$ avec $\alpha < \beta$, en posant par exemple $x_0 = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x_0$. En prenant $\varepsilon = \dfrac{\beta-\alpha}{2} > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |a_n - x_0| \leqslant \varepsilon \Longleftrightarrow a_n \in [\alpha;\beta]$. Ainsi, $a_{n_0} \in A \cap [\alpha;\beta]$.

($\Longleftarrow$) Supposons que $A \cap [\alpha;\beta] \neq \emptyset$ dès que $\alpha < \beta$. Soit un réel x_0 et $n \in \mathbb{N}$, prenons $\alpha_n = x_0 - \dfrac{1}{2^n}$ et $\beta_n = x_0 + \dfrac{1}{2^n} > \alpha_n$, alors il existe $a_n \in [\alpha_n;\beta_n] \cap A$ et l'encadrement $-\dfrac{1}{2^n} \leqslant x_0 - a_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ montre que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers x_0. Ainsi, $\overline{A} = \mathbb{R}$ et A est dense dans $\mathbb{R}$.

On a montré par double inclusion que (A dense dans $\mathbb{R}$) $\Longleftrightarrow (\forall [\alpha;\beta],\ \alpha < \beta \Longrightarrow \big(\exists a \in A,\ a \in [\alpha;\beta])\big)$.

Montrons que $A = \big\{f(m) - f(n) \mid (m,n) \in \mathbb{N}^2\big\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Soit un segment $[\alpha;\beta] \subset \mathbb{R}$ non réduit à un point. On cherche un élément de A dans $[\alpha;\beta]$. Traitons plusieurs cas :

<u>$\alpha \leqslant 0 \leqslant \beta$</u> Prenons $n = m = 0$, alors $0 = f(0) - f(0) \in A \in [\alpha;\beta]$.

<u>$0 < \alpha < \beta$</u> Posons $\varepsilon = \beta - \alpha > 0$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \geqslant M,\ |f'(x)| \leqslant \varepsilon$. Posons $n = \lfloor M \rfloor + 1 \in \mathbb{N}$ et $m = \mathrm{Min}(\{k \geqslant n \mid f(k) \geqslant f(n) + \alpha\})$. Cet entier m existe bien par propriété fondamentale de $\mathbb{N}$ car la partie $X = \{k \geqslant n \mid f(k) \geqslant f(n) + \alpha\} \subset \mathbb{N}$ est non vide puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrons que $f(m) - f(n) \in [\alpha;\beta]$:

- Comme $m \in X$, on a $f(m) \geqslant f(n) + \alpha$ donc $f(m) - f(n) \geqslant \alpha$.
- On ne peut pas avoir $m = n$ car on aurait $f(m) - f(n) = 0$ contredisant $f(m) - f(n) \geqslant \alpha > 0$. Ainsi, $m > n$ donc $m - 1 \geqslant n$ et, par minimalité de m, $m - 1 \notin X$ donc $f(m-1) < f(n) + \alpha$. D'après le théorème des accroissements finis, comme f est dérivable sur $[m-1;m]$, il existe un réel $c \in]m-1;m[$ tel que $f(m) - f(m-1) = f'(c)(m-(m-1)) = f'(c)$. Or $c > m - 1 \geqslant n$ donc $|f'(c)| \leqslant \varepsilon$ et $f(m) = f(m-1) + f'(c) < f(n) + \alpha + \varepsilon = f(n) + \beta$ d'où $f(m) - f(n) \leqslant \beta$.

Le réel $f(m) - f(n)$ appartient donc à $[\alpha;\beta]$ et aussi à A par construction car $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.

<u>$\alpha < \beta < 0$</u> D'après le cas précédent, comme $0 < -\beta < a$, $A \cap [-\beta;-\alpha] \neq \emptyset$ donc il existe $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $f(m) - f(n) \in [-\beta;-\alpha]$ et $f(n) - f(m) = -\big(f(m) - f(n)\big) \in A \cap [\alpha;\beta]$.

Ainsi, $A = \big\{f(m) - f(n) \mid (m,n) \in \mathbb{N}^2\big\}$ est dense dans $\mathbb{R}$ car $A \cap [\alpha;\beta]$ est non vide dès que $\alpha < \beta$.

57 **a.** Soit $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = < u(x), x >$. On peut décomposer $f = g \circ h$ avec $h : E \to \mathbb{E}^2$ définie par $h(x) = (u(x), x)$ qui est linéaire donc continue en dimension finie et $g : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = < x, y >$ qui est bilinéaire en dimension finie donc continue. Par composition, f est donc continue sur E. Comme la sphère unité $S = \{x \in E \mid ||x|| = 1\}$ est un fermé borné de E en dimension finie, la fonction f étant continue sur S, elle y est bornée et y atteint ses bornes par le théorème des bornes atteintes. Par conséquent, il existe un vecteur unitaire $x_0 \in S$ tel que $\forall x \in S,\ f(x) = < u(x), x > \geqslant < u(x_0), x_0 > = f(x_0)$.

b. Pour $t \in \mathbb{R}$, $||\gamma(t)||^2 = ||\cos(t)x_0 + \sin(t)y_0||^2 = ||\cos(t)x_0||^2 + ||\sin(t)y_0||^2$ par PYTHAGORE car $x_0 \perp y_0$ et, comme x_0 et y_0 sont unitaires, on a $||\gamma(t)||^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ donc $||\gamma(t)|| = 1$.

c. $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi(t) = \cos^2(t) < u(x_0), x_0 > +2\cos(t)\sin(t) < u(x_0), y_0 > +\sin^2(t) < u(y_0), y_0 >$ par linéarité de u, bilinéarité du produit scalaire et car u est autoadjoint donc ϕ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ où elle est π-périodique. De plus, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi(t) =< u(\gamma(t)), \gamma(t) > \geqslant < u(x_0), x_0 >$ d'après **a.** et **b.** donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi(t) \geqslant \phi(0)$. Comme ϕ est dérivable en 0 où elle admet un minimum absolu, $\phi'(0) = 0$.

d. D'après l'expression de **c.**, $\phi'(t) = \sin(2t)(< u(y_0), y_0 > - < u(x_0), x_0 >) + 2\cos(2t) < u(x_0), y_0 >$ pour tout t réel donc $\phi'(0) = 2 < u(x_0), y_0 >= 0$. On a bien montré que $y_0 \perp u(x_0)$.

e. Soit l'hyperplan $H = \text{Vect}(x_0)^{\perp}$ et soit y_0 un vecteur unitaire quelconque de H, alors $u(x_0) \perp y_0$ d'après la question **d.** donc $u(x_0) \in H^{\perp} = \text{Vect}(x_0)$, ce qui signifie qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u(x_0) = \lambda x_0$, donc que x_0 est un vecteur propre de u.

f. Soit $x \in F^{\perp}$ et $y \in F$, alors $< u(x), y >=< x, u(y) >$ car u est autoadjoint donc, comme $u(y) \in F$ car F est stable par u et que $x \in F^{\perp}$, on a $< u(x), y >= 0$. Comme ceci est vrai pour tout vecteur $y \in F$, on a bien $u(x) \in F^{\perp}$, donc $F^{\perp}$ est aussi stable par u.

g. On démontre le théorème spectral par récurrence sur la dimension n de E, et sous la forme suivante : pour tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien de dimension n, il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u.

<u>Initialisation</u> : soit E un espace euclidien de dimension 1 et u un endomorphisme autoadjoint de E, alors u est une homothétie de E comme tout endomorphisme en dimension 1 ; toute base orthonormale de E est une base de E formée de vecteurs propres de u.

<u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons le résultat prouvé pour des espaces euclidiens de dimension $k \in [\![1; n]\!]$. Soit E un espace euclidien de dimension $n+1$ et u un endomorphisme autoadjoint de E. D'après **e.**, il existe un vecteur propre x_0 de u associé à une valeur propre réelle λ. Posons $F = E_\lambda(u)$. On sait que $\dim(F) \geqslant 1$. Traitons deux cas :

- Si $F = E$, $u = \lambda \text{id}_E$ donc toute base orthonormale de E est une base formée de vecteurs propres de u.
- Si $F \neq E$, on a $\dim(F) \leqslant n$, comme F est stable par u, $G = F^{\perp}$ est aussi stable par u d'après **f.** et $\dim(G) = n + 1 - \dim(F) \geqslant 1$. Or u induit dans G un endomorphisme autoadjoint de G d'où, par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}_G$ de G formée de vecteurs propres de u_G, donc de u. En prenant une base orthonormale $\mathcal{B}_F$ de F, ses vecteurs sont des vecteurs propres de u donc $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \amalg \mathcal{B}_G$ est une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u.

Par principe de récurrence forte, pour tout endomorphisme autoadjoint u sur un espace euclidien E, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E formée de vecteurs propres de u. On vient de montrer, d'une manière totalement différente de celle du cours, le fameux théorème spectral.

58 **a.** E est non vide car la fonction nulle appartient à E, elle est 0-lipschitzienne, et $E \subset C^0([0; 1], \mathbb{R})$ qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel classique. Si $(f, g) \in E^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, si f est k-lipschitzienne et g k'-lipschitzienne, alors $|(\alpha f + \beta g)(y) - (\alpha f + \beta g)(x)| = |\alpha(f(y) - f(x)) + \beta(g(y) - g(x))| \leqslant |\alpha||f(y) - f(x)| + |\beta||g(y) - g(x)|$ par inégalité triangulaire pour $(x, y) \in [0; 1]$, donc $|(\alpha f + \beta g)(y) - (\alpha f + \beta g)(x)| =\leqslant (|\alpha|k + |\beta|k')|y - x|$ ce qui justifie que $\alpha f + \beta g$ est $|\alpha|k + |\beta|k'$-lipschitzienne donc que $\alpha f + \beta g \in E$. Par conséquent, E est un sous-espace vectoriel de $C^0([0; 1], \mathbb{R})$ donc est lui-même un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

b. Soit $f \in E$, posons $A_f = \{k \in \mathbb{R}_+ \mid f \text{ est } k\text{-lipschitzienne}\}$. A_f est une partie non vide, car $f \in E$ et minorée par 0 de $\mathbb{R}$ donc, d'après le cours, A_f admet une borne inférieure, que l'énoncé note ici $K(f)$. Soit une suite $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A_f qui converge vers $K(f)$. Pour tout couple $(x, y) \in [0; 1]^2$, on a $|f(y) - f(x)| \leqslant k_n|y - x|$ donc, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient $|f(y)f(x)| \leqslant K(f)|y - x|$ ce qui prouve que $K(f) \in A_f$. Ainsi, $K(f) = \text{Min}(A_f)$ et f est $K(f)$-lipschitzienne, $K(f)$ est bien le plus petit réel $k \geqslant 0$ tel que f est k-lipschitzienne.

c. $K(f) = ||f'||_\infty$ pour toute fonction de classe C^1 sur $[0; 1]$.

d. TAF entre le min et le max.

e. Pour $x \mapsto x^n$.

f. on peut vérifier que c'est homogène et inégalité triangulaire mais pas de séparation.

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 5 RÉDUCTION

59 **a.** Par hypothèse, il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $MX = \lambda X$. Or $M^2X = M(MX) = M(\lambda X) = \lambda MX = \lambda^2 X$ et, par une récurrence classique, $\forall k \in \mathbb{N},\ M^kX = \lambda^k X$. Si on écrit $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, $P(M) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k M^k$ donc $P(M)X = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k M^k X = \Big(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k \lambda^k\Big) X = P(\lambda)X$. Ainsi, comme $X \neq 0$, $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(M)$.

b. Avec $b = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $b^2 = \dfrac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} = 1-b$ donc b est racine du polynôme $P = X^2+X-1$ qui est bien à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Ainsi, b est algébrique.

c. Les quatre coordonnées de X sont $1, b, z, bz$ et $z.1 = z$, $z.b = bz$, $z.z = z^2 = -bz-1$ car z est racine de X^2+bX+1 et $z.(bz) = bz^2 = b(-bz-1) = -(1-b)z - b = -b - z + bz$. Ainsi, si on définit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $MX = z.X$, ce qui prouve, comme $X \neq 0$, que z est valeur propre de M avec pour vecteur propre associé le vecteur X. On sait que z est alors racine de χ_M et un calcul direct donne $\chi_M = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$ qui est à coefficients dans $\mathbb{Z}$ donc z est un nombre algébrique.

d. $\chi_M = \begin{vmatrix} X & 3 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ -1 & 1 & X+2 \end{vmatrix} = X^2(X+2) + 3 + X$ avec Sarrus donc $\chi_M = X^3 + 2X^2 + X + 3$. Par hypothèse, a est donc une racine (éventuellement complexe) de χ_M donc a est une valeur propre de M. D'après la question **a.**, en posant $Q = X^2 + X - 1$, $Q(a)$ est valeur propre de $Q(M) = M^2 + M - I_3$. Après calculs, on a $Q(M) = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et, à nouveau avec la formule de Sarrus, on parvient à la relation $P = \chi_{Q(M)} = \begin{vmatrix} X+1 & 3 & 3 \\ -1 & X+2 & 1 \\ 1 & 2 & X \end{vmatrix} = X(X+1)(X+2) + 3 - 6 - 2(X+1) - 3(X+2) + 3X$ qui se simplifie en $P = X^3 + 3X^2 - 11$ donc $P(a^2+a-1) = 0$, ce qui prouve que a^2+a-1 est aussi algébrique car $P \in \mathbb{Z}[X]$.

60 **a.** Supposons que P et Q ont une racine commune et notons $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine commune de P et Q. Soit $U \in \mathrm{Im}\,(T_{P,Q})$, il existe donc $(R_1, R_2) \in \mathbb{C}_{p-1}[X] \times \mathbb{C}_{q-1}[X]$ tel que $U = T_{P,Q}(R_1,R_2) = PR_1 + QR_2$ donc $U(\alpha) = P(\alpha)R_1(\alpha) + Q(\alpha)R_2(\alpha) = 0$ donc $\mathrm{Im}\,(T_{P,Q}) \subset \{U \in \mathbb{C}_{p+q-1}[X] \mid U(\alpha) = 0\} = (X-\alpha)\mathbb{C}_{p+q-2}[X]$ et, par exemple, $1 \notin \mathrm{Im}\,(T_{P,Q})$ alors que $1 \in \mathbb{C}_{p+q-1}[X]$ donc $T_{P,Q}$ n'est pas surjective.

b. Par la contraposée de la question précédente, si on suppose que $T_{H',H}$ est inversible, alors $T_{H',H}$ est surjective donc H' et H n'ont aucune racine commune, ce qui prouve que toutes les racines de H sont simples. Ainsi, χ_M est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ par le théorème de d'Alembert-Gauss donc M est diagonalisable d'après le cours.

c.

61 **a.** Soit $N \in C_M$, $\exists P \in GL_2(\mathbb{R})$, $N = PMP^{-1}$ et $\text{Tr}\,(N) = \text{Tr}\,(PMP^{-1}) = \text{Tr}\,((MP)P^{-1}) = \text{Tr}\,(P^{-1}(MP))$ par propriété de la trace donc $\text{Tr}\,(N) = \text{Tr}\,((P^{-1}P)M) = \text{Tr}\,(M)$. De plus, par multiplicativité du déterminant des matrices carrées, $\det(N) = \det(PMP^{-1}) = \det(P)\det(M)\det(P^{-1}) = \det(M)$ car $\det(P^{-1}) = \dfrac{1}{\det(P)}$. La réciproque est fausse comme le montrent les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui ont même trace (0) et même déterminant (0) mais qui ne sont pas semblables car A est de rang 1 et B de rang 0.

b. Comme A est trigonalisable et pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ mais pas à racines simples donc il existe un réel a tel que $\chi_A = (X-a)^2$. Comme A est trigonalisable, la matrice A est semblable à $T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$. Si on prend $P_n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$, on a $P_n^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $M_n = P_nAP_n^{-1} = \begin{pmatrix} a & 2^nb \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_A^{\mathbb{N}}$ est non bornée car $||M_n||_\infty \geqslant 2^n|b|$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n|b| = +\infty$. Comme $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie, toutes les normes sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont équivalentes donc l'aspect borné de $\mathbb{C}_A$ ne dépend pas de la norme employée. De plus, si on prend les matrices $Q_n = P_n^{-1}AP_n \in C_A$, on a $Q_n = \begin{pmatrix} a & 2^{-n}b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ donc, en regardant case par case, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = D$ qui n'est pas dans C_A car A n'est pas diagonalisable alors que D l'est, la diagonalisabilité se conservant par similitude. Comme une suite d'éléments de C_A converge dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mais pas vers un élément de C_A, C_A n'est fermé.

c. Si A est diagonalisable, on a soit $\chi_A = (X-a)^2$ avec un réel a et alors A est semblable à aI_2 donc il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $A = P(aI_2)P^{-1} = aI_2$, soit $\chi_A = (X-a)(X-b)$ avec deux réels $a \neq b$ et A est semblable à $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

- Si $A = aI_2$ est une matrice d'homothétie, et si $M \in C_A$, comme avant, on a $M = A$ donc $C_A = \{aI_2\}$ est un singleton donc C_A est à la fois fermé et borné.
- Si $\text{Sp}(A) = \{a, b\}$ avec $a \neq b$, alors A est semblable à $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et toutes les matrices de C_A sont aussi semblables à D. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (C_A)^{\mathbb{N}}$ une suite de matrices de C_A qui converge vers une matrice M. D'après **a.**, $\text{Tr}\,(A_n) = \text{Tr}\,(A) = \text{Tr}\,(D) = a+b$ et $\det(A_n) = \det(A) = \det(D) = ab$. Par continuité de l'application linéaire Tr en dimension finie, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \text{Tr}\,(A_n) = \text{Tr}\,(M) = a+b$. De même, par continuité de l'application polynomiale $\det$ (par rapport aux coefficients de la matrice) en dimension finie (ou par multilinéarité de $\det$), on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \det(A_n) = \det(M) = ab$. Par conséquent, $\chi_M = X^2 - \text{Tr}\,(M)X + \det(M) = X^2 - (a+b)X + ab = (X-a)(X-b)$. Comme χ_M est scindé à racines simples, M est semblable à D, donc $M \in C_A$. Ainsi, C_A est fermé. Par contre, $B_n = \begin{pmatrix} a & n \\ 0 & b \end{pmatrix}$ vérifie $\chi_{B_n} = (X-a)(X-b)$ donc, à nouveau, $B_n \in C_A$ mais $||B_n||_\infty \geqslant n$ donc C_A n'est pas borné.

62 **a** Par hypothèse, il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $B = PDP^{-1}$. Mais comme A et B sont semblables, il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = QBQ^{-1}$. En reportant, on obtient $A = QPDP^{-1}Q^{-1}$. Comme P et Q sont inversibles, QP l'est aussi et $(QP)^{-1} = P^{-1}Q^{-1}$ donc la relation $A = (QP)D(QP)^{-1}$ prouve que A est aussi diagonalisable.

b. Comme $A = QBQ^{-1}$, $\chi_A = \det(XI_n - A) = \det(XQQ^{-1} - QBQ^{-1}) = \det(Q(XI_n - B)Q^{-1})$ donc $\chi_A = \det(Q)\det(XI_n - B)\det(Q^{-1}) = \chi_B$. Les valeurs propres d'une matrice sont les racines de son polynôme caractéristique, donc A et B ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes ordres de multiplicité algébriques.

c. Par calculs $\det(A) = \det(B) = 4 \neq 0$ donc $\text{rang}\,(A) = \text{rang}\,(B) = 3$, $\text{Tr}\,(A) = \text{Tr}\,(B) = 5$ et même $\chi_A = \chi_B = X^3 - 5X^2 + 8X - 4 = (X-2)^2(X-1)$ mais ce ne sont que des conditions nécessaires de similitude. Cherchons si les matrices A et B sont diagonalisables ou pas. Par un théorème du cours, puisque χ_A et χ_B sont scindés sur $\mathbb{R}$ et que $\dim(E_1(A)) = \dim(E_1(B)) = 1$ puisque 1 est une valeur propre simple de A et de B, A (resp. B) est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_2(A)) = 2$ (resp. $\dim(E_2(B)) = 2$). Or $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -12 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ donc on a clairement $\text{rang}\,(A - 2I_3) = 2$ alors que $\text{rang}\,(B - 2I_3) = 1$. D'après le théorème du rang, comme $E_2(A) = \text{Ker}(A - 2I_3)$ et $E_2(B) = \text{Ker}(B - 2I_3)$, on a donc les ordres de multiplicité géométriques de la valeur propre 2 : $\dim(E_2(A)) = 1$ et $\dim(E_2(B)) = 2$.

Ainsi, B est diagonalisable et A ne l'est pas. Si A et B étaient semblables, d'après **a.**, A et B seraient toutes les deux diagonalisables ou toutes les deux non diagonalisables. Ainsi, A et B ne sont pas semblables.

Pour aller plus loin, B est semblable à $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et on peut montrer, c'est la théorie hors programme de la réduction de JORDAN, que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Si on fait les calculs, on trouve $A = PTP^{-1}$ et $B = QDQ^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

63 **a.** L'application φ est bien définie de F dans F. Si $x = (x_0, \cdots, x_N) \in F$ et $x' = (x'_0, \cdots, x'_N) \in F$ et $(a, a') \in \mathbb{C}^2$, en notant $y = \varphi(x)$ et $y' = \varphi(x')$ comme dans l'énoncé avec $\forall k \in [\![0; N]\!]$, $y_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i x_i$ et $y'_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i x'_i$, si on note $z = (z_0, \cdots, z_N) = \varphi(ax + a'x')$, alors $\forall k \in [\![0; N]\!]$, $z_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i (ax_i + a'x'_i)$ donc $z_k = a \sum_{i=0}^{k} (-1)^i x_i + a' \sum_{i=0}^{k} (-1)^i x'_i = ay_k + a'y'_k$, ce qui prouve que $\varphi(ax + a'x') = a\varphi(x) + a'\varphi(x')$, donc que φ est linéaire. Ainsi, φ est un endomorphisme de F.

b. En notant $\mathcal{B}$ la base canonique de $F = \mathbb{C}^{N+1}$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & & & \vdots \\ 1 & -1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & (-1)^{N-1} & 0 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^{N-1} & (-1)^N \end{pmatrix}$ qui est triangulaire inférieure avec des colonnes tronquées de 1, puis de -1. Ainsi, $\chi_\varphi = (X-1)^a(X+1)^b$ avec $a = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + 1$ et $b = \left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor$ et on peut conclure que $\text{Sp}(\varphi) = \{-1, 1\}$ car $N + 1 \geqslant 2$.

Pour aller plus loin, si on cherche les sous-espaces propres de φ, on peut traiter deux cas :

Valeur propre 1 : soit $x = (x_0, \cdots, x_N) \in F$, $x \in E_1(\varphi) \Longleftrightarrow \varphi(x) = x \Longleftrightarrow \left(\forall k \in [\![0;N]\!],\ x_k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i x_i\right)$.

En soustrayant toutes les équations à celle qui suit, $\varphi(x) = x \Longleftrightarrow \left(\forall k \in [\![1;N]\!],\ (-1)^k x_k = x_k - x_{k-1}\right)$.

Si $\varphi(x) = x$ et si $k \in [\![2;N]\!]$ est pair, $x_k - x_{k-1} = x_k$ donc $x_{k-1} = 0$ et, si $k \in [\![1;N-1]\!]$ est impair, $x_k - x_{k-1} = -x_k$ donc $x_{k-1} = 2x_k = 0$ d'après le cas précédent.

• Si $\varphi(x) = x$ et N impair, on a donc $x_0 = \cdots = x_{N-2} = 0$ et $x_{N-1} = 2x_N$. Comme $\dim(E_1(\varphi)) \geqslant 1$, on conclut que $E_1(\varphi)$ est la droite engendrée par le vecteur $(0, \cdots, 0, 2, 1)$.

• Si $\varphi(x) = x$ et N pair, on a donc $x_0 = \cdots = x_{N-1} = 0$ et x_N quelconque donc $E_1(\varphi)$ est la droite engendrée par le vecteur $(0, \cdots, 0, 0, 1)$.

Valeur propre -1 : soit $(x_0, \cdots, x_N) \in F$, on a $\varphi(x) = -x \Longleftrightarrow \left(\forall k \in [\![0;N]\!],\ -x_k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i x_i\right)$.

En soustrayant comme avant, $\varphi(x) = -x \Longleftrightarrow \left(x_0 = 0 \text{ et } \forall k \in [\![1;N]\!],\ -x_k + x_{k-1} = (-1)^k x_k\right)$.

Si $\varphi(x) = -x$, on a $x_0 = 0$ et si $k \in [\![2;N]\!]$ est impair, il vient $-x_k + x_{k-1} = -x_k$ donc $x_{k-1} = 0$ et, si $k \in [\![1;N-1]\!]$ est pair, $-x_k + x_{k-1} = +x_k$ donc $x_{k-1} = 2x_k = 0$ d'après le cas précédent.

• Si $\varphi(x) = -x$ et N pair, on a donc $x_0 = \cdots = x_{N-2} = 0$ et $x_{N-1} = 2x_N$. Comme $\dim(E_{-1}(\varphi)) \geqslant 1$, on conclut que $E_{-1}(\varphi)$ est la droite engendrée par le vecteur $(0, \cdots, 0, 2, 1)$.

• Si $\varphi(x) = -x$ et N impair, on a donc $x_0 = \cdots = x_{N-1} = 0$ et x_N quelconque donc $E_{-1}(\varphi)$ est la droite engendrée par le vecteur $(0, \cdots, 0, 0, 1)$.

c. Comme en question **a.**, Φ est bien définie et Φ est un endomorphisme de E. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de Φ et $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \neq 0 \in E$ tel que $\Phi(x) = \lambda x$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_N \neq 0$. Si on ne peut pas prendre $N \geqslant 1$ c'est que x_0 est le seul terme non nul de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on a $x_0 = \lambda x_0$ donc $\lambda = 1$. Sinon, si x_0 n'est pas le seul terme nul de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en prenant $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_N \neq 0$, on a $y = (x_0, \cdots, x_N) \in F = \mathbb{C}^{N+1}$ et $\varphi(y) = \lambda y$ donc $\lambda = \pm 1$ d'après **b.**. Ainsi, $\mathrm{Sp}(\Phi) \subset \{-1, 1\}$.

d. Φ^2 est composé, en 0 et de 1 en damier sous la diagonale.

64 **a.** D'abord, f_n est linéaire par linéarité de la dérivation. De plus, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $P' \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $(\beta_1 X + \beta_0)P' \in \mathbb{R}_n[X]$, $P'' \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ donc $(\alpha_2 X^2 + \alpha_1 X + \alpha_0)P'' \in \mathbb{R}_n[X]$ et on a bien $f_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Ainsi, f_n est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Comme $f_n(1) = 0$ avec $1 \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\mathrm{Ker}(f_n) \neq \{0\}$ donc f_n n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. On a $f_n(1) = 0$, $f_n(X) = \beta_1 X + \beta_0$ et, pour $k \in [\![2;n]\!]$, il vient $f_n(X^k) = (\alpha_2 X^2 + \alpha_1 X + \alpha_0)k(k-1)X^{k-2} + (\beta_1 X + \beta_0)kX^{k-1} = k((k-1)\alpha_2 + \beta_1)X^k + k((k-1)\alpha_1 + \beta_0)X^{k-1} + k(k-1)\alpha_0 X^{k-2}$. Ainsi, $A_n = \mathrm{Mat}_{\,can}(f_n) = \begin{pmatrix} 0 & \beta_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_1 & 2\alpha_0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & 2(\alpha_2+\beta_1) & 0 & & \end{pmatrix}$. La matrice A_n est triangulaire supérieure avec des termes diagonaux tous différents donc χ_{f_n} est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc, par théorème, f_n est diagonalisable et tous les sous-espaces propres sont des droites.

c. récurrence sur n.

65 **a.** La famille $\mathcal{F} = (u_0, \cdots, u_{n-1})$ comporte n vecteurs dans $\mathbb{C}^n$ qui est de dimension n. La matrice

$P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ de la famille $\mathcal{F}$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ est , par définition, la matrice de VANDERMONDE $P = (\omega_{i-1}^{j-1})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comme les $\omega_0, \cdots, \omega_{n-1}$ sont les n racines n-ièmes de l'unité et qu'elles sont distinctes, on sait qu'alors $\det(P) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n-1} (\omega_j - \omega_i) \neq 0$ donc P est inversible. On en conclut que $\mathcal{F}$ est une base de E.

b. Avec la question précédente, on est amené à calculer $Ju_p = (\omega_1^p \ \omega_2^p \ \cdots \ \omega_{n-1}^p \ \omega_0^p) = \omega_1^p u_p = \omega_p u_p$ pour $p \in [\![0; n-1]\!]$. Comme $u_p \neq 0_E$, u_p est un vecteur propre associé à la valeur propre ω_p. Ainsi, il existe une base de E composée de vecteurs propres de J, ce qui prouve que J est diagonalisable et que $J = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(\omega_0 = 1, \omega_1, \cdots, \omega_{n-1})$. On aurait pu calculer le polynôme caractéristique de J, et trouver sans trop de difficultés $\chi_J = X^n - 1$ pour se lancer sur les recherche des sous-espaces propres associés.

c. La forme classique des matrices J^k se trouve par récurrence, et on peut écrire $C(a_0, \cdots, a_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k$. Or, d'après la question précédente, $J^k = PD^kP^{-1}$ donc $C(a_0, \cdots, a_{n-1}) = P\Big(\sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k\Big)P^{-1}$. Comme $D(a_0, \cdots, a_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k$ est diagonale, on peut conclure que $C(a_0, \cdots, a_{n-1})$ est diagonalisable et que son polynôme caractéristique vaut celui de $D(a_0, \cdots, a_{n-1})$, donc $\chi_{C(a_0,\cdots,a_{n-1})} = \prod_{j=0}^{n-1}\Big(X - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega_j^k\Big)$. Ainsi, $\text{Sp}(C(a_0, \cdots, a_{n-1})) = \Big\{\sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega_0^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k, \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega_1^k, \cdots, \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega_{n-1}^k\Big\}$ (avec répétition éventuelle).

66 **a.** $\chi_f = \chi_A = \begin{vmatrix} X & 1 & 0 & 0 \\ -1 & X & 0 & 0 \\ 0 & -1 & X & 2 \\ 0 & 0 & -1 & X \end{vmatrix}$ qui, par blocs, devient $\chi_f = \begin{vmatrix} X & 1 \\ -1 & X \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X & 2 \\ -1 & X \end{vmatrix} = (X^2+1)(X^2+2)$. Comme χ_f n'a aucune racine réelle, f n'est pas diagonalisable car χ_f n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

b. S'il existait une droite $D = \text{Vect}(e)$ stable par f, on aurait $f(e) \in D$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ f(e) = \lambda e$ et e serait un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ. Alors λ serait racine de χ_f ce qui impossible car les racines de χ_f sont dans $\{i, -i, 2i, -2i\}$. Par conséquent, il n'existe aucune droite de $\mathbb{R}^4$ stable par f.

c. S'il existait un hyperplan H de $\mathbb{R}^4$ stable par f, en prenant une base $\mathcal{B}' = (a, b, c)$ de H qu'on complète en une base $\mathcal{B} = (a, b, c, d)$ de $\mathbb{R}^4$, comme H est stable par f, on aurait $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par blocs, on aurait alors $\chi_f = \chi_A = (X - \lambda)\chi_B$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ serait racine de χ_f ce qui est à nouveau impossible. Ainsi, il n'existe aucun hyperplan de $\mathbb{R}^4$ stable par f.

d. Comme f et $f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^4}$ commutent car $f \circ (f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^4}) = (f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^4}) \circ f = f^3 + f$, on sait d'après le cours que $\text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^4})$ est stable par f. De même, f et $f^2 + 2\text{id}_{\mathbb{R}^4}$ commutent donc $\text{Ker}(f^2 + 2\text{id}_{\mathbb{R}^4})$ est stable par f. Or $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ donc $A^2 + I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est clairement de rang 2 et, avec la formule du rang, $\dim(\text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^4})) = 4 - 2 = 2$ donc $\text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^4}) = \text{Vect}(e_1 + e_3, e_2 + e_4)$ est un plan stable par f. De même, $A^2 + 2I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est aussi de rang 2 d'où $\dim(\text{Ker}(f^2 + 2\text{id}_{\mathbb{R}^4})) = 4 - 2 = 2$

et $\mathrm{Ker}(f^2+2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}) = \mathrm{Vect}(e_3, e_4)$ est un plan stable par f.

e. Il n'y a qu'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 0 et c'est $\{0\}$ qui est stable par f.

Il n'y a qu'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 4 et c'est $\mathbb{R}^4$ qui est stable par f.

On a vu en **b.** et **c.** qu'il n'y avait aucun sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 1 ou 3 stable par f.

Soit P un plan de $\mathbb{R}^4$ stable par f et $f_P : P \to P$ l'endomorphisme induit par f dans P, il est défini par $f_P(x) = f(x)$ pour $x \in P$. On a vu dans le cours qu'alors χ_{f_P} divise χ_f. Or χ_{f_P} est un polynôme réel unitaire de degré 2 car $\dim(P) = \deg(f_P) = 2$ donc, avec la question **a.**, on a soit $\chi_{f_P} = X^2+1$, soit $\chi_{f_P} = X^2+2$.

- Si $\chi_{f_P} = X^2+1$, par CAYLEY-HAMILTON, on a $f_P^2 + \mathrm{id}_P = 0$ donc $\forall x \in P,\ f^2(x) + x = 0$, ce qui montre que $P \subset \mathrm{Ker}(f^2+\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$. Par inclusion et égalité des dimensions, on a donc $P = \mathrm{Ker}(f^2+\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$.
- Si $\chi_{f_P} = X^2+2$, par CAYLEY-HAMILTON, on a $f_P^2+2\mathrm{id}_P = 0$ donc $\forall x \in P,\ f^2(x)+2x = 0$, ce qui montre que $P \subset \mathrm{Ker}(f^2+2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$. Par inclusion et égalité des dimensions, on a donc $P = \mathrm{Ker}(f^2+2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$.

Ainsi, il y a seulement 4 sous-espaces de $\mathbb{R}^4$ stables par f : $\{0\}$, $\mathrm{Ker}(f^2+\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$, $\mathrm{Ker}(f^2+2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$ et $\mathbb{R}^4$.

67 Tout d'abord, A_n est symétrique réelle donc elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral.

a. $A_1 = (\,1\,)$ donc $\chi_{A_1} = P_1 = X-1$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ d'où $\chi_{A_2} = P_2 = (X-1)(X-2)-1 = X^2-3X+1$ et $P_2 = (X-1)P_1 - X$ est bien vérifié qui correspond à $P_{n+1} = (X-n)P_n - X(X-1)\cdots(X-n+1)$ pour $n=1$.
Si $n \geqslant 2$, dans le calcul du déterminant $P_{n+1} = \chi_{A_{n+1}}$, on effectue les opérations de GAUSS $C_k \longleftarrow C_k - C_1$ pour $k \in [\![2; n+1]\!]$ et on a $P_{n+1} = \begin{vmatrix} X-1 & -X & \cdots & \cdots & -X \\ -1 & X-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & X-2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & X-n \end{vmatrix}$. On développe ensuite par rapport à la dernière colonne et il vient $P_{n+1} = (X-n)P_n + (-1)^{n+2}(-X)\begin{vmatrix} -1 & X-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & X-2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & X-n+1 \\ -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

Dans ce dernier déterminant, après développement par rapport à la dernière ligne, on obtient la relation $P_{n+1} = (X-n)P_n + (-1)^{n+1}X(-1)^{n+1}(-1)\prod_{k=1}^{n-1}(X-k)$ donc $P_{n+1} = (X-n)P_n - \prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$.

b. <u>Initialisation</u> : d'après la question **a.**, $P_2 = X^2-3X+1$ vérifie bien $(-1)^0P_2(0) = 1$, $(-1)^1P_2(1) = 1$ ont le même signe que $P_2(0) = 1$ qui est du signe de $(-1)^2$ et on a $P_2(1) = -1 < 0$ et $P_2(2) = -1 < 0$.

<u>Hérédité</u> : soit $n \geqslant 3$, supposons que $\forall k \in [\![0; n-2]\!]$, le réel $(-1)^kP_{n-1}(k)$ a le même signe que $P_{n-1}(0)$ qui est du signe de $(-1)^{n-1}$ et que $P_n(n-1) < 0$ et $P_n(n) < 0$. D'après **a.**, $P_n(0) = -(n-1)P_{n-1}(0)$ a un signe opposé à celui de $P_{n-1}(0)$, donc du signe de $(-1)^n$. Pour $k \in [\![1; n-2]\!]$, $(-1)^kP_n(k) = -(-1)^k(n-k-1)P_{n-1}(k)$ donc $(-1)^kP_n(k) = -(n-k-1)(-1)^kP_{n-1}(k)$ est du signe opposé à celui de $(-1)^kP_{n-1}(k)$, donc du signe opposé à celui de $(-1)^{n-1}$ par hypothèse de récurrence, donc du signe de $(-1)^n$. De plus, pour $k = n-1$, $(-1)^{n-1}P_n(n-1) = -(-1)^{n-1}(n-1)(n-2)\cdots 1 = (-1)^n(n-1)!$ est bien du signe de $(-1)^n$. Enfin, $P_n(n-1) = -(n-1)! < 0$ et $P_n(n) = P_{n-1}(n) - n! < 0$.

Conclusion : on a montré par principe de récurrence que $\forall n \geqslant 2,\ \forall k \in [\![0;n-1]\!],\ (-1)^k P_n(k)$ a le même signe que $P_n(0)$ qui a le même signe que $(-1)^n$ et $P_n(n-1) < 0$ et $P_n(n) < 0$.

c. Comme P_n est une fonction continue et que P_n change strictement de signe sur tous les intervalles $]0;1[$, $]1;2[$, ...,$]n-2;n-1[$ d'après ce qui précède, par le théorème des valeurs intermédiaires, P_n s'annule au moins une fois sur tous les intervalles $]0;1[$, $]1;2[$, ...,$]n-2;n-1[$, ce qui fait déjà $n-1$ racines distinctes de P_n. De plus, $P_n(n) < 0$ et, comme P_n est unitaire et de degré n, $\lim\limits_{t\to+\infty} P_n(t) = +\infty$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires encore, P_n s'annule au moins une fois sur $]n;+\infty[$, ce qui fait en tout n racines distinctes de P_n qui est de degré n.
Comme $P_n = \chi_{A_n}$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, la matrice A_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec n valeurs propres réelles distinctes et tous ses sous-espaces propres sont des droites.

68 **a.** Pour $P \in \mathbb{R}_4[X]$, on a $\deg(P) \leqslant 4$ donc $\deg(P') \leqslant 3$ et, si on écrit $P' = aX^3 + bX^2 + cX + d$, on a $P'(X+1) - P'(X) = a((X+1)^3 - X^3) + b(X+1)^2 + c(X+1) + d - bX^2 - cX - d$ qui se développe pour avoir $P'(X+1) - P'(X) = a(3X^2+3X+1) + b(X+1)^2 + c(X+1) + d - bX^2 - cX - d$ donc $\deg(P'(X+1) - P'(X)) \leqslant 2$ d'où $\deg(\Phi(P)) = 2 + \deg(P'(X+1) - P'(X)) \leqslant 4$ et $\Phi(P) \in \mathbb{R}_4[X]$. Comme ϕ est linéaire par linéarité de la dérivation des polynômes, Φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.

Pour $P \in \mathrm{Ker}(\Phi)$, comme $X^2 \neq 0$, on a $P'(X+1) = P'(X)$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ P'(n) = P'(0)$ donc le polynôme $P' - P'(0)$ admet une infinité de racines, il est donc nul et $P'(X) = P'(0)$ est constant donc $P \in \mathbb{R}_1[X]$. Réciproquement, si $P = aX + b$, on a $\Phi(P) = X^2(a - a) = 0$ donc $P \in \mathrm{Ker}(\Phi)$.

Par double inclusion, on a donc $\mathrm{Ker}(\Phi) = \mathbb{R}_1[X]$.

b. $\Phi(1) = \Phi(X) = 0$ avec **a.** et $\Phi(X^2) = 2X^2$, $\Phi(X^3) = 6X^3 + 3X^2$, $\Phi(X^4) = 12X^4 + 12X^3 + 4X^2$ par calculs donc, en notant $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3, X^4)$ la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$, on a $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

Comme A est triangulaire supérieure, on a $\chi_\Phi = \chi_A = X^2(X-2)(X-6)(X-12)$ donc $\mathrm{Sp}(\Phi) = \{0, 2, 6, 12\}$.

c. Si $P \in F$, on a $\Phi(P) = X^2(P'(X+1) - P'(X)) \in X^2\,\mathbb{R}_2[X]$ d'après **a.** donc $\Phi(P) \in F$ ce qui prouve que $F = \mathrm{Vect}(X^2, X^3, X^4)$ est un sous-espace de $\mathbb{R}_4[X]$ stable par Φ. De plus, comme $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3, X^4)$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$, $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathrm{Vect}(\Phi(1), \Phi(X), \Phi(X^2), \Phi(X^3), \Phi(X^4)) = \mathrm{Vect}(X^2, 3X^2 + 6X^3, 4X^2 + 12X^3 + 12X^4) = F$.

d. D'après **a.**, $\mathrm{Ker}(\Phi) = \mathrm{Vect}(1, X) = \mathbb{R}_1[X]$ et $F = \mathrm{Vect}(X^2, X^3, X^4)$. Comme $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3, X^4)$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$, on en déduit que $\mathbb{R}_4[X] = \mathrm{Ker}(\Phi) \oplus F = \mathrm{Ker}(\Phi) \oplus \mathrm{Im}(\Phi)$.

e. On a vu en **a.** que $\dim(E_0(\Phi)) = \dim(\mathrm{Ker}(\Phi)) = 2$ vaut la multiplicité de 0 dans χ_Φ. Les autres valeurs propres de Φ, à savoir $2, 6, 12$, sont simples donc, d'après le cours, la dimension de l'espace propre associé vaut 1. Ainsi, $E_2(\Phi)$, $E_6(\Phi)$ et $E_{12}(\Phi)$ sont des droites. Comme χ_Φ est scindé sur $\mathbb{R}$ et que les ordres de multiplicité de chacune des valeurs propres vaut la dimension du sous-espace propre associé, l'endomorphisme Φ est diagonalisable.

- On a déjà vu que $E_0(\phi) = \mathbb{R}_1[X] = \mathrm{Vect}(1, X)$.
- Avec les calculs de la question **b.**, on a aussi $E_2(\Phi) = \mathrm{Vect}(X^2)$.

• Comme $A-6I_5=\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, on “voit” que $E_6(\Phi)=\mathrm{Vect}(3X^2+4X^3)$.

• Comme $A-12I_5=\begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $E_{12}(\Phi)=\mathrm{Vect}(X^2+2X^3+X^4)$.

69 **a.** On a $g(x_1,x_2)=x_1\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x_2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x_1 \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}x_2\begin{vmatrix} x_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ x_1 & x_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ en développant ce déterminant par rapport à la première colonne donc $g(x_1,x_2)=x_1^n+(-1)^{n+1}x_2^n$.

b. Par inégalité triangulaire, $\forall (x_1,x_2)\in\mathbb{U}^2,\ |g(x_1,x_2)|\leqslant |x_1|^n+|x_2|^n=2$ donc g est bornée sur $\mathbb{U}^2$. De plus, avec $x_1=1$ et $x_2=1$ si n est impair ou $x_1=1$ et $x_2=-1$ si n est pair, $g(x_1,x_2)=2$ donc $\underset{\mathbb{U}^2}{\mathrm{Max}}(|g|)=2$. On a $\forall (x_1,x_2)\in\mathbb{U}^2,\ (|g(x_1,x_2)|=2)\iff(\exists\lambda\in\mathbb{R}_+^*,\ x_1^n=\lambda(-1)^{n+1}x_2^n)$ par le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire. Or ces deux complexes x_1^n et $(-1)^{n+1}x_2^n$ sont de module 1 si $(x_1,x_2)\in\mathbb{U}^2$ donc cette équivalence se transforme en $\forall (x_1,x_2)\in\mathbb{U}^2,\ |g(x_1,x_2)|=2\iff x_1^n=(-1)^{n+1}x_2^n\iff\Big(-\dfrac{x_2}{x_1}\Big)^n=-1$. On connaît les racines n-ièmes de -1, ce qui donne $\forall (x_1,x_2)\in\mathbb{U}^2,\ |g(x_1,x_2)|=2\iff\Big(\exists k\in[\![0;n-1]\!],\ -\dfrac{x_2}{x_1}=e^{\frac{i\pi}{n}+\frac{2ik\pi}{n}}\Big)$. Il existe donc une infinité de couples $(x_1,x_2)\in\mathbb{U}^2$ tels que $|g(x_1,x_2)|=2$, ce sont tous les couples s'écrivant $(x_1,x_2)=\Big(e^{i\theta},-e^{i\theta+\frac{i\pi}{n}+\frac{2ik\pi}{n}}\Big)$ où $\theta\in[0;2\pi[$ et $k\in[\![0;n-1]\!]$.

c. $\forall t\in\mathbb{R},\ h(t)=g(t,1-t)=t^n+(-1)^{n+1}(1-t)^n$ donc h est polynomiale, donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Posons, pour $n\in\mathbb{N}^*$, les fonctions $a_n:t\mapsto t^n+(1-t)^n$ et $b_n:t\mapsto t^n-(1-t)^n$.

Initialisation : la fonction $a_1:t\mapsto 1$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$. La fonction $b_1:t\mapsto 2t-1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, strictement négative sur $\Big]-\infty;\dfrac{1}{2}\Big[$ et strictement positive sur $\Big]\dfrac{1}{2};+\infty\Big[$. La fonction $a_2:t\mapsto 2t^2-2t+1$ vérifie $a_2'(t)=2(2t-1)=2b_1(t)$ donc a_2 est strictement décroissante sur $\Big]-\infty;\dfrac{1}{2}\Big[$ et strictement décroissante sur $\Big]\dfrac{1}{2};+\infty\Big[$ et elle reste strictement positive sur $\mathbb{R}$ car $a_2(1/2)>0$.

Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que

Traitons deux cas :

-
-

70 ($\Longrightarrow$) Supposons A diagonalisable et traitons deux cas :

• Soit A n'admet qu'une seule valeur propre $\lambda\in\mathbb{C}$. Alors $A=P(\lambda I_2)P^{-1}$ avec P inversible donc $A=\lambda I_2$. Soit Q un polynôme complexe non constant. D'après le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS, le polynôme $Q-\lambda$ admet une racine complexe puisqu'il n'est pas constant. Ainsi, il existe $\alpha\in\mathbb{C}$ tel que $Q(\alpha)=\lambda$. Il suffit de prendre $M=\alpha I_2$ pour avoir $Q(M)=Q(\alpha)I_2=\lambda I_2=A$.

• Soit A admet deux valeurs propres complexes $\lambda_1 \neq \lambda_2$. En notant $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, il existe une matrice inversible $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$. Soit Q un polynôme complexe non constant, comme ci-dessus il existe des complexes α_1 et α_2 tels que $Q(\alpha_1) = \lambda_1$ et $Q(\alpha_2) = \lambda_2$ (autrement dit $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est surjective). Il suffit de prendre $M = P \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} P^{-1}$ pour avoir $Q(M) = P \begin{pmatrix} Q(\alpha_1) & 0 \\ 0 & Q(\alpha_2) \end{pmatrix} P^{-1} = PDP^{-1} = A$.

($\Longleftarrow$) Supposons A non diagonalisable, alors χ_A ne peut pas être scindé à racines simples donc $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda\}$, $\chi_A = (X-\lambda)^2$ et $\dim(E_\lambda(A)) = 1$. Comme χ_A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ A est trigonalisable donc il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\mu \neq 0$.

Pour réduire "à la Jordan" et avoir 1 à la place de μ : si on note $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A, on a donc par Cayley-Hamilton $(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2})^2 = 0$ donc $\mathrm{Im}\,(u - \lambda\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}) \subset \mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2})$. Puisque $\dim(E_\lambda(A)) = 1$, par le théorème du rang, on a $\dim(\mathrm{Im}\,(u - \lambda\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2})) = \dim(\mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2})) = 1$ donc $\mathrm{Im}\,(u - \lambda\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}) = \mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2})$. Si on prend $v_1 \in \mathbb{C}^2$ tel que $\mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}) = \mathrm{Vect}(v_1)$, alors il existe donc $v_2 \in \mathbb{C}^2$ tel que $(u - \lambda\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2})(v_2) = v_1$. Comme $v_2 \notin \mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2})$, la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ est libre donc c'est une base de $\mathbb{C}^2$. Par construction, comme $u(v_1) = \lambda v_1$ et $u(v_2) - \lambda v_2 = v_1$, il vient $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. En notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^2$ à $\mathcal{B}$, on a par la formule de changement de base, on a $A = PTP^{-1}$.

Prenons le polynôme non constant $Q = X^2 + \lambda$ et supposons l'existence d'une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $Q(M) = A$. Posons $N = P^{-1}MP$ de sorte que $M = PNP^{-1}$. On a la suite suivante d'équivalences : $Q(M) = M^2 + \lambda I_2 = A \Longleftrightarrow P(N^2 + \lambda I_2)P^{-1} = PTP^{-1} \Longleftrightarrow N^2 + \lambda I_2 = A \Longleftrightarrow N^2 = \mu E_{2,1}$. Comme $E_{2,1}^2 = 0$, on a $N^4 = 0$ donc N est nilpotente. Or, il est classique que $\chi_N = X^2$ (seul 0 est valeur propre de N) donc $N^2 = 0$ par Cayley-Hamilton. Ceci impose donc $E_{2,1} = 0$ qui est absurde.

Par double implication : A diagonalisable $\Longleftrightarrow (\forall Q \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}_0[X],\ \exists M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ Q(M) = A)$.

71 **a.** Après l'opération de Gauss par blocs $C_1 \longleftarrow C_1 - C_2$, $\chi_B = \begin{vmatrix} XI_n - A & -A \\ -A & XI_n - A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} XI_n & -A \\ -XI_n & XI_n - A \end{vmatrix}$. Puis $L_2 \longleftarrow L_2 + L_1$ et $\chi_B = \begin{vmatrix} XI_n & -A \\ 0 & XI_n - 2A \end{vmatrix} = X^n \chi_{2A}$ car cette matrice est triangulaire par blocs. Or $\chi_{2A} = \det(XI_n - 2A) = 2^n \det\Big(\dfrac{X}{2} - A\Big) = 2^n \chi_A\Big(\dfrac{X}{2}\Big)$ donc $\chi_B = 2^n X^n \chi_A\Big(\dfrac{X}{2}\Big)$ ce qui montre que $\mathrm{Sp}(B) = \{0\} \cup (2\,\mathrm{Sp}(A))$, que l'on parle du spectre réel ou du spectre complexe. Traitons deux cas en prenant $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ avec $(X_1, X_2) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$:

- • Si $\lambda = 0$, $BX = \lambda X = 0 \Longleftrightarrow (AX_1 + AX_2 = 0) \Longleftrightarrow A(X_1 + X_2) = 0 \Longleftrightarrow (X_1 + X_2 \in \mathrm{Ker}(A))$ donc $BX = 0 \Longleftrightarrow (\exists Y \in \mathrm{Ker}(A),\ X_2 = Y - X_1)$ ce qui donne une écriture paramétrique du noyau de B, à savoir $\mathrm{Ker}(B) = E_0(B) = \{(X_1, Y - X_1) \mid (Y, X_1) \in \mathrm{Ker}(A) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}$. Ainsi, comme l'application $\varphi : \mathrm{Ker}(A) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Ker}(B)$ définie par $\varphi(Y, X_1) = (X_1, Y - X_1)$ est linéaire et bijective d'après ce qui précède, on a $\dim(E_0(B)) = \dim\big(\mathrm{Ker}(A) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big) = n + \dim(E_0(A))$.
- • Si $\lambda \neq 0$, $BX = \lambda X \Longleftrightarrow (AX_1 + AX_2 = \lambda X_1 = \lambda X_2) \Longleftrightarrow (X_1 = X_2,\ AX_1 = \dfrac{\lambda}{2} X_1)$ ce qui donne $BX = \lambda X \Longleftrightarrow (X_1 = X_2$ et $X_1 \in E_{\lambda/2}(A))$. Comme l'application $\psi_\lambda : E_{\lambda/2}(A) \to E_\lambda(B)$ définie par $\psi(X_1) = (X_1, X_1)$ est linéaire et bijective d'après ce qui précède, $\dim(E_\lambda(B)) = \dim(E_{\lambda/2}(A))$.

b. B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ (on suppose que c'est la question) si et seulement si $\mathbb{R}^{2n} = \bigoplus_{\lambda \in Sp(B)} E_\lambda(B)$ par définition. En passant aux dimensions, la matrice B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ si et seulement si $2n = \sum_{\lambda \in Sp(B)} \dim(E_\lambda(B)) = \dim(E_0(B)) + \sum_{\lambda \in Sp(B), \lambda \neq 0} \dim(E_\lambda(B))$. D'après la question précédente, B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ si et seulement si $2n = n + \dim(E_0(A)) + \sum_{\mu \in Sp(A), \mu \neq 0} \dim(E_\mu(A))$ en posant $\mu = \dfrac{\lambda}{2}$. Comme on a $2n = n + \dim(E_0(A)) + \sum_{\mu \in Sp(A), \mu \neq 0} \dim(E_\mu(A)) \iff \sum_{\mu \in Sp(A)} \dim(E_\mu(A)) = n$, on trouve finalement que B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ si et seulement si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

72 **a.** Par linéarité de la trace, $\mathrm{Tr}\,(AB - BA) = \mathrm{Tr}\,(AB) - \mathrm{Tr}\,(BA) = \mathrm{Tr}\,(B) = 0$ car $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$ d'après le cours. Si B était inversible, on aurait $A - BAB^{-1} = I_n$ en multipliant $AB - BA = B$ par B^{-1} à droite. On aurait donc $\mathrm{Tr}\,(A - BAB^{-1}) = \mathrm{Tr}\,(A) - \mathrm{Tr}\,(BAB^{-1}) = n$ ce qui est impossible car BAB^{-1} étant semblable à A, on a $\mathrm{Tr}\,(BAB^{-1}) = \mathrm{Tr}\,(A)$. Ainsi, B n'est pas inversible.

b. <u>Initialisation</u> : pour $k = 0$, $AB^0 - B^0A = 0.B^0$ car $B^0 = I_n$. Pour $k = 1$, $AB^1 - B^1A = AB - BA = B = 1.B^1$.
<u>Hérédité</u> : soit $k \geqslant 1$, supposons que $AB^k - B^kA = kB^k$, alors $AB^{k+1} = AB^k \times B = (B^kA + kB^k) \times B$ par hypothèse de récurrence donc $AB^{k+1} = AB^k \times B = (B^kA + kB^k) \times B = B^k \times AB + kB^{k+1}$. Mais comme $AB = BA + B$, en reportant, on a $AB^{k+1} = B^k \times (BA + B) + kB^{k+1} = B^{k+1}A + (k+1)B^{k+1}$ qui s'écrit aussi $AB^{k+1} - B^{k+1}A = (k+1)B^{k+1}$.

Par principe de récurrence, on a montré que $\forall k \in \mathbb{N},\ AB^k - B^kA = kB^k$.

c. Soit $L : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $L(M) = AM - MA$. Il est clair que L est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Or la question précédente montre que $\forall k \in \mathbb{N},\ L(B^k) = kB^k$ ce qui prouve que k est une valeur propre de L si $B^k \neq 0$. Comme il est impossible qu'un endomorphisme en dimension finie ($\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = n^2$) ait une infinité de valeurs propres, il existe forcément une valeur $k \in \mathbb{N}^*$ telle que $B^k = 0$. Par conséquent, B est bien nilpotente.

73 **a.** Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A, il existe un vecteur colonne $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{C}),\ AX = \lambda X$. On a donc $A^2X = A(AX) = \lambda AX = \lambda^2 X$ puis $A^3X = \lambda^3 X$ donc $(A^3 + 9A)X = (\lambda^3 + 9\lambda)X = 0$ donc $\lambda^3 + 9\lambda = 0$ car $X \neq 0$. Ainsi, $\lambda(\lambda - 3i)(\lambda + 3i) = 0$ ce qui montre que $\lambda \in \{0, 3i, -3i\}$. Par conséquent, $Sp(A) \subset \{0, 3i, -3i\}$.

b. Le polynôme $X^3 + 9X = X(X - 3i)(X + 3i)$ est annulateur de A et scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$ donc, d'après le cours, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

c. Si A était diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, son spectre serait non vide et inclus dans $\mathbb{R}$ donc, d'après la question **a.**, on aurait $Sp(A) = \{0\}$. On aurait donc $\mathbb{R}^n = E_0(A) = \mathrm{Ker}(A)$ d'où $A = 0$ qui est exclu par l'énoncé. Ainsi, A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

d. <u>Méthode 1</u> : $A^3 + 9A = 0$ s'écrit aussi $A(A^2 + 9I_n) = 0$. Si A était inversible, on aurait $A^2 + 9I_n = 0$ donc $A^2 = -9I_n$. On aurait donc $\det(A^2) = \det(A)^2 = \det(-9I_n) = (-9)^n < 0$, ce qui est absurde. Ainsi, A n'est pas inversible si n est impair.

<u>Méthode 2</u> : comme A est réelle, $m_{3i}(A) = m_{-3i}(A)$ car $-3i = \overline{3i}$ donc, comme $Sp(A) \subset \{0, 3i, -3i\}$, on a $n = m_0(A) + m_{3i}(A) + m_{-3i}(A)$ d'où $m_0(A) = \dim(E_0(A)) = n - 2m_{3i}(A)$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(A))$ est impair donc $\mathrm{Ker}(A) \neq \{0\}$ donc A n'est pas inversible si n impair.

Méthode 3 : $\mathrm{deg}(\chi_A)$ est impair et χ_A est unitaire donc $\lim\limits_{t\to-\infty}\chi_A(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\chi_A(t) = +\infty$ et, comme χ_A est continue car polynomiale, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, χ_A s'annule sur $\mathbb{R}$ donc en 0 car $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, 3i, -3i\}$. Comme 0 est valeur propre de A, A n'est pas inversible si n impair.

Par contre, si $n = 2$ par exemple, en posant $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$, on a $A^2 = -9I_2$ donc $A^3 + 9A = 0$.

74 **a.** On calcule $\chi_{A_\alpha} = \begin{vmatrix} X-1 & -\alpha & 0 \\ 0 & X-1 & -1 \\ -1 & 0 & X+1 \end{vmatrix} = (X-1)^2(X+1) - \alpha = X^3 - X^2 - X + 1 - \alpha$ par SARRUS. La fonction $f : t \mapsto t^3 - t^2 - t + 1 - \alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(t) = 3t^2 - 2t - 1 = (3t+1)(t-1)$ donc f est croissante sur $\left]-\infty; -\frac{1}{3}\right]$, décroissante sur $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.

Comme $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1 - \alpha = \frac{32}{27} - \alpha$ et $f(1) = -\alpha$, d'après le tableau de variations de f :

- Si $\alpha < 0$, f s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$, en $x_1 \in \left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[$. Alors $\mathrm{Sp}(A_\alpha) = \{x_1\}$.
- Si $\alpha = 0$, $f : t \mapsto (t-1)^2(t+1)$ s'annule en 1 et -1 donc $\mathrm{Sp}(A_0) = \{-1, 1\}$.
- Si $\alpha \in \left]0; \frac{32}{27}\right[$, f s'annule en $x_1 \in \left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[$, $x_2 \in \left]-\frac{1}{3}; 1\right[$ et $x_3 \in]1; +\infty[$ et $\mathrm{Sp}(A_\alpha) = \{x_1, x_2, x_3\}$.
- Si $\alpha = \frac{32}{27}$, $f : t \mapsto t^3 - t^2 - t - \frac{5}{27} = \left(t + \frac{1}{3}\right)^2\left(t - \frac{5}{3}\right)$ s'annule en $-\frac{1}{3}$ et $\frac{5}{3}$ donc $\mathrm{Sp}(A_{32/27}) = \left\{-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right\}$.
- Si $\alpha > \frac{32}{27}$, f s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$, en $x_1 \in]1; +\infty[$. Alors $\mathrm{Sp}(A_\alpha) = \{x_1\}$.

b. Avec le spectre trouvé à la question **a**, on considère cinq cas :

- Si $\alpha < 0$, χ_{A_α} n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ car x_1 est simple donc A_α n'est pas diagonalisable.
- Si $\alpha = 0$, χ_{A_0} est scindé sur $\mathbb{R}$ et $A_0 - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ est de rang 2 donc, avec la formule du rang, $\dim(E_1(A_0)) = 1 \neq 2 = m_1(A_0)$ donc A_0 n'est pas diagonalisable.
- Si $\alpha \in \left]0; \frac{32}{27}\right[$, χ_{A_α} est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le cours, A_α est diagonalisable.
- Si $\alpha = \frac{32}{27}$, $\chi_{A_{32/27}}$ est scindé sur $\mathbb{R}$ et $A_{32/27} + \frac{I_3}{3} = \begin{pmatrix} 4/3 & 32/27 & 0 \\ 0 & 4/3 & 1 \\ 1 & 0 & -2/3 \end{pmatrix}$ est de rang 2 donc $\dim(E_{-1/3}(A_{32/27})) = 1 \neq 2 = m_{-1/3}(A_{32/27})$ donc $A_{32/27}$ n'est pas diagonalisable.
- Si $\alpha > \frac{32}{27}$, χ_{A_α} n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ car x_1 est simple donc A_α n'est pas diagonalisable.

Ainsi, A_α est diagonalisable si et seulement si $\alpha \in \left]0; \frac{32}{27}\right[$.

75 **a.** Toutes les colonnes de cette matrice sont égales à la première qui n'est pas nulle donc $\mathrm{rang}\,(A) = 1$.

b. Par la formule du rang $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 4 - \mathrm{rang}\,(A) = 3$ donc l'ordre de multiplicité de 0 dans χ_A est supérieur ou égal à 3 donc $\chi_A = X^3(X - \mathrm{Tr}\,(A)) = X^3(X - 2a - 2)$ d'après le cours. Traitons deux cas :

- Si $a = -1$, $\chi_A = X^4$ donc A est nilpotente d'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON mais ce n'est pas utile ici. Par contre, $\dim(E_0(A)) = 3 < m_0(A) = 4$ donc A n'est pas diagonalisable, ni dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, ni dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$. D'ailleurs, la seule matrice nilpotente diagonalisable est la matrice nulle.
- Si $a \neq -1$, comme $m_{2a+2}(A) = 1$, on a $\dim(E_{2a+2}(A)) = 1$ donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ car χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ et les ordres de multiplicité algébriques et géométriques sont égaux.

Par conséquent, la matrice A est diagonalisable si et seulement si $a \neq -1$ et, dans ce cas, $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 2a+2\}$ avec $E_{2a+2}(A) = \mathrm{Im}\,(A)$ (inclusion et égalité des dimensions) donc $E_{2a+2}(A) = \mathrm{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = (a, 1, a, 1)$. De plus, une équation de l'hyperplan $E_0(A)$ est $x + y + z + t = 0$ donc $E_0(A) = \mathrm{Vect}(v_2, v_3, v_4)$ avec, par exemple, $v_2 = (1, -1, 0, 0)$, $v_3 = (1, 0, -1, 0)$ et $v_4 = (1, 0, 0, -1)$.

a. Comme A est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 2a+2\}$, le polynôme $P = X(X - 2a - 2)$ est annulateur de A. Ainsi, on a la relation $A^2 = (2a+2)A$.

Méthode 1 : par récurrence :

Initialisation : d'abord $A^1 = A = (2a+2)^0 A$ et $A^2 = (2a+2)^1 A$.

Hérédité : si, pour un entier $p \geqslant 1$, on a $A^p = (2a+2)^{p-1}A$, alors $A^{p+1} = (2a+2)^{p-1}A^2 = (2a+2)^p A$.

Par principe de récurrence, on a donc $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ A^p = (2a+2)^{p-1}A$.

Méthode 2 : soit $p \in \mathbb{N}^*$, on écrit $X^p = Q_p P + R_p$ la division euclidienne de X^p par P avec $R_p = a_p X + b_p$ car $\deg(R_p) < \deg(P) = 2$. En évaluant en 0 et en $2a+2$, on obtient $b_p = 0$ et $(2a+2)a_p = (2a+2)^p$ donc $a_p = (2a+2)^{p-1}$. On évalue en A et on a directement $A^p = Q_p(A)P(A) + R_p(A) = R_p(A) = (2a+2)^{p-1}A$ car P est annulateur de A.

76 D'après la formule du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - \mathrm{rang}\,(A) = n - 2$ et on sait d'après le cours que l'ordre de multiplicité $m_0(A)$ de 0 dans χ_A vérifie alors $n - 2 \leqslant m_0(A) \leqslant n$ car $\mathrm{Ker}(A) = E_0(A)$. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$ donc il existe deux complexes λ, μ tels que $\chi_A = X^{n-2}(X-\lambda)(X-\mu)$ (on peut avoir $\lambda = \mu$, $\lambda = 0$ et/ou $\mu = 0$). Comme χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$, on sait que $\mathrm{Tr}\,(A)$ est la somme des valeurs propres comptées avec leurs ordres de multiplicité donc $\mathrm{Tr}\,(A) = 0 = (n-2).0 + \lambda + \mu$ d'où $\mu = -\lambda$ et on a donc $\chi_A = X^{n-2}(X - \lambda)(X + \lambda)$. Traitons deux cas :

Si $\lambda = 0$, alors $\chi_A = X^n$ et, d'après Cayley-Hamilton, $A^n = 0$ ce qui est contraire à l'énoncé.

Si $\lambda \neq 0$, alors $\chi_A = X^{n-2}(X - \lambda)(X + \lambda)$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \{-\lambda, 0, \lambda\}$ avec $\dim(E_0(A)) = n - 2 = m_0(A)$, $\dim(E_\lambda(A)) = 1 = m_\lambda(A)$ et $\dim(E_\lambda(A)) = 1 = m_\lambda(A)$ car λ et $-\lambda$ sont des racines simples de χ_A. Ainsi, d'après le cours A est diagonalisable.

Par conséquent, avec ces conditions, la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 6 THÉORÈMES DE DOMINATION

77 **a.** Pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $g_\lambda : t \mapsto f(t)\sin(\lambda t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par opérations et $\forall t \in \mathbb{R},\ |g_\lambda(t)| \leqslant |f(t)|$ alors que f est intégrable sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Ainsi, par comparaison, g_λ est intégrable sur $\mathbb{R}$ ce qui montre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\lambda t)dt$ est absolument convergente donc convergente et $L(\lambda)$ existe.

b. Soit $a > 0$ et $\lambda > 0$, en posant $u : t \mapsto f(t)$ et $v : t \mapsto -\dfrac{\cos(\lambda t)}{\lambda}$, les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[-a;a]$ donc, par intégration par parties, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\sin(\lambda t)dt = \Big[-f(t)\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda}\Big]_{-a}^{a} + \int_{-a}^{a} \frac{f'(t)\cos(\lambda t)}{\lambda}dt$. Par inégalité triangulaire sur les réels et les intégrales, $\displaystyle\Big|\int_{-a}^{a} f(t)\sin(\lambda t)dt\Big| \leqslant \frac{|f(-a)|}{\lambda} + \frac{|f(a)|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_{-a}^{a} |f'(t)|dt$ donc $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\sin(\lambda t)dt \underset{+\infty}{=} O\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)$ ce qui prouve que $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \int_{-a}^{a} f(t)\sin(\lambda t)dt = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$, comme f est intégrable sur $\mathbb{R}$, elle l'est sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{x}^{+\infty} |f(t)|dt = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \int_{-\infty}^{x} |f(t)|dt = 0$. Ainsi, il existe $b \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \geqslant b,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_{x}^{+\infty} |f(t)|dt \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ et $c \in \mathbb{R}_-$ tel que $\forall x \leqslant c,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{x} |f(t)|dt \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. En prenant $a = \mathrm{Max}(-c, b) > 0$, on a donc $0 \leqslant \displaystyle\int_{a}^{+\infty} |f(t)|dt \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{-a} |f(t)|dt \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. D'après ce qui précède, il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall \lambda \geqslant \lambda_0,\ \displaystyle\Big|\int_{-a}^{a} f(t)\sin(\lambda t)dt\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Ainsi, dès que $\lambda \geqslant \lambda_0$, on a $|L(\lambda)| = \displaystyle\Big|\int_{-\infty}^{-a} f(t)\sin(\lambda t)dt + \int_{-a}^{a} f(t)\sin(\lambda t)dt + \int_{a}^{+\infty} f(t)\sin(\lambda t)dt\Big|$ donc, par inégalité triangulaire, $|L(\lambda)| \leqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{-a} |f(t)|\,|\sin(\lambda t)|dt + \Big|\int_{-a}^{a} f(t)\sin(\lambda t)dt\Big| + \int_{a}^{+\infty} |f(t)|\,|\sin(\lambda t)|dt \leqslant \varepsilon$ car $|\sin(\lambda t)| \leqslant 1$. On a bien établi que $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} L(\lambda) = 0$.

c. La fonction $g : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$ car $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$. La convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} g$ équivaut donc à celle de $\displaystyle\int_1^{+\infty} g$.

Posons $u : x \mapsto -\cos(x)$ et $v : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, alors u et v sont de classe C^1 sur $[1;+\infty[$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} u(x)v(x) = 0$ donc, par intégration par parties, la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} g = \int_1^{+\infty} u'v$ est la même que celle de $\displaystyle\int_1^{+\infty} uv'$ donc de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}dx$. Or la fonction $h : x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{x^2}$ est continue sur $[1;+\infty[$ et $h(x) \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$ donc, par comparaison aux intégrales de Riemann, h est intégrable sur $[1;+\infty[$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} h$ converge. Ainsi, $\displaystyle\int_1^{+\infty} g$ converge et le réel $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$ existe.

d. Pour $n \in \mathbb{N}$, $g_n : x \mapsto \dfrac{\sin((2n+1)x)}{x}$ et $h_n : x \mapsto \dfrac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}$ sont continues sur $\Big]0;\dfrac{\pi}{2}\Big]$ et se prolongent par continuité en 0 en posant $g_n(0) = h_n(0) = 2n+1$ car $\sin((2n+1)x) \underset{0}{\sim} (2n+1)x$ et $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$. Ainsi, g_n et h_n ainsi prolongées sont continues sur le segment $\Big[0;\dfrac{\pi}{2}\Big]$ donc I_n et J_n existent.

e. On calcule $J_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 1dx = \frac{\pi}{2}$. Si $n \in \mathbb{N}$, $J_{n+1} - J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+3)x) - \sin((2n+1)x)}{\sin(x)}dx$ or on a

$\sin(a)-\sin(b) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$ donc $J_{n+1}-J_n = \int_0^{\pi/2} 2\cos((2n+2)x)dx = 2\left[\frac{\sin((2n+2)x)}{2n+2}\right]_0^{\pi/2}$ d'où $J_{n+1}-J_n = 0$. La suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant constante, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = J_0 = \frac{\pi}{2}$.

Par linéarité de l'intégrale, on a $I_n - J_n = \int_0^{\pi/2} \sin((2n+1)x)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\right)dx$. Définissons $f : \left]0; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}$. La fonction f est de classe C^1 sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ par opérations. De plus, avec le développement limité de $\sin$ en 0 à l'ordre 3, on a $f(x) \underset{0}{=} \frac{1}{x} - \frac{1}{x-(x^3/6)+o(x^3)} \underset{0}{=} \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{1-(x^2/6)+o(x^2)}\right)$. En composant avec le développement limité $\frac{1}{1-u} \underset{0}{=} 1+u+o(u)$, on obtient $f(x) \underset{0}{=} \frac{1}{x}\left(1 - \left(1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)\right) \underset{0}{=} 0 - \frac{x}{6} + o(x)$.

L'existence d'un développement limité à l'ordre 1 de f montre qu'elle se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ car elle vérifie $f(x) \underset{0}{=} 0 + o(1)$ (à l'ordre 0 par troncature) et que cette fonction ainsi prolongée est dérivable en 0 avec $f'(0) = -\frac{1}{6}$. Mais ceci ne montre pas l'aspect C^1 de la fonction f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Comme $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right],\ f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{x^2\cos(x) - \sin^2(x)}{x^2\sin^2(x)}$. Comme $x^2\sin^2(x) \underset{0}{\sim} x^4$, cherchons par un développement limité à l'ordre 4 en 0 un équivalent du numérateur de $f'(x)$ en 0. Classiquement, $x^2\cos(x) - \sin^2(x) \underset{0}{=} x^2\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2 \underset{0}{=} x^2 - \frac{x^4}{2} - x^2\left(1 - \frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)^2$ ce qui donne $x^2\cos(x) - \sin^2(x) \underset{0}{=} x^2 - \frac{x^4}{2} - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4) \underset{0}{=} -\frac{x^4}{6} + o(x^4)$ donc $x^2\cos(x) - \sin^2(x) \underset{0}{\sim} -\frac{x^4}{6}$.

Par conséquent, $f'(x) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{6}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\frac{1}{6}$ ce qui montre, par le théorème de prolongement C^1, que f est dérivable en 0 (on le savait), que $f'(0) = -\frac{1}{6}$ et que f' est continue en 0. Ainsi, f est C^1 sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

D'après la question **b.** avec $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ à la place de $[-a; a]$, on a $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \sin(\lambda t)f(t)dt = 0$ donc, comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n+1) = +\infty$, en composant, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \sin((2n+1)t)f(t)dt = \lim\limits_{n\to+\infty}(I_n - J_n) = 0$. Comme $I_n = I_n - J_n + J_n$, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \frac{\pi}{2}$.

Dans I_n, effectuons le changement de variable $x = \frac{t}{2n+1} = \varphi_n(t)$ avec φ_n qui est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $\left]0; \frac{(2n+1)\pi}{2}\right]$ dans $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, ainsi $I_n = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin(t)}{t}dt$. D'après **c.**, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin(t)}{t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ par convergence de cette intégrale (intégrale de DIRICHLET). Comme on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$, par unicité de la limite, on a $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.

78

79 **a.** Pour tout réel x, la fonction $g_x : t \mapsto e^{-xt}\ln(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $g_x(t) \underset{0}{\sim} \ln(t) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc g_x est intégrable en 0 par comparaison aux intégrales de RIEMANN. Traitons deux cas :

- Si $x \leqslant 0$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} g_x(t) = +\infty$ donc g_x n'est pas intégrable en $+\infty$ et $\int_0^{+\infty} g_x$ diverge.
- Si $x > 0$, par croissances comparées, on a $g_x(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-(x/2)t})$ donc, par comparaison à des fonctions de référence, g_x est intégrable en $+\infty$ donc $\int_0^{+\infty} g_x$ converge.

Ainsi, le domaine de définition D de f est $D = \mathbb{R}_+^*$.

b. Soit la fonction $g : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = e^{-xt}\ln(t)$:

(H_1) pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations.

(H_2) pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $g_x : t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on vient de le voir) et la fonction $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -te^{-xt}\ln(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_3) Pour $a > 0$ et $(x,t) \in [a;+\infty[\times\mathbb{R}_+^*$, $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant t|\ln(t)|e^{-at} = \varphi_a(t)$ et la fonction φ_a est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ où elle est intégrable car $\varphi_a(t) \underset{0}{\sim} t|\ln(t)|$ donc $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi_a(t) = 0$ par croissances comparées et car $\varphi_a(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ car $t^2\varphi_a(t) = \left(\frac{|\ln(t)|}{t}\right) \times \left(t^4e^{-xt}\right)$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, f est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0,\ f'(x) = -\int_0^{+\infty} t\ln(t)e^{-xt}dt$. Ainsi, $\forall x > 0,\ x^2f'(x) + xf(x) = -\int_0^{+\infty} x^2t\ln(t)e^{-xt}dt + \int_0^{+\infty} xe^{-xt}\ln(t)dt = \int_0^{+\infty} x(1-xt)e^{-xt}\ln(t)dt$, le résultat de l'énoncé étant simple, on cherche une primitive de cette intégrande et on trouve en tâtonnant que $x^2f'(x) + xf(x) = \left[(xt\ln(t)+1)e^{-xt}\right]_0^{+\infty} = -1$ par croissances comparées donc $x^2f'(x) + xf(x) + 1 = 0$.

On pouvait aussi effectuer, dans l'expression de $f'(x)$, une intégration par parties avec $u : t \mapsto t\ln(t)$ et $v : t \mapsto -\frac{e^{-xt}}{x}$ qui sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et qui vérifient, comme avant, $\lim\limits_{t\to 0^+} u(t)v(t) = 0 = \lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t)$ donc, comme tout converge, $f'(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty}(\ln(t)+1)e^{-xt}dt = -\frac{f(x)}{x} + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = -\frac{f(x)}{x} + \frac{1}{x^2}$ et on retrouve bien la relation $x^2f'(x) + xf(x) + 1 = 0$.

c. On résout l'équation homogène (E_0) : $x^2y' + xy = 0$: $y' + \frac{y}{x} = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, ses solutions sont les fonctions $y : x \mapsto \lambda e^{-\ln(x)} = \frac{\lambda}{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Par variation de la constante, en écrivant $y(x) = \frac{\lambda(x)}{x}$ avec λ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et en reportant dans l'équation, on a y solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\lambda'(x) = -\frac{1}{x}$ et on choisit $\lambda(x) = -\ln(x)$ de sorte que $y : x \mapsto -\frac{\ln(x)}{x}$ est solution particulière de (E). Par théorème de structure, les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E) sont les fonctions $f : x \mapsto \frac{\alpha - \ln(x)}{x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Comme l'énoncé nous apprend que $f(1) = -\gamma$, on a $\alpha = -\gamma$ donc $\forall x > 0,\ f(x) = -\frac{\gamma + \ln(x)}{x}$.

80

81 **a.** La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2-1}$ est continue sur $]0;1[$, $f(t) \underset{0}{\sim} -\ln(t) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ par croissances comparées donc, par comparaison, f est intégrable en 0. De plus, $f(t) \underset{t\to 1}{\sim} \frac{(t-1)}{(t-1)(t+1)} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{2}$ donc f se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1) = \frac{1}{2}$ et f est aussi intégrable en 1. Ainsi, f est intégrable sur $]0;1[$ donc I existe.

b. Pour $t \in]0;1[$, $f(t) = -\ln(t) \times \frac{1}{1-t^2} = (-\ln(t))\sum\limits_{k=0}^{+\infty} t^{2k} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k(t)$ en posant $u_k(t) = -t^{2k}\ln(t)$.

(H_1) La série de fonctions $\sum\limits_{k\geqslant 0} u_k$ converge simplement vers f sur $]0;1[$ (on en vient).

(H_2) Les u_k sont continues par opérations et intégrables sur $]0;1]$ (donc sur $]0;1[$) car $u_0(t) \underset{0}{\sim} -\ln(t)$ et u_k se prolonge par continuité en 0 en posant $u_k(0) = 0$ si $k \geqslant 1$ par croissances comparées.

(H_3) La fonction f est continue sur $]0;1[$ (déjà vu).

(H_4) Pour $k \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |u_k(t)|dt = -\int_0^1 t^{2k}\ln(t)dt = -\left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\ln(t)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^{2k}}{2k+1}dt = \frac{1}{(2k+1)^2}$ par intégration par parties car $a_k : t \mapsto \dfrac{t^{2k+1}}{2k+1}$ et $b : t \mapsto \ln(t)$ sont de classe C^1 sur $]0;1[$ et que $\lim\limits_{t\to 0^+} a_k(t)b(t) = \lim\limits_{t\to 1^-} a_k(t)b(t) = 0$.

Par le théorème d'intégration terme à terme, la fonction f est intégrable sur $]0;1[$ (on le savait déjà) et on a la relation $I = \displaystyle\int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t)\Big)dt = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 u_k(t)dt = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$.

c. Posons $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ our $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$. Or, pour $n \in \mathbb{N}^*$, en séparant les indices pairs et impairs, $S_{2n+1} = T_n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^2} = T_n + \frac{S_n}{4}$ donc $T_n = S_{2n+1} - \dfrac{S_n}{4}$. Ainsi, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = I = \dfrac{3}{4}\times\dfrac{\pi^2}{6} = \dfrac{\pi^2}{8}$.

82

83 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $h_x : t \mapsto e^{-t}\dfrac{\text{sh}\,(xt)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0 en posant $h_x(0) = x$ car $\text{sh}\,(xt) \underset{0}{=} xt + o(t)$ et $e^{-t} \underset{0}{=} 1 + o(1)$ donc $h_x(t) \underset{0}{=} x + o(1)$.

Comme $h_{-x} = -h_x$, il suffit de traiter le cas $x \geqslant 0$.

<u>Si $x = 0$</u> , il est clair que $h_0 = 0$ donc h_0 est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f(0)$ existe, on a même $f(0) = 0$.

<u>Si $x > 0$</u> , $\text{sh}\,(xt) = \dfrac{e^{xt} - e^{-xt}}{2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{xt}}{2}$ donc $h_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{(x-1)t}}{2t}$ donc h_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $x-1 < 0$ par comparaison de fonctions de référence. En effet, si $x < 1$, on a $h_x(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-(1-x)t})$, $h_1(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2t}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} h_x(t) = +\infty$ si $x > 1$. h_x est donc intégrable si et seulement si $x \in]0;1[$ donc, comme h_x est positive, $\displaystyle\int_0^{+\infty} h_x(t)dt$ converge si et seulement si $x \in]0;1[$.

Ainsi, le domaine de définition D de f vaut $D =]-1;1[$ et f est impaire sur D.

b. Soit l'application $g :]-1;1[\times\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = e^{-t}\dfrac{\text{sh}\,(xt)}{t}$.

(H_1) Pour tout $t > 0$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur $]-1;1[$.

(H_2) Pour tout $x \in]-1;1[$, $h_x : t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on vient de le voir) et $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \text{ch}\,(xt)e^{-t}$ est continue $\mathbb{R}_+^*$.

(H_3) Soit $a \in]0;1[$, alors $\forall (x,t) \in [-a;a]\times\mathbb{R}_+^*$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \text{ch}\,(xt)e^{-t} \leqslant \text{ch}\,(at)e^{-t} = \varphi_a(t)$ car ch est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et φ_a est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle se prolonge par continuité en 0 en posant $\varphi_a(0) = 1$ et $\varphi_a(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{(a-1)t}}{2}$ avec $a - 1 < 0$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, f est de classe C^1 sur $]-1;1[$ et, avec la formule de Leibniz, on a la relation $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\text{ch}\,(xt)e^{-t}dt$.

c. Pour $x \in]-1;1[$, comme les deux intégrales convergent, $f'(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(x-1)t}dt + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{(-x-1)t}dt$ donc $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{e^{(x-1)t}}{x-1}\right]_0^{+\infty} + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{e^{(-x-1)t}}{-x-1}\right]_0^{+\infty} = \dfrac{1}{2(1-x)} + \dfrac{1}{2(1+x)} = \dfrac{1}{1-x^2}$. Comme $]-1;1[$ est un intervalle, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln(1+x) - \dfrac{1}{2}\ln(1-x) + C = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) + C$. Or $f(0) = 0$ donc $C = 0$ et $\forall x \in]-1;1[$, $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = \text{Argth}\,(x)$.

84 D'abord, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ et $g_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ définies par $f_n(t) = \dfrac{1}{1+t^n}$ et $g_n(t) = \ln(1+t^n)$ sont continues sur le segment $[0;1]$ donc I_n te J_n sont bien définis.

a. Méthode 1 : pour $t \in [0;1]$, $1-t^n \leqslant f_n(t) \leqslant 1$ car $1-t^{2n} \leqslant 1$ donc, par croissance de l'intégrale, on obtient l'inégalité $\displaystyle\int_0^1 (1-t^n)dt = 1 - \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant 1$ d'où, par encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 1 = \ell$.

Comme $\forall x > 0,\ 0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$, par croissance de l'intégrale, on a $\displaystyle 0 \leqslant J_n \leqslant \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$ donc, par encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$.

Méthode 2 : on utilise le théorème de convergence dominée :

(H_1) Pour tout $t \in [0;1[$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g_n(t) = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(1) = \frac{1}{2}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g_n(1) = \ln(2)$ donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $[0;1]$ vers la fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(1) = \dfrac{1}{2}$ et $\forall t \in [0;1[,\ f(t) = 1$ et la suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $[0;1]$ vers la fonction $g : [0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $g(1) = \ln(2)$ et $\forall t \in [0;1[,\ g(t) = 0$

(H_2) Toutes les fonctions f_n, g_n sont continues et f, g sont continues par morceaux sur $[0;1]$.

(H_3) $\forall n \geqslant 1,\ \forall t \in [0;1],\ 0 \leqslant f_n(t) \leqslant 1$ et $0 \leqslant g_n(t) \leqslant \ln(2)$ et $\varphi : t \mapsto 1$ et $\psi : t \mapsto \ln(2)$ sont continues et intégrables sur $[0;1]$.

Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 f = 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 1 = \ell$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n = \int_0^1 g = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = 0 = \ell'$.

b. Méthode 1 : pour $n \in \mathbb{N}^*$, dans l'intégrale $\displaystyle 1 - I_n = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^n}\right)dt = \int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t^n} = \frac{1}{n}\int_0^1 t \times \frac{nt^{n-1}}{1+t^n}dt$, on pose $u_n : t \mapsto \ln(1+t^n)$ et $v : t \mapsto t$ qui sont de classe C^1 sur $[0;1]$ de sorte que, par intégration par parties, on a $\displaystyle 1 - I_n = \frac{1}{n}\int_0^1 u_n'(t)v(t)dt = \frac{1}{n}\Big[u_n(t)v(t)\Big]_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 u_n(t)v'(t)dt = \frac{1}{n}\left(\ln(2) - \int_0^1 \ln(1+t^n)dt\right)$.

Comme $n(1-I_n) = \ln(2) - J_n$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n(1-I_n) = \ln(2)$ d'après **a.** donc $\displaystyle 1 - I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(2)}{n}$.

Méthode 2 : dans $\displaystyle 1 - I_n = \int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t^n}$, on pose $t = \varphi_n(u) = u^{1/n}$ avec φ_n bijection strictement croissante de classe C^1 de $]0;1]$ dans $]0;1]$. Par changement de variable, on a $\displaystyle 1 - I_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{1/n}}{1+u}du$. Soit, pour $n \geqslant 1$, la fonction $a_n :]0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $a_n(u) = \dfrac{u^{1/n}}{1+u}$.

(H_1) Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u^{1/n} = 1$ pour tout réel $u \in]0;1]$, la suite de fonctions $(a_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $]0;1]$ vers $a :]0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $a(u) = \dfrac{1}{1+u}$.

(H_2) Toutes les fonctions a_n et la fonction a sont continues sur $]0;1]$.

(H_3) $\forall n \geqslant 1,\ \forall u \in]0;1],\ u^{1/n} \leqslant 1$ donc $0 \leqslant a_n(u) \leqslant a(u) \leqslant 1$ et $t \mapsto 1$ est intégrable sur $]0;1]$.

On peut conclure avec le théorème de convergence dominée que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 a_n = \int_0^1 a$, c'est-à-dire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n(1-I_n) = \int_0^1 a = \ln(2)$ ou $\displaystyle 1 - I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(2)}{n}$.

c. La fonction $g : u \mapsto \dfrac{\ln(1+u)}{u}$ est continue sur $]0;1]$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$ car $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}du$ converge. On sait que $\displaystyle\forall u \in [0;1[,\ \ln(1+u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}u^n}{n}$ donc $\displaystyle g(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}u^{n-1}}{n} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p u^p}{p+1}$ (ceci est aussi valable pour $u = 0$). Or le rayon de convergence de cette série entière est $R = 1$ donc on ne peut pas intégrer terme à terme par le théorème du cours puisqu'on n'est pas sur un segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence. Posons $v_p : u \mapsto \dfrac{(-1)^p u^p}{p+1}$, alors $||v_p||_{\infty,[0;1[} = \dfrac{1}{p+1}$ donc on ne peut pas non plus utiliser la convergence normale sur un intervalle borné. Il reste le théorème d'intégration terme à terme.

(H_1) La série $\sum\limits_{p\geqslant 0} v_p$ converge simplement vers g sur $[0;1[$ (on en vient).

(H_2) Les fonctions v_p sont continues et intégrables sur $[0;1[$ et g est continue sur $[0;1[$.

(H_3) $\displaystyle\int_0^1 |v_p(u)|du = \left[\frac{u^{p+1}}{(p+1)^2}\right]_0^1 = \frac{1}{(p+1)^2}$ et la série de RIEMANN $\sum\limits_{p\geqslant 0} \dfrac{1}{(p+1)^2}$ converge.

Ainsi, g est intégrable sur $[0;1[$ (on le savait déjà) et $I = \displaystyle\int_0^1 g(u)du = \sum_{p=0}^{+\infty}\int_0^1 v_p = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(p+1)^2}$.

d. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)dt$, on pose $t = \varphi_n(u) = u^{1/n}$ avec φ_n bijection strictement croissante de classe C^1 de $]0;1]$ dans $]0;1]$. Par changement de variable, on a $J_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+u)u^{1/n}}{u}du$.

Soit, pour $n \geqslant 1$, la fonction $h_n :]0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $h_n(u) = \dfrac{u^{1/n}\ln(1+u)}{u}$.

(H_1) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u^{1/n} = 1$ pour tout réel $u \in]0;1]$, la suite de fonctions $(h_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $]0;1]$ vers $h :]0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $h(u) = \dfrac{\ln(1+u)}{u}$.

(H_2) Toutes les fonctions h_n et la fonction h sont continues sur $]0;1]$.

(H_3) $\forall n \geqslant 1,\ \forall u \in]0;1],\ u^{1/n} \leqslant 1$ donc $0 \leqslant h_n(u) \leqslant h(u)$ et $h = g$ est intégrable sur $]0;1]$.

On peut conclure avec le théorème de convergence dominée que $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 h_n = \int_0^1 h$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} nJ_n = \displaystyle\int_0^1 g$. Par définition, et comme $\displaystyle\int_0^1 g > 0$ car g est continue, positive et non nulle sur $]0;1]$, on en déduit que $J_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}du$.

Posons, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ et $S'_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$. Alors $S'_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(2k-1)^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^2}$ en séparant indices pairs et impairs. Ensuite, $S'_{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^2} - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^2} = S_{2n} - \frac{S_n}{2}$. Or on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = \dfrac{\pi^2}{6}$ ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_{2n} = \dfrac{\pi^2}{12}$. Ainsi, $I = \lim\limits_{n\to+\infty} S'_{2n} = \dfrac{\pi^2}{12}$ et, d'après la question précédente, on a donc $J_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{12n}$.

On peut conclure à un développement asymptotique à trois termes de I_n : $I_n \underset{+\infty}{=} 1 - \dfrac{\ln(2)}{n} + \dfrac{\pi^2}{12n^2} + O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$.

85 D'abord, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = \dfrac{1}{1+t^n}$ est continue sur le segment $[0;1]$ donc I_n est bien défini.

a. À écrire. On conjecture que $\ell = 1$ avec les premiers termes de cette suite.

b. Méthode 1 : pour $t \in [0;1]$, $1-t^n \leqslant f_n(t) \leqslant 1$ car $1-t^{2n} \leqslant 1$ donc, par croissance de l'intégrale, on obtient l'inégalité $\displaystyle\int_0^1(1-t^n)dt = 1 - \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant 1$ d'où, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 1 = \ell$.

Méthode 2 : on utilise le théorème de convergence dominée :

(H_1) Pour tout $t \in [0;1[$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n(1) = \frac{1}{2}$ donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $[0;1]$ vers la fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(1) = \frac{1}{2}$ et $\forall t \in [0;1[,\ f(t) = 1$.

(H_2) Toutes les fonctions f_n sont continues et f est continue par morceaux sur $[0;1]$.

(H_3) $\forall n \geqslant 1,\ \forall t \in [0;1],\ 0 \leqslant f_n(t) \leqslant 1$ et $\varphi : t \mapsto 1$ est continue et intégrable sur $[0;1]$.

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 f = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} I_n = 1 = \ell$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, dans l'intégrale $1 - I_n = \int_0^1 \Big(1 - \frac{1}{1+t^n}\Big)dt = \int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t^n} = \frac{1}{n}\int_0^1 t \times \frac{nt^{n-1}}{1+t^n}dt$, on pose $u_n : t \mapsto \ln(1+t^n)$ et $v : t \mapsto t$ qui sont de classe C^1 sur $[0;1]$ de sorte que, par intégration par parties, on a $1 - I_n = \frac{1}{n}\int_0^1 u_n'(t)v(t)dt = \frac{1}{n}\Big[u_n(t)v(t)\Big]_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 u_n(t)v'(t)dt = \frac{1}{n}\Big(\ln(2) - \int_0^1 \ln(1+t^n)dt\Big)$.

Comme $\forall x > 0,\ 0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$, par croissance de l'intégrale, on a $0 \leqslant J_n \leqslant \int_0^1 t^n dt = \Big[\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big]_0^1 = \frac{1}{n+1}$ donc, par encadrement, $\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} n(1-I_n) = \ln(2)$ donc $1 - I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(2)}{n}$.

d. La fonction $g : u \mapsto \frac{\ln(1+u)}{u}$ est continue sur $]0;1]$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$ car $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$. Ainsi, $\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}du$ converge. On sait que $\forall u \in [0;1[,\ \ln(1+u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}u^n}{n}$ donc $g(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}u^{n-1}}{n} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p u^p}{p+1}$ (ceci est aussi valable pour $u = 0$). Or le rayon de convergence de cette série entière est $R = 1$ donc on ne peut pas intégrer terme à terme par le théorème du cours puisqu'on n'est pas sur un segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence. Posons $v_p : u \mapsto \frac{(-1)^p u^p}{p+1}$, alors $||v_p||_{\infty,[0;1[} = \frac{1}{p+1}$ donc on ne peut pas non plus utiliser la convergence normale sur un intervalle borné. Il reste le théorème d'intégration terme à terme.

(H_1) La série $\sum_{p\geqslant 0} v_p$ converge simplement vers g sur $[0;1[$ (on en vient).

(H_2) Les fonctions v_p sont continues et intégrables sur $[0;1[$ et g est continue sur $[0;1[$.

(H_3) $\int_0^1 |v_p(u)|du = \Big[\frac{u^{p+1}}{(p+1)^2}\Big]_0^1 = \frac{1}{(p+1)^2}$ et la série de Riemann $\sum_{p\geqslant 0} \frac{1}{(p+1)^2}$ converge.

Ainsi, g est intégrable sur $[0;1[$ (on le savait déjà) et $I = \int_0^1 g(u)du = \sum_{p=0}^{+\infty}\int_0^1 v_p = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(p+1)^2}$.

e. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, dans l'intégrale $\int_0^1 \ln(1+t^n)dt$, on pose $t = \varphi_n(u) = u^{1/n}$ avec φ_n bijection strictement croissante de classe C^1 de $]0;1]$ dans $]0;1]$. Par changement de variable, on a $J_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(1+u)u^{1/n}}{u}du$.

Soit, pour $n \geqslant 1$, la fonction $h_n :]0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $h_n(u) = \frac{u^{1/n}\ln(1+u)}{u}$.

(H_1) Comme $\lim_{n\to+\infty} u^{1/n} = 1$ pour tout réel $u \in]0;1]$, la suite de fonctions $(h_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $]0;1]$ vers $h :]0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $h(u) = \frac{\ln(1+u)}{u}$.

(H_2) Toutes les fonctions h_n et la fonction h sont continues sur $]0;1]$.

(H_3) $\forall n \geqslant 1,\ \forall u \in]0;1],\ u^{1/n} \leqslant 1$ donc $0 \leqslant h_n(u) \leqslant h(u)$ et $h = g$ est intégrable sur $]0;1]$.

On peut conclure avec le théorème de convergence dominée que $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 h_n = \int_0^1 h$, c'est-à-dire que

$\lim\limits_{n\to+\infty} nJ_n = \int_0^1 g$. Par définition, et comme $\int_0^1 g > 0$ car g est continue, positive et non nulle sur $]0;1]$, on en déduit que $J_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}\int_0^1 \dfrac{\ln(1+u)}{u}du$.

Posons, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ et $S'_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^2}$. Alors $S'_{2n} = \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{(2k-1)^2} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(2k)^2}$ en séparant indices pairs et impairs. Ensuite, $S'_{2n} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{(2k-1)^2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(2k)^2} - 2\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(2k)^2} = S_{2n} - \dfrac{S_n}{2}$. Or on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = \dfrac{\pi^2}{6}$ ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_{2n} = \dfrac{\pi^2}{12}$. Ainsi, $I = \lim\limits_{n\to+\infty} S'_{2n} = \dfrac{\pi^2}{12}$ et, d'après la question précédente, on a donc $J_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{12n}$.

On peut conclure à un développement asymptotique à trois termes de I_n : $I_n \underset{+\infty}{=} 1 - \dfrac{\ln(2)}{n} + \dfrac{\pi^2}{12n^2} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 7
ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS ET ESPACES EUCLIDIENS

86 **a.** Si on prend $X = I_n$, on obtient $A_1A_2 = I_n$ donc A_1 et A_2 sont inversibles car $\det(A_1A_2) = 1$ donc $\det(A_1) \neq 0$ et $\det(A_2) \neq 0$. De plus, $A_2 = A_1^{-1}$ et $A_1 = A_2^{-1}$. La condition de l'énoncé devient donc $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A_1X = XA_1$. Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, la matrice $A_1E_{i,j}$ est la matrice qui contient des 0 dans toutes les colonnes sauf dans la colonne j ou se trouve $C_i(A_1)$ (la i-ième colonne de A_1). De même, $E_{i,j}A_1$ est la matrice qui contient des 0 dans toutes les lignes sauf dans la ligne i ou se trouve $L_j(A_1)$ (la j-ième ligne de A_1). Comme $A_1E_{i,j} = E_{i,j}A_1$ par hypothèse, on en déduit que $a_{i,i} = a_{j,j}$ (en case (i,j) du produit), $a_{k,j} = 0$ si $k \neq j$ et $a_{k,i} = 0$ si $k \neq i$. Comme ceci est vrai quel que soit le couple $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, on en déduit que A_1 est scalaire, donc qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $A_1 = \lambda I_n$. On a alors $A_2 = A_1^{-1} = \frac{1}{\lambda}I_n$.

b. <u>Méthode 1</u> : raisonnons par l'absurde, s'il existait un vecteur y non nul dans $\mathrm{Im}\,(f)$, il existerait un vecteur $x \in E$ tel que $y = f(x) \neq 0_E$. Par le théorème de la base incomplète, comme (y) est libre, il existe une base $\mathcal{B} = (y, v_2, \cdots, v_n)$ de E et un unique endomorphisme g de E tel que $g(y) = x$ et $\forall k \in [\![2;n]\!],\ g(v_k) = 0_E$, et $f \circ g \circ f(x) = y \neq 0_E$ et c'est absurde. Ainsi, si $f \in \mathcal{L}(E)$ est tel que $\forall g \in \mathcal{L}(E),\ f \circ g \circ f = 0$, alors $f = 0$.

<u>Méthode 2</u> : rappelez-moi ce que Tom avait trouvé.

c. Ce n'est pas écrit dans l'énoncé, mais on prend le produit scalaire canonique dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, défini par $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ (A|B) = \mathrm{Tr}\ (A^TB)$. Par double implication :

- Si $A \in O(n)$, on a $AA^T = A^TA = I_n$, alors $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ ||\Phi_A(X)||^2 = \mathrm{Tr}\ (\Phi_A(X)^T\Phi_A(X))$ donc $||\Phi_A(X)||^2 = \mathrm{Tr}\ (A^TX^TA^TAXA) = \mathrm{Tr}\ (A^TX^TXA) = \mathrm{Tr}\ (A^{-1}X^TXA) = \mathrm{Tr}\ (X^TX) = ||X||^2$ car $A^{-1}X^TXA$ et X^TX sont semblables (et même ici orthosemblables) donc ont même trace. Comme Φ_A conserve la norme, par définition, Φ_A est une isométrie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Si Φ_A est une isométrie, en considérant $\Phi_A(E_{i,j})$ de norme 1, on a .... Ensuite, on prend $j \neq j'$ et on se sert de l'orthogonalité de $\Phi_A(E_{i,j})$ et de $\Phi_A(E_{i,j'})$.

87 **a.** Comme $(F^\perp)^\perp = F$, il suffit de montrer un seul sens de cette équivalence.

$(\Longrightarrow)$ Supposons F stable par f. Alors f induit sur F un endomorphisme f_F qui conserve encore la norme donc $f_F \in O(F)$. On en déduit que f_F est un isomorphisme car si $||f_F(x)|| = 0$ pour $x \in F$, on a par définition $||x|| = 0$ donc $x = 0_E$. Tout vecteur $x \in F$ admet donc un unique antécédent $y \in F$ par f_F donc par u.

Soit $y \in F^\perp$ et $x \in F$, notons $z = f^{-1}(x)$ l'unique antécédent de x par f, on vient de voir que $z \in F$. Alors $(f(y)|x) = (f(y)|f(z)) = (y|z) = 0$ car $y \in F^\perp$ et $z \in F$. Par conséquent $f(y) \in F^\perp$: $F^\perp$ est bien stable par f.

b. Soit $(x,y) \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) \times \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$. Par définition, il existe $z \in E$ tel que $y = f(z) - z$ et on a aussi $f(x) = x$. On calcule $(x|y) = (x|f(z) - z) = (x|f(z)) - (x|z) = (f(x)|f(z)) - (x|z) = 0$ car $f \in O(E)$ donc $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) \perp \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$. Par la formule du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})) + \dim(\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})) = \dim(E)$ donc $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) \oplus \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$ et $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) = (\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}))^\perp$.

c. $s_{u_1}\circ\cdots\circ s_{u_p}\in O(E)$ d'où $\mathrm{Im}\,(s_{u_1}\circ\cdots\circ s_{u_p})=\mathrm{Vect}(u_1,\cdots,u_p)\iff \mathrm{Ker}(s_{u_1}\circ\cdots\circ s_{u_p})=\mathrm{Vect}(u_1,\cdots,u_p)^{\perp}$ d'après la question **b.**. On peut supposer sans perte de généralité que $\forall k\in[\![1;p]\!],\ ||u_k||=1$.

Montrons cette égalité par récurrence sur le nombre de vecteurs, soit pour $p\in[\![1;n]\!]$, la proposition suivante $\mathcal{P}(p)=$ “ si $(u_1,\cdots,u_p)$ est libre dans E euclidien de dimension n, alors $\mathrm{Im}\,(s_{u_1}\circ\cdots\circ s_{u_p})=\mathrm{Vect}(u_1,\cdots,u_p)$”. Ceci équivaut aussi à $\mathrm{Ker}(s_{u_1}\circ\cdots\circ s_{u_p})=\mathrm{Vect}(u_1,\cdots,u_p)^{\perp}$.

• Si $p=1$ et (u_1) libre ($u_1\neq 0_E$), $\mathrm{Ker}(s_{u_1})=\mathrm{Vect}(u_1)^{\perp}$ par définition d'une réflexion donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

• Soit $p\in[\![1;n-1]\!]$ tel que $\mathcal{P}(p)$ est vraie. Soit $(u_1,\cdots,u_{p+1})$ une famille libre de E et $x\in\mathrm{Ker}(s_{u_1}\circ\cdots\circ s_{u_{p+1}})$. On compose $s_{u_1}\circ\cdots\circ s_{u_{p+1}}(x)=x$ par s_{u_1} pour avoir $s_{u_2}\circ\cdots\circ s_{u_{p+1}}(x)=s_{u_1}(x)=x-(x|u_1)u_1$. On en déduit que $(x|u_1)u_1=x-g(x)$ avec $g=s_{u_2}\circ\cdots\circ s_{u_{p+1}}$. Ainsi, $(x|u_1)u_1\in\mathrm{Im}\,(g)=\mathrm{Vect}(u_2,\cdots,u_{p+1})$ par hypothèse de récurrence. Mais comme $u_1\notin\mathrm{Vect}(u_2,\cdots,u_{p+1})$ car la famille $(u_1,\cdots,u_{p+1})$ est libre, on en déduit que $(x|u_1)=0$. Par conséquent $x-g(x)=0_E$ donc $x\in\mathrm{Ker}(s_{u_2}\circ\cdots\circ s_{u_{p+1}})=\mathrm{Vect}(u_2,\cdots,u_{p+1})^{\perp}$. Tout ceci montre que $x\in\mathrm{Vect}(u_1,\cdots,u_{p+1})^{\perp}$. Ainsi $\mathrm{Ker}(s_{u_1}\circ\cdots\circ s_{u_{p+1}})\subset\mathrm{Vect}(u_1,\cdots,u_{p+1})^{\perp}$.
Soit $x\in\mathrm{Vect}(u_1,\cdots,u_p)^{\perp}$. Comme $\forall k\in[\![1;p]\!],\ x_k\in H_k$, on a $s_{u_k}(x)=x$ donc $s_{u_1}\circ\cdots\circ s_{u_p}(x)=x$ puisque x est invariant par toute s_{u_k}. Ainsi $x\in\mathrm{Ker}(s_{u_1}\circ\cdots\circ s_{u_p})$. Alors $\mathrm{Vect}(u_1,\cdots,u_p)^{\perp}\subset\mathrm{Ker}(s_{u_1}\circ\cdots\circ s_{u_p})$.
On en déduit bien que $\mathrm{Ker}(s_{u_1}\circ\cdots\circ s_{u_{p+1}})=\mathrm{Vect}(u_1,\cdots,u_{p+1})^{\perp}$.
Ainsi, par principe de récurrence, pour toute famille libre $(u_1,\cdots,u_p)$ de vecteurs de E, on a l'égalité des sous-espaces $\mathrm{Im}\,(s_{u_1}\circ\cdots\circ s_{u_p})=\mathrm{Vect}(u_1,\cdots,u_p)$ ou $\mathrm{Ker}(s_{u_1}\circ\cdots\circ s_{u_p})=\mathrm{Vect}(u_1,\cdots,u_p)^{\perp}$.

88 **a.** Par définition du produit des polynômes, $P^2(X)=\sum\limits_{0\leqslant p,q\leqslant n}a_pX^p.a_qX^q=\sum\limits_{0\leqslant p,q\leqslant n}a_pa_qX^{p+q}$. Ainsi, par linéarité de l'intégrale de fonctions continues sur un segment, $\displaystyle\int_0^1 P^2(t)dt=\sum_{0\leqslant p,q\leqslant n}a_pa_q\int_0^1 t^{p+q}dt$ donc $\displaystyle\int_0^1 P^2(t)dt=\sum_{0\leqslant p,q\leqslant n}\frac{a_pa_q}{p+q+1}\geqslant 0$ car $t\mapsto P^2(t)$ est positive sur $[0;1]$.

b. Pour $k=0$, $\displaystyle\int_0^{\pi}e^{ikt}dt=\int_0^{\pi}1.dt=\pi$ et, pour $k\in\mathbb{Z}^*$, $\displaystyle\int_0^{\pi}e^{ikt}dt=\left[\frac{e^{ikt}}{ik}\right]_0^{\pi}=\frac{e^{i\pi}-1}{ik}$ et on traite deux cas, si k est pair, $\displaystyle\int_0^{\pi}e^{ikt}dt=0$ et si k est impair, $\displaystyle\int_0^{\pi}e^{ikt}dt=-\frac{2}{ik}$.
En écrivant $|P(e^{it})|^2=P(e^{it})\overline{P(e^{it})}=P(e^{it})P(e^{-it})$, par linéarité de l'intégrale et d'après les calculs précédents, $|P(e^{it})|^2=\Big(\sum\limits_{p=0}^{n}a_pe^{ipt}\Big)\Big(\sum\limits_{q=0}^{n}a_qe^{-iqt}\Big)=\sum\limits_{0\leqslant p,q\leqslant n}a_pa_qe^{i(p-q)t}$, ce qui donne la relation $\displaystyle\int_0^{\pi}|P(e^{it})|^2dt=\sum_{p=0}^{n}a_p^2\int_0^{\pi}dt+\sum_{\substack{0\leqslant p,q\leqslant n\\ p-q\ \text{impair}}}\int_0^{\pi}a_pa_qe^{i(p-q)t}dt=\pi\sum_{p=0}^{n}a_p^2-2\sum_{\substack{0\leqslant p,q\leqslant n\\ p-q\ \text{impair}}}\frac{a_pa_q}{i(p-q)}$. Or, si $(p,q)\in[\![0;n]\!]^2$ vérifie $p-q$ impair, on aussi $(q,p)\in[\![0;n]\!]^2$ et $q-p$ impair et $\dfrac{a_pa_q}{i(p-q)}=-\dfrac{a_qa_p}{i(q-p)}$ donc les termes de cette seconde somme se simplifient deux à deux, et on a enfin $\displaystyle\int_0^{\pi}|P(e^{it})|^2dt=\pi\sum_{p=0}^{n}a_p^2$.

c. Comme on ne peut pas faire le changement de variable complexe $x=e^{it}$ car premièrement ce n'est pas au programme et deuxièmement $\varphi:t\mapsto e^{it}$ ne crée pas une bijection entre $[0;\pi]$ et $[-1;1]$, on va faire le calcul des deux intégrales et comparer. Prenons $Q=\sum\limits_{k=0}^{m}q_kX^k\in\mathbb{C}[X]$, les deux fonctions $x\mapsto Q(x)$ et $t\mapsto Q(e^{it})e^{it}$ étant continues sur les segments $[-1;1]$ et $[0;\pi]$, tous les calculs qui suivent sont valides.

- $\displaystyle\int_{-1}^{1}Q(x)dx=\sum_{k=0}^{m}q_k\int_{-1}^{1}x^kdx=\sum_{k=0}^{m}q_k\left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_{-1}^{1}=\sum_{k=0}^{m}q_k\frac{1+(-1)^k}{k+1}$. On sépare les termes et impairs et on a $\int_{-1}^{1} Q(x)dx = \sum_{k=0}^{m/2} \frac{2q_{2k}}{2k+1}$.

- $-i\int_0^{\pi} Q(e^{it})e^{it}dt = -i\sum_{k=0}^{m} q_k \int_0^{\pi} e^{i(k+1)t} = -i\sum_{k=0}^{m/2} q_{2k}\Big(-\frac{2}{i(2k+1)}\Big)$ d'après **b.** donc on trouve le même résultat $-i\int_0^{\pi} Q(e^{it})e^{it}dt = \sum_{k=0}^{m/2} \frac{2q_{2k}}{2k+1}$.

On peut donc conclure que pour $Q \in \mathbb{C}[X]$, on a $\int_{-1}^{1} Q(x)dx = -i\int_0^{\pi} Q(e^{it})e^{it}dt$.

d. Par un calcul matriciel classique, $X^T H_n X = \sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} \frac{x_i x_j}{i+j+1} = \int_0^1 \widetilde{X}(t)^2 dt$ d'après la question **a.**.

e. Ainsi, $X^T H_n X \geqslant 0$ ce qui permet déjà de conclure que $H_n \in S_{n+1}^{+}(\mathbb{R})$. De plus, si on suppose que $X^T H_n X = 0$ pour $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, on a $\int_0^1 \widetilde{X}(t)^2 dt = 0$ et la fonction $t \mapsto \widetilde{X}(t)^2$ est continue et positive sur le segment $[0;1]$, on sait par théorème qu'alors cette fonction est nulle, donc le polynôme $\widetilde{X}$ admet une infinité de racines, il est donc nul donc $X = 0$. On a bien établi que $H_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Les valeurs propres de H_n sont donc, d'après le cours, des réels strictement positifs. Soit $\lambda \in Sp(H_n)$, il existe donc $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ tel que $H_n X = \lambda X$. Alors $X^T H_n X = \lambda X^T X = \lambda ||X||^2 = \lambda \sum_{k=0}^{n} x_k^2$ mais on a aussi, avec la question **d.**, $X^T H_n X = \int_0^1 \widetilde{X}(t)^2 dt$. Comme la fonction $t \mapsto \widetilde{X}(t)^2$ est positive et non nulle sur $[-1;1]$, on a $\int_0^1 \widetilde{X}(t)^2 dt < \int_{-1}^1 \widetilde{X}(t)^2 dt = -i\int_0^{\pi} \widetilde{X}(e^{it})^2 e^{it} dt$ d'après **c.** appliquée avec $Q = \widetilde{X}^2$. De tout ceci, par inégalité triangulaire, on déduit que $\int_0^1 \widetilde{X}(t)^2 dt < \int_0^{\pi} |\widetilde{X}(e^{it})^2| dt = \int_0^{\pi} |\widetilde{X}(e^{it})^2| dt = \pi \sum_{k=0}^{n} x_k^2 = \pi ||X||^2$ avec la question **b.**. Comme $||X|| > 0$ car $X \neq 0$, l'inégalité $X^T H_n X = \lambda ||X||^2 < \pi ||X||^2$ devient $\lambda < \pi$. La plus grande des valeurs propres de H_n est aussi strictement inférieure à π, et $Sp(H_n) \subset]0;\pi[$.

89 **a.** Avec ces notations, on a $\overline{Z}^T M Z = \overline{Z}^T(\lambda Z) = \lambda \overline{Z}^T Z = \lambda\Big(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\Big) = \lambda ||Z||^2$ si $Z^T = (z_1 \ \cdots \ z_n)$. Mais comme $\overline{Z}^T M Z \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$, que M est réelle et symétrique, donc que $M^T = M$ et que $\overline{M} = M$, on a la relation $\overline{(\overline{Z}^T M Z)^T} = (Z^T M \overline{Z})^T = \overline{Z}^T M Z$ donc $\overline{\lambda}||Z||^2 = \lambda ||Z||^2$. Mais comme $Z \neq 0$, $||Z||^2 > 0$ donc $\lambda = \overline{\lambda}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

b. La matrice A_n est symétrique réelle donc diagonalisable par le théorème spectral. On a $\text{Tr}\,(A_n) = n$ et, comme $A_n^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 4 & & \vdots & 2n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & 2(n-1) & \cdots & (n-1)^2 & (n-1)n \\ n & 2n & \cdots & (n-1)n & S \end{pmatrix}$ avec $S = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, on a $\text{Tr}\,(A_n^2) = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + S = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(2n^2+1)}{3}$.

c. Si $n = 1$, $A_1 = (1)$ donc $Sp(A_1) = \{1\}$ et (1) est une base de $\mathbb{R}$.

Si $n \geqslant 2$, la matrice A_n est de rang 2 car les $n-1$ premières colonnes sont proportionnelles et non nulles et la dernière n'est pas proportionnelle à la première. $\dim(E_0(A_n)) = \dim(\text{Ker}(A_n)) = n - \text{rang}\,(A_n) = n-2$ par la formule du rang et, en regardant A_n, une base de $E_0(A_n)$ est $(e_2 - 2e_1, e_3 - 3e_1, \cdots, e_{n-1} - (n-1)e_1)$. Comme A_n est diagonalisable, $\chi_{A_n} = X^{n-2}(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$ avec $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ mais peut-être $\lambda_1 = \lambda_2$. Ainsi, $\text{Tr}\,(A_n) = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\text{Tr}\,(A_n^2) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$ car A_n est semblable à $\text{diag}(0, \cdots, 0, \lambda_1, \lambda_2)$. On a donc $(\lambda_1+\lambda_2)^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2 = n^2$ donc $\lambda_1\lambda_2 = \frac{1}{2}\Big(n^2 - \frac{n(2n^2+1)}{3}\Big) = \frac{3n^2 - 2n^3 - n}{6}$. Par conséquent, λ_1

et λ_2 sont les racines de $(X-\lambda_1)(X-\lambda_2) = X^2 - nX + \dfrac{3n^2-2n^3-n}{6}$. Le discriminant de ce polynôme vaut $\Delta = n^2 - \dfrac{2(3n^2-2n^3-n)}{3} = \dfrac{n(4n^2-3n+2)}{3}$ donc $\lambda_1 = \dfrac{n+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{n-\sqrt{\Delta}}{2}$ (par exemple).

Comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, les deux sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(A_n)$ et $E_{\lambda_2}(A_n)$ sont des droites, elles sont orthogonales et incluses dans $E_0(A_n)^\perp$ d'après le théorème spectral. Comme on sait que $E_0(A_n)^\perp = \mathrm{Im}\,(A_n)$, on a $E_{\lambda_1}(A_n) \subset \mathrm{Im}\,(A_n) = \mathrm{Vect}(e_n, e_1+2e_2+\cdots+ne_n)$, on peut chercher un vecteur directeur v_1 de $E_{\lambda_1}(A_n)$ sous la forme $v_1 = \alpha_1 e_n + \beta_1(e_1+2e_2+\cdots+ne_n)$. On ne peut pas avoir $\beta_1 = 0$ car e_n n'est pas vecteur propre de A_n (car $n \geqslant 2$), donc on va plutôt chercher v_1 sous la forme $v_1 = \alpha_1 e_n + (e_1+2e_2+\cdots+ne_n)$ (en divisant par β_1). En calculant $A_n v_1$, on constate que $A_n v_1 = \lambda_1 v_1$ si et seulement si $\alpha_1 = \lambda_1 - n$. On peut donc conclure que $E_{\lambda_1}(A_n) = \mathrm{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = e_1+2e_2+\cdots+(n-1)e_{n-1}+\lambda_1 e_n$. Bien sûr, de même, $E_{\lambda_2}(A_n) = \mathrm{Vect}(v_2)$ avec $v_2 = e_1+2e_2+\cdots+(n-1)e_{n-1}+\lambda_2 e_n$.

90 **a.** A diagonalisable dans l'énoncé est entendu comme "A diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$". Par hypothèse, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telle que $A = PDP^{-1}$. Posons $Q = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$, alors $Q \in GL_{2n}(\mathbb{R})$ car $\det(Q) = (\det(P))^2 > 0$ et $Q^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$ et, par blocs, on trouve $Q^{-1}MQ = S = \begin{pmatrix} D & I_n \\ I_n & D \end{pmatrix}$. Comme S est symétrique réelle, d'après le théorème spectral, la matrice N est diagonalisable donc, la matrice M lui étant semblable, M est aussi diagonalisable.

b. Soit λ une valeur propre de A, forcément $\lambda \in \mathbb{R}$ par le théorème spectral et, pour tout vecteur $X \in E_\lambda(A)$, on a $AX = \lambda X$ donc $M\begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix} = (\lambda+1)\begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix} X \\ -X \end{pmatrix} = (\lambda-1)\begin{pmatrix} X \\ -X \end{pmatrix}$. Ceci prouve que $\mathrm{Sp}(A)+1 \subset \mathrm{Sp}(M)$ et que $\mathrm{Sp}(A)-1 \subset \mathrm{Sp}(M)$. Comme $\chi_M = \begin{vmatrix} XI_n - A & -I_n \\ -I_n & XI_n - A \end{vmatrix}$ devient $\chi_M = \begin{vmatrix} XI_n - I_n - A & -I_n \\ XI_n - I_n - A & XI_n - A \end{vmatrix}$ après l'opération par blocs $C_1 \longleftarrow C_1 + C_2$, puis $\chi_M = \begin{vmatrix} (X-1)I_n - A & -I_n \\ 0 & (X+1)I_n - A \end{vmatrix}$ après $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$, on a $\chi_M = \det((X-1)I_n - A)\det((X+1)I_n - A) = \chi_A(X+1)\chi_A(X-1)$ donc $\mathrm{Sp}(M) = (\mathrm{Sp}(A)+1)\cup(\mathrm{Sp}(A)-1)$.

Posons $P_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix} \;\middle|\; X \in E_\lambda(A) \right\}$ et $M_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ -X \end{pmatrix} \;\middle|\; X \in E_\lambda(A) \right\}$. On vérifie facilement que P_λ et M_λ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{2n}$ et que $f_\lambda : E_\lambda(A) \to P_\lambda$ et $g_\lambda : E_\lambda(A) \to M_\lambda$ définies par $f_\lambda(X) = \begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix}$ et $g_\lambda(X) = \begin{pmatrix} X \\ -X \end{pmatrix}$ sont des isomorphismes, ce qui garantit que $\dim(P_\lambda) = \dim(M_\lambda) = \dim(E_\lambda(A))$.

Posons les sous-espaces $P = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} P_\lambda$ et $M = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} M_\lambda$ de $\mathbb{R}^{2n}$. Si $(X_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \in \prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} E_\lambda(A)$ est telle que $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \begin{pmatrix} X_\lambda \\ X_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} X_\lambda = 0$ donc, comme les sous-espaces propres de A associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe, on en déduit que $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ X_\lambda = 0$ donc que la somme définissant P est directe. Ainsi, $P = \bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} P_\lambda$ et $M = \bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} M_\lambda$, ce qui montre que $\dim(P) = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = n = \dim(M)$ car, puisque A est diagonalisable, $\mathbb{R}^n = \bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} E_\lambda(A)$.

De plus, si $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in P \cap M$, on a $X = Y = -Y$ donc $X = Y = 0$ et $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc P et M sont en somme directe. Comme $\mathrm{dim}(P) = \mathrm{dim}(M) = n$ et que $P \oplus M \subset \mathbb{R}^{2n}$, on en déduit, par inclusion et égalité des dimensions, que $\mathbb{R}^{2n} = P \oplus M = \Big(\bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} P_\lambda\Big) \oplus \Big(\bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} M_\lambda\Big)$.

Comme les vecteurs non nuls de chaque P_λ ou chaque M_λ sont des vecteurs propres de M d'après ce qui précède, une base de $\mathbb{R}^{2n}$ adaptée à cette décomposition $\mathbb{R}^{2n} = P \oplus M = \Big(\bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} P_\lambda\Big) \oplus \Big(\bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} M_\lambda\Big)$ est une base formée de vecteurs propres de M, donc M est diagonalisable ce qu'on savait déjà, mais cela prouve aussi que $\mathrm{Sp}(M) = (\mathrm{Sp}(A) + 1) \cup (\mathrm{Sp}(A) - 1)$. Plus précisément, si $\mu \in \mathrm{Sp}(M)$:

- soit $\mu - 1 \in \mathrm{Sp}(A)$ et $\mu + 1 \notin \mathrm{Sp}(A)$, en notant $\lambda = \mu - 1$, on a $E_\mu(M) = P_\lambda$.
- soit $\mu + 1 \in \mathrm{Sp}(A)$ et $\mu - 1 \notin \mathrm{Sp}(A)$, en notant $\lambda = \mu + 1$, on a $E_\mu(M) = M_\lambda$.
- soit $\mu - 1 \in \mathrm{Sp}(A)$ et $\mu + 1 \in \mathrm{Sp}(A)$, en notant $\lambda_1 = \mu - 1$ et $\lambda_2 = \mu + 1$, on a $E_\mu(M) = P_{\lambda_1} \oplus M_{\lambda_2}$.

91 **a.** φ_0 est clairement de classe C^∞ par composition puisque l'exponentielle l'est.

Initialisation : $\varphi_0(x) = (-1)^0 H_0(x)\varphi_0(x)$ avec $H_0 = 1$. $\varphi_0'(x) = -2xe^{-x^2} = (-1)^1 H_1(x)\varphi_0(x)$ avec $H_1 = 2X$.
Hérédité : pour $n \in \mathbb{N}^*$, supposons l'existence de $H_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_0^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x)\varphi_0(x)$.
Alors, en dérivant, $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_0^{(n+1)}(x) = (-1)^n H_n'(x)\varphi_0(x) + (-1)^{n+1} 2x H_n(x)\varphi_0(x) = (-1)^{n+1} H_{n+1}(x)\varphi_0(x)$ si on pose le polynôme $H_{n+1} = 2XH_n - H_n' \in \mathbb{R}[X]$.
On conclut par principe de récurrence qu'il existe bien une suite de polynômes réels $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_0^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x)\varphi_0(x)$. Les polynômes H_n sont les polynômes de Hermite dans leur forme dite "physique", ils apparaissent par exemple dans le traitement du signal.

b. Initialisation : $\deg(H_0) = 0$ et $\mathrm{dom}(H_0) = 1$, $\deg(H_1) = 1$ et $\mathrm{dom}(H_1) = 2$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\deg(H_n) = n$ et $\mathrm{dom}(H_n) = 2^n$. Comme $H_{n+1} = 2XH_n - H_n'$, que $\deg(2XH_n) = n+1$ et $\deg(H_n') = n-1$, on a $\deg(H_{n+1}) = \mathrm{Max}(\deg(2XH_n), \deg(H_n')) = n+1$ et le coefficient dominant de H_{n+1} ne provient que de $2XH_n$ donc $\mathrm{dom}(H_{n+1}) = 2\mathrm{dom}(H_n) = 2^{n+1}$.
On conclut par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ \deg(H_n) = n$ et $\mathrm{dom}(H_n) = 2^n$.

c. L'application $(\,.\,|\,.\,) : (\mathbb{R}[X])^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2,\ (P|Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2}dx$ est bien définie car la fonction $f : x \mapsto P(x)Q(x)e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour $(P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ et que, par croissances comparées, on a $f(x) \underset{\pm\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$. En effet, c'est clair si $PQ = 0$. De plus, si $PQ \neq 0$, en notant $r = \deg(PQ)$, on a $P(x)Q(x) \underset{\pm\infty}{=} O(x^r)$ et on sait que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^{r+2}e^{-x^2} = 0$. Cette application $(\,.\,|\,.\,)$ est clairement bilinéaire (par linéarité de l'intégrale), symétrique (par symétrie du produit dans $\mathbb{R}$) et positive (par positivité de l'intégrale) car $x \mapsto P^2(x)e^{-x^2}$ est positive sur $\mathbb{R}$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$. De plus, si $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $(P|P) = 0$, la fonction $g : x \mapsto P^2(x)e^{-x^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 0$ implique $g = 0$ sur $\mathbb{R}$ ce qui prouve que tous les réels x sont racines de P car $e^{-x^2} > 0$. Alors, $P = 0$.
Ainsi, $(\,.\,|\,.\,)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, $(P|H_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\varphi_0^{(n)}(x)dx$. On pose $u = P$ et $v = \varphi_0^{(n-1)}$ qui sont C^1 sur $\mathbb{R}$ et vérifient $\lim\limits_{x\to\pm\infty} u(x)v(x) = 0$ par croissances comparées. Par intégration par parties, $(P|H_n) = 0 - (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x)\varphi_0^{(n-1)}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x)H_{n-1}(x)e^{-x^2}dx = (P'|H_{n-1})$.

e. Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ avec $i < j$, on a donc $(H_i|H_j) = (H'_i|H_{j-1})$ grâce à **d.** car $j \geqslant 1$. On recommence et, par une simple récurrence finie, on obtient $\forall k \in [\![0; i+1]\!]$, $(H_i|H_j) = (H_i^{(k)}|H_{j-k})$ donc, en particulier pour $k = i+1 \leqslant j$, on a $(H_i|H_j) = (H_i^{(i+1)}|H_{j-i-1})$. Or $\deg(H_i) = i$ d'après **b.** donc $H_i^{(i+1)} = 0$ et on a $(H_i|H_j) = 0$, ce qui assure bien que la famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.

f. Comme avant, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $||H_n||^2 = (H_n|H_n) = (H'_n|H_{n-1})$. On continue pour avoir, par récurrence finie, $||H_n||^2 = (H_n^{(n)}|H_0) = 2^n n!(1|1) = 2^n n!\Big(2\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\Big)$ par parité de la fonction φ_0, on a $||H_n||^2 = 2^n n!\sqrt{\pi}$ (classique intégrale de Gauss) d'après **a.** et **b.**. Comme $||H_0||^2 = (1|1) = \sqrt{\pi} = 2^0.0!\sqrt{\pi}$, on a la relation $\forall n \in \mathbb{N}$, $||H_n||^2 = 2^n n!\sqrt{\pi}$.

g.

92 **a.** D'abord, pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, comme $AP \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg(B) = n+1$, le reste R de la division euclidienne de AP par B vérifie $\deg(R) < \deg(B) = n+1$ donc $\deg(R) \leqslant n$ et on a bien $\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

De plus, pour $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(P_1,P_2) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, on pose $R_1 = \Phi(P_1)$ et $R_2 = \Phi(P_2)$ de sorte que l'on a $AP_1 = Q_1B + R_1$ avec $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ et $AP_2 = Q_2B + R_2$ avec $Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg(R_1) \leqslant n$ et $\deg(R_2) \leqslant n$. Alors, $A(\lambda_1P_1 + \lambda_2P_2) = (\lambda_1Q_1 + \lambda_2Q_2)B + \lambda_1R_1 + \lambda_2R_2$ avec $\lambda_1Q_1 + \lambda_2Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda_1R_1 + \lambda_2R_2 \in \mathbb{R}_n[X]$ car on sait que $\deg(\lambda_1R_1 + \lambda_2R_2) \leqslant \mathrm{Max}(\deg(R_1),\deg(R_2)) \leqslant n$. On peut donc conclure que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ car $\Phi(\lambda_1P_1 + \lambda_2P_2) = \lambda_1R_1 + \lambda_2R_2 = \lambda_1\Phi(P_1) + \lambda_2\Phi(P_2)$ par définition de Φ.

b. Puisque B est scindé à racines simples et de degré $n+1$, notons $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n+1}$ ses racines distinctes de sorte que $B = \lambda\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}(X-\alpha_k)$ avec $\lambda = \mathrm{dom}(B) \neq 0$. Il est classique que $\varphi : \mathbb{R}_n[X]^2 \to \mathbb{R}$ défini par $\varphi(P,Q) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} P(\alpha_k)Q(\alpha_k)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. En effet, φ est bien défini, symétrique par symétrie du produit des réels, bilinéaire par bilinéarité du produit des réels et défini positif car si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P,P) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} P(\alpha_k)^2 \geqslant 0$ et, si on suppose $\varphi(P,P) = 0$, alors $\forall k \in [\![1; n+1]\!]$, $P(\alpha_k) = 0$ donc P admet au moins $n+1$ racines alors que $\deg(P) \leqslant n$ donc $P = 0$.

Soit $(P_1,P_2) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, si $AP_1 = Q_1B + R_1$ avec $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$, $R_1 = \Phi(P_1)$ et $AP_2 = Q_2B + R_2$ avec $Q_2 \in \mathbb{R}[X]$, $R_2 = \Phi(P_2)$, on a $\forall k \in [\![1; n+1]\!]$, $(AP_1)(\alpha_k) = R_1(\alpha_k) = A(\alpha_k)P_1(\alpha_k)$ et $(AP_2)(\alpha_k) = R_2(\alpha_k) = A(\alpha_k)P_2(\alpha_k)$.

Ainsi, $\varphi(\Phi(P_1),P_2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} R_1(\alpha_k)P_2(\alpha_k) = \sum_{k=1}^{n+1} A(\alpha_k)P_1(\alpha_k)P_2(\alpha_k) = \sum_{k=1}^{n+1} P_1(\alpha_k)R_2(\alpha_k) = \varphi(P_1,\Phi(P_2))$.

D'après le théorème spectral, comme Φ est auto-adjoint, Φ est diagonalisable. Mieux, ce même théorème nous donne l'existence d'une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de Φ. Si on pose les polynômes d'interpolation de Lagrange $L_k = \displaystyle\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n+1}\frac{X-\alpha_i}{\alpha_k-\alpha_i}$, il est classique que $\varphi(L_i,L_j) = \delta_{i,j}$ pour $(i,j) \in [\![1; n+1]\!]^2$, donc $(L_1,\cdots,L_{n+1})$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire φ.

Or, pour tout entier $k \in [\![1; n+1]\!]$, si on pose $AL_k = Q_kB + R_k$ avec $R_k = \Phi(L_k)$, en évaluant en α_i, on a $A(\alpha_i)L_k(\alpha_i) = Q_k(\alpha_i)B(\alpha_i) + R_k(\alpha_i) = R_k(\alpha_i)$ donc $R_k(\alpha_i) = 0$ si $i \neq k$ et $R_k(\alpha_k) = A(\alpha_k)$. Ainsi, comme R_k et $A(\alpha_k)L_k$ coïncident en $n+1$ valeurs et sont de degrés inférieurs ou égaux à n, on a $R_k = \Phi(L_k) = A(\alpha_k)L_k$.

Ainsi, $(L_1,\cdots,L_{n+1})$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de Φ associés aux valeurs propres $A(\alpha_1),\cdots,A(\alpha_{n+1})$. Par exemple, on a $\mathrm{Tr}\,(\Phi) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} A(\alpha_k)$ et $\det(\Phi) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} A(\alpha_k)$.

c. La famille $\mathcal{B} = (1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n)$ est libre car elle est formée de polynômes de degrés échelonnés et $\mathcal{B}$ est de cardinal $n+1$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Par la formule de TAYLOR pour les polynômes, $A = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^{(i)}(a)}{i!}(X-a)^i$. Pour $k \in [\![0;n]\!]$, on a $\Phi((X-a)^k) = \sum_{i=0}^{n-k} \frac{A^{(i)}(a)}{i!}(X-a)^{i+k}$ car $(X-a)^k A = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^{(i)}(a)}{i!}(X-a)^{i+k} = (X-a)^{n+1}\Big(\sum_{i=n+1-k}^{+\infty} \frac{A^{(i)}(a)}{i!}(X-a)^{i+k-n-1}\Big) + \Big(\sum_{i=0}^{n-k} \frac{A^{(i)}(a)}{i!}(X-a)^{i+k}\Big)$ avec $\deg\Big(\sum_{i=0}^{n-k} \frac{A^{(i)}(a)}{i!}(X-a)^{i+k}\Big) \leqslant n = \deg(B) - 1$ d'où $M = \begin{pmatrix} A(a) & 0 & \cdots & 0 \\ A'(a) & A(a) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ A^{(n)}(a)/n! & \cdots & A'(a) & A(a) \end{pmatrix}$ est la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}$. Par conséquent, $\chi_\Phi = (X - A(a))^{n+1}$ donc Φ n'a qu'une seule valeur propre qui est $A(a)$ donc Φ est diagonalisable si et seulement si $E_{A(a)}(\Phi) = \mathbb{R}_n[X]$, c'est-à-dire si et seulement si $\Phi = A(a)\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$. Ainsi, Φ est diagonalisable si et seulement si $M = A(a)I_{n+1}$, ce qui se traduit par $A'(a) = A''(a) = \cdots = A^{(n)}(a) = 0$, ou encore par le fait que a est une racine de multiplicité au moins $n+1$ de $A - A(a)$. On peut aussi dire que Φ est diagonalisable si et seulement si $\Phi(1) = A(a)$ car on a l'équivalence $(\exists Q \in \mathbb{R}[X],\ A - A(a) = (X-a)^{n+1}Q) \Longleftrightarrow \Phi(1) = A(a)$.

93

94 **a.** Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien orienté canonique, si u est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, sa matrice dans la base canonique étant la matrice antisymétrique $A = \mathrm{Mat}_{\,can}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ u(x,y) = (-y, x)$ donc $(u(x,y)|(x,y)) = (-y).x + x.y = 0$ donc u est un endomorphisme antisymétrique de $\mathbb{R}^2$.

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté canonique, si $u : v \mapsto e_1 \wedge v$, alors u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ car le produit vectoriel est bilinéaire (donc linéaire à droite). De plus, on sait que $\forall v \in \mathbb{R}^3,\ (e_1 \wedge v) \perp v$ donc $(u(v)|v) = 0$, ainsi u est un endomorphisme antisymétrique de $\mathbb{R}^3$. On a d'ailleurs $A = \mathrm{Mat}_{\,can}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui, bizarrement, est aussi antisymétrique.

b. Notons $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ la base orthonormale de l'énoncé et raisonnons par double implication.

($\Longrightarrow$) Supposons u antisymétrique, donc $\forall x \in E,\ ((u(x)|x) = 0$. Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormale, on sait que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \big((u(v_j)|v_i)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Or, pour $i \in [\![1;n]\!]$, $(u(v_i)|v_i)$ donc les termes diagonaux de A sont nuls. De plus, si $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ et $i \neq j$, on a $(u(v_i + v_j)|v_i + v_j) = 0$, ce qui donne par bilinéarité du produit scalaire et car $(u(v_i)|v_i) = (u(v_j)|v_j) = 0$, $(u(v_i)|v_j) + (u(v_j)|v_i) = 0$ donc les cases (i,j) et (j,i) de A sont opposées. Ainsi, A est antisymétrique.

($\Longleftarrow$) Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est antisymétrique, pour $(x,y) \in E^2$, en notant X et Y les vecteurs colonnes associés de leurs coordonnées dans $\mathcal{B}$, comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, on a $(u(x)|y) = (AX)^T Y = X^T A^T Y$ donc $(u(x)|y) = -X^T AY = -(x|u(y))$ donc, en prenant $y = x$, on a $(u(x)|x) = 0$ donc u est antisymétrique.

Ainsi, si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E, u antisymétrique $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ antisymétrique. On a montré au passage que u est antisymétrique si et seulement si $\forall (x,y) \in E^2,\ (u(x)|y) = -(x|u(y))$.

c. Si n est impair et si $u \in \mathcal{L}(E)$ est antisymétrique, en notant $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, comme $\det(u) = \det(A)$, on a $\det(u) = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(u)$ donc $\det(u) = 0$. Ainsi, si n est impair, tous les endomorphismes antisymétriques de E ne sont pas bijectifs.

d. Si $n = 2p$ est pair, on a vu en **a.** que $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique et inversible. Ainsi, si on considère u l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ vaut $M = \text{diag}(A, \cdots, A)$ (p fois A en diagonale par blocs), alors M est antisymétrique donc u l'est aussi d'après **b.** car $\mathcal{B}$ est orthonormale, et u est inversible car $\det(u) = \det(A)^p = 1$. La condition suffisante de la question précédente est donc aussi nécessaire et, en notant $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble des endomorphismes antisymétrique de E, (n pair) $\Longleftrightarrow$ ($\mathcal{A}(E) \cap GL(E) \neq \emptyset$).

e. Soit $u \in \mathcal{A}(E)$ tel que u est diagonalisable. Soit λ une valeur propre de u, il existe $x \neq 0_E$ tel que $u(x) = \lambda x$. Mais on a $(u(x)|x) = \lambda ||x||^2 = 0$ alors que $||x||^2 > 0$ donc $\lambda = 0$. Comme 0 est la seule valeur propre possible pour u, la matrice de u dans une base de vecteurs propres est la matrice nulle donc $u = 0$. Ainsi, le seul endomorphisme antisymétrique diagonalisable est l'endomorphisme nul.

f. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ antisymétrique et $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E, on sait d'après **b.** que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est antisymétrique donc $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^2) = A^2$ est symétrique car $B^T = (A^2)^T = (A^T)^2 = (-A)^2 = A^2 = B$. Comme $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^2)$ est symétrique, le cours nous apprend que u^2 est un endomorphisme autoadjoint (ou symétrique). D'après le théorème spectral, u^2 est diagonalisable. Il existe même une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u^2.

g. Si $E = \mathbb{R}^3$ (supposé euclidien orienté canonique) et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ antisymétrique, on sait d'après **b.**, comme la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u)$ est antisymétrique donc qu'on peut écrire $A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

<u>Existence</u> : en posant le vecteur $w = ae_1 + be_2 + ce_3 \in \mathbb{R}^3$, pour un vecteur $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in \mathbb{R}^3$, comme la base canonique est une base orthonormée directe, on calcule classiquement $w \wedge x$ et on trouve $w \wedge x = (-cx_2 + bx_3)e_1 + (cx_1 - ax_3)e_2 + (-bx_1 + ax_2)e_3 = u(x)$.

<u>Unicité</u> : soit w_1 et w_2 dans $\mathbb{R}^3$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ u(x) = w_1 \wedge x = w_2 \wedge x$, alors $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ (w_1 - w_2) \wedge x = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $w_1 - w_2$ est colinéaire à tous les vecteurs de $\mathbb{R}^3$, ce qui n'est possible que si $w_1 = w_2$.

Ainsi, si $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, il existe un unique vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ u(x) = w \wedge x$.

Si w est unitaire et si $v = -u^2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, on a $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ v(x) = -w \wedge (w \wedge x) = (w|w)x - (w|x)w = x - (w|x)w$. Ainsi, $\forall x \perp w,\ v(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et $v(w) = 0_{\mathbb{R}^3}$, donc v est la projection orthogonale sur le plan $\text{Vect}(w)^\perp$.

h. Soit $x \in \text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u)$, alors il existe $y \in E$ tel que $x = u(y)$ et $u(x) = 0_E$. Ainsi, d'après **b.**, $(u(x)|y) = (0_E|y) = 0 = (x|u(y)) = ||x||^2$ donc $x = 0_E$ ce qui prouve que $\text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(u)$ sont en somme directe. Par la formule du rang, $\dim(E) = \dim(\text{Im}(u)) + \dim(\text{Ker}(u))$ donc $E = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u)$. Comme $\text{Im}(u)$ est un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$, la version géométrique du théorème du rang nous apprend que u induit un automorphisme $v = u_{\text{Im}(u)}$ de $\text{Im}(u)$. Comme v est antisymétrique car u l'est, la question **c.** nous montre que $\dim(\text{Im}(u))$ est pair. Ainsi, $\text{rang}(u)$ est pair.

95 **a.** Soit $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ et $\mathcal{B}' = (w_1, \cdots, w_n)$ deux bases orthonormées de E, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$. On sait qu'en posant P la matrice de passage entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, on a $P \in O(n)$ et $A = PA'P^{-1} = PA'P^T$. Comme $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases orthonormées, en posant $A = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $A' = \left(a'_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on a $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_{i,j} = (u(v_j)|v_i)$ et $a'_{i,j} = (u(w_j)|w_i)$. La matrice de Gram $G = A^T A = (g_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ vérifie $g_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} (u(v_i)|v_k)(u(v_j)|v_k)$ donc $\text{Tr}\ (G) = \sum\limits_{i=1}^{n} g_{i,i} = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,i}^2 \right) = ||A||^2$ pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Or $||A||^2 = \text{Tr}\ (A^T A) = \text{Tr}\ (PA'^T P^T P A' P^T) = \text{Tr}\ (PA'^T A' P^T)$ car $P^T P = I_n$ et on a $||A||^2 = \text{Tr}\ (A'^T A') = ||A'||^2$ car $PA'^T A' P^T$ et $A'^T A'$ sont semblables (et même orthosemblables).

b. D'après le théorème spectral, comme u est autoadjoint, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_0 = (e_1, \cdots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de u : $\forall k \in [\![1;n]\!],\ u(e_k) = \lambda_k e_k$. Ainsi, $a = \sum\limits_{k=1}^{n} ||u(e_k)||^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^2$. Dans ce cas, a est la somme des carrés des valeurs propres de u comptées avec leur ordre de multiplicité.

c. Si u est une isométrie, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on a $||u(v_k)|| = ||v_k|| = 1$ donc $a = \sum\limits_{k=1}^{n} 1 = n$.

96 **a.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré impair, notons $d = \text{deg}(P)$ et $a = \text{dom}(P) \neq 0$. Supposons que $a > 0$ (sinon on remplace P par $-P$).

<u>Méthode 1</u> : on a $P(t) \underset{+\infty}{\sim} at^d$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = +\infty$. De même, on a $\lim\limits_{t \to -\infty} P(t) = -\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, comme P est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, il existe au moins une valeur $c \in \mathbb{R}$ tel que $P(c) = 0$ donc P admet au moins une racine réelle.

<u>Méthode 2</u> : avec les multiplicités algébriques.

b. χ_A est un polynôme unitaire de degré $2n+1$ impair donc, d'après **a.**, χ_A admet au moins une racine réelle. Or si $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de A, il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = \lambda X$ et on a donc $||AX||^2 = (AX|AX) = (AX)^T AX = X^T A^T AX = X^T X = ||X||^2$ car $A^T A = I_{2n+1}$ donc, comme $||X|| > 0$ car $X \neq 0$ et que $||AX||^2 = ||\lambda X||^2 = \lambda^2 ||X|||^2$, on en déduit que $\lambda^2 = 1$ donc que $\lambda = \pm 1$.

<u>Méthode 1</u> : $\det(A - I_{2n+1}) = \det(A - A^T A)$ car $A \in O_{2n+1}(\mathbb{R})$ donc, par multiplicativité du déterminant, on a $\det(A - I_{2n+1}) = \det(I_{2n+1} - A^T)\det(A) = \det(I_{2n+1} - A)$ car $\det(A) = 1$. Ainsi, on parvient à $\det(A - I_{2n+1}) = (-1)^{2n+1}\det(A - I_{2n+1})$ et $\det(A - I_{2n+1}) = 0$ donc 1 est valeur propre de A.

<u>Méthode 2</u> : en décomposant χ_A dans $\mathbb{R}[X]$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \in O_{2n+1}(\mathbb{R}) \setminus SO_{2n+1}(\mathbb{R})$.

<u>Méthode 1</u> : $\det(A + I_{2n+1}) = \det(A + A^T A)$ car $A \in O_{2n+1}(\mathbb{R})$ donc, par multiplicativité du déterminant, on a $\det(A + I_{2n+1}) = \det(A)\det(I_{2n+1} + A^T) = -\det(A + I_{2n+1})$ car $\det(A) = -1$. Ainsi, $\det(A + I_{2n+1}) = 0$ donc -1 est valeur propre de A.

<u>Méthode 2</u> : en décomposant χ_A dans $\mathbb{R}[X]$.

97 **a.** D'après le théorème spectral, la matrice symétrique réelle M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. 5 est valeur propre de M car $M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, . De plus, $M + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est de rang 1 donc -1 est valeur propre de M : M n'est pas symétrique définie positive car elle admet des valeurs propres de signes opposés.

Pour aller plus loin, $\dim(E_{-1}(M)) = 3 - \text{rang}(M + I_3) = 2$ par la formule du rang et, comme $E_{-1}(M)$ et $E_5(M)$ sont en somme directe, on a $\mathbb{R}^3 = E_{-1}(M) \oplus E_5(M)$ et M est diagonalisable. Une base de vecteurs propres est (v_1, v_2, v_3) avec $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,-1,0)$ et $v_3 = (1,0,-1)$. Le théorème spectral donne l'existence d'une base orthonormale de vecteurs propres, on peut prendre par exemple (w_1, w_2, w_3) avec $w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$, $w_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$.

b. $A_\alpha = (\alpha-1)I_3 + M$ est symétrique réelle et $\chi_{A_\alpha} = \det(XI_3 - A_\alpha) = \det((X-\alpha+1)I_3 - M) = \chi_M(X-\alpha+1)$. Or $\chi_M = (X-5)(X+1)^2$ donc $\chi_{A_\alpha} = (X-4-\alpha)(X+2-\alpha)^2$. Ainsi, $\text{Sp}(A_\alpha) = \{\alpha-2, \alpha+4\}$ avec $\alpha - 2 < \alpha + 4$ donc A_α est symétrique définie positive si et seulement si $\alpha - 2 > 0$: $A_\alpha \in S_3^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\alpha > 2$.

98 **a.** Pour $j \in [\![1;n]\!]$, par hypothèse, on a $||e_j||^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} (e_j|e_k)^2 = ||e_j||^4 + \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} (e_j|e_k)^2$ donc, comme $||e_j|| = 1$, on en déduit que $\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} (e_j|e_k)^2 = 0$ donc que $\forall k \in [\![1;n]\!] \setminus \{j\}, (e_j|e_k) = 0$. Ainsi, la famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est une famille orthogonale et, comme elle ne contient pas le vecteur nul, elle est libre.

b. Posons le sous-espace $F = \text{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$ de E. Comme $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est libre avec **a.**, on a $\dim(F) = n$. Si $x \in F^\perp$, alors $||x||^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} (x|e_k)^2 = 0$ donc $x = 0_E$. On en déduit que $F^\perp = \{0_E\}$ or, comme F est de dimension finie, on sait d'après le cours que $F = (F^\perp)^\perp = \{0_E\}^\perp = E$ donc $E = F$ est bien de dimension finie et $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E.

99 **a.** Pour $(P,Q) \in E^2$, $f : t \mapsto \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1;1[$ et on a $f(t) \underset{t\to 1^-}{=} O\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right) \underset{t\to 1^-}{=} O\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ et $f(t) \underset{t\to -1^+}{=} O\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right) \underset{t\to -1^+}{=} O\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}\right)$ car $1-t^2 = (1-t)(1+t)$ donc f est intégrable sur $]-1;1[$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN, ce qui garantit l'existence de $(P|Q)$.

La bilinéarité de $(\,.\,|\,.\,)$ est garantie par la linéarité de l'intégrale.

La symétrie de $(\,.\,|\,.\,)$ provient du fait que $\forall t \in]-1;1[,\ P(t)Q(t) = Q(t)P(t)$.

L'aspect défini positif $(\,.\,|\,.\,)$ découle de la positivité de l'intégrale car pour tout $P \in E$, $t \mapsto \dfrac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}$ est une fonction positive donc $(P|P) \geqslant 0$. De plus, si $(P|P) = 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}$ est positive et continue sur $]-1;1[$ et d'intégrale nulle donc, d'après le cours, elle est nulle ce qui impose $\forall t \in]-1;1[,\ P(t) = 0$. Ainsi, P admet une infinité de racines donc $P = 0$.

Tout ceci fait de $(\,.\,|\,.\,)$ un produit scalaire sur E.

b. D'abord une récurrence pour l'existence d'une telle suite :

Initialisation : si on pose $T_0 = 1$ et $T_1 = X$, on a bien $(T_0, T_1) \in E^2$ et $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0.\theta)$ et $T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta) = \cos(1.\theta)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et $(T_n, T_{n+1}) \in E^2$ tels que $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta),\ T_{n+1}(\cos(\theta)) = \cos((n+1)\theta)$. Posons $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$, on a bien $T_{n+2} \in E$ et, comme $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$, on a $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_{n+2}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) = \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) - \cos(n\theta) = \cos((n+2)\theta)$.

Par principe de récurrence, cette suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

Pour l'unicité : si une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ vérifie aussi $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ U_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$, comme

$\theta \mapsto \cos(\theta)$ est surjective de $\mathbb{R}$ dans $[-1;1]$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [-1;1]$, $T_n(x) = U_n(x)$ donc, T_n et U_n coïncidant en une infinité de valeurs, $U_n = T_n$.

c. T_0 est de degré 0 et de coefficient dominant 1, il est à part dans la récurrence qui suit.

Initialisation : T_1 est de degré 1 et de coefficient dominant 1 car $T_1 = X$, T_2 de degré 2 et de coefficient dominant 2 car $T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} et T_{n+1} est de degré $n+1$ et de coefficient dominant 2^n. Alors, comme $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ et que $\deg(2XT_{n+1}) = n+2 > n = \deg(-T_n)$, on sait d'après le cours que $\deg(T_{n+2}) = n+2$. De plus, le coefficient dominant de T_{n+2} ne provient que du terme $2XT_{n+1}$, donc il vaut $\mathrm{dom}(T_{n+2}) = 2\mathrm{dom}(T_{n+1}) = 2.2^n = 2^{n+1} = 2^{(n+2)-1}$.

Conclusion : par principe de récurrence double, on a établi que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(T_n) = n$ et $\mathrm{dom}(T_n) = 2^{n-1}$.

d. Avec les notations de la question **a.**, comme la fonction f est continue sur $]-1;1[$ et que la fonction $\varphi : \theta \mapsto \cos(\theta)$ est une bijection strictement décroissante de classe C^1 de $]0;\pi[$ dans $]-1;1[$, on a la relation $(P|Q) = \displaystyle\int_\pi^0 \frac{P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))}{\sqrt{1-\cos^2(\theta)}}(-\sin(\theta))d\theta = \int_0^\pi P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))d\theta$ en ayant posé le changement de variable $t = \cos(\theta) = \varphi(\theta)$. Calculons, pour $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, la valeur de $(T_n|T_m)$.

- Si $n \neq m$, on a la relation $(T_n|T_m) = \displaystyle\int_0^\pi T_n(\cos(\theta))T_m(\cos(\theta))d\theta = \int_0^\pi \cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta$ donc $(T_n|T_m) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi (\cos((n+m)\theta) + \cos(n-m)\theta))d\theta = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{\sin((n+m)\theta)}{n+m}\right]_0^\pi + \left[\frac{\sin((n-m)\theta)}{n-m}\right]_0^\pi\right) = 0.$
- Si $n = m = 0$, on a $(T_0|T_0) = \displaystyle\int_0^\pi T_0(\cos(\theta))^2 d\theta = \pi$ donc $||T_0|| = \sqrt{\pi}$.
- Si $n = m > 0$, on a $(T_n|T_n) = \displaystyle\int_0^\pi T_n(\cos(\theta))^2 d\theta = \int_0^\pi \cos(n\theta))^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1+\cos(2n\theta))d\theta$ donc $(T_n|T_n) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin(2n\theta)}{2n}\right]_0^\pi = \dfrac{\pi}{2}$ donc $||T_n|| = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

Ainsi, la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$ et la famille $\left(\dfrac{T_0}{\sqrt{\pi}}\right) \amalg \left(\dfrac{\sqrt{2}T_n}{\sqrt{\pi}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}[X]$.

100 **a.** La matrice A est symétrique réelle donc, d'après le théorème spectral, A est diagonalisable et il existe une matrice orthogonale $P \in O(3)$ et $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = PDP^T$.

b. Avec Sarrus, on calcule $\chi_A = \begin{vmatrix} X-x & -1 & 0 \\ -1 & X & 1 \\ 0 & 1 & X-x \end{vmatrix} = X(X-x)^2 - 2(X-x) = (X-x)(X^2-xX-2)$ qui est scindé sur $\mathbb{R}$ par le théorème spectral. Le discriminant Δ de $X^2 - xX - 2$ vaut $\Delta = x^2 + 8 > 0$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \left\{\lambda_1 = x, \lambda_2 = \dfrac{x+\sqrt{x^2+8}}{2}, \lambda_3 = \dfrac{x-\sqrt{x^2+8}}{2}\right\}$. Comme $x^2+8 > 0$, $\lambda_2 \neq \lambda_3$. De plus, $x = \dfrac{x \pm \sqrt{x^2+8}}{2} \iff x = \pm\sqrt{x^2+8} \implies 8 = 0$ en élevant au carré ce qui montre que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et $\lambda_1 \neq \lambda_3$.

Ainsi, χ_A est scindé à racines simples donc les sous-espaces propres de A associés à $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont des droites.

Comme $A - \lambda_1 I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -x & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, on constate que $E_{\lambda_1}(A) = \mathrm{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = (1,0,1)$.

Comme $A - \lambda_2 I_3 = \begin{pmatrix} \lambda_3 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda_2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, on a $E_{\lambda_2}(A) = \mathrm{Vect}(v_2)$ avec $v_2 = (1, -\lambda_3, -1)$ car $\lambda_2\lambda_3 = -2$.

Comme $A-\lambda_3 I_3=\begin{pmatrix}\lambda_2 & 1 & 0\\ 1 & -\lambda_3 & -1\\ 0 & -1 & \lambda_2\end{pmatrix}$, on a $E_{\lambda_3}(A)=\mathrm{Vect}(v_3)$ avec $v_3=(1,-\lambda_2,-1)$.

c. D'après le calcul de χ_A, on a $\det(A)=-\chi_A(0)=-2x$ donc A n'est pas inversible si et seulement si $x=0$. Dans ce cas, $\mathrm{Sp}(A)=\{\lambda_1=0,\lambda_2=\sqrt{2},\lambda_3=-\sqrt{2}\}$ et une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A est $\mathcal{B}=(w_1,w_2,w_3)$ avec $w_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$, $w_2=\dfrac{1}{2}(1,\sqrt{2},1)$ et $w_3=\dfrac{1}{2}(1,-\sqrt{2},1)$.

101 **a.** La fonction Tr est une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car $\mathrm{Tr}\,(I_n)=n\neq 0$. Ainsi, d'après le cours, $H=\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}\,)$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\dim(H)=n^2-1$.

b. Par définition de H, pour $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $M\in H\iff \mathrm{Tr}\,(M)=0\iff (M|I_n)=0$. Ainsi, $I_n\in H^\perp$ ce qui, comme $H^\perp$ est une droite, prouve que $H^\perp=\mathrm{Vect}(I_n)$.

c. Comme $I_n\in H^\perp$, si p_H est la projection orthogonale sur H, on a $p_H(I_n)=0$. Or, d'après le cours, on dispose de la relation $d(I_n,H)=||I_n-p_H(I_n)||$ donc $d(I_n,H)=||I_n||=\sqrt{\mathrm{Tr}\,(I_n)}=\sqrt{n}$.

d. Pour $(i,j)\in[\![1;n]\!]^2$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puisque $c_{i,j}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}$, on a la majoration $c_{i,j}^2\leqslant\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}a_{i,k}^2\Big)\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}b_{k,j}^2\Big)$. Ainsi, $||AB||^2=||C||^2=\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}c_{i,j}^2\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}a_{i,k}^2\Big)\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}b_{k,j}^2\Big)\right)$ ce qui donne $||AB||^2\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}a_{i,k}^2\Big)\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}b_{k,j}^2\Big)\right)=\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{i,k}^2\Big)\times\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}b_{k,j}^2\Big)=||A||^2\,||B||^2$. En passant à la racine, on a bien $||AB||\leqslant||A||\,||B||$.

102 **a.** D'après la formule du rang, comme E est de dimension finie et que $f-\mathrm{id}_E\in\mathcal{L}(E)$, on a l'égalité $\dim(\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_E))=\dim(E)-\mathrm{rang}\,(f-\mathrm{id}_E))=\dim(E)-\dim(\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{id}_E))=\dim(\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{id}_E)^\perp)$. De plus, soit $x\in\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_E)$, alors $f(x)=x$. Pour $y\in\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{id}_E)$, il existe un vecteur $z\in E$ tel que $y=f(z)-z$ donc $(x|y)=(x|f(z)-z)=(x|f(z))-(x|z)=(f(x)|f(z))-(x|z)$ car $f(x)=x$ donc $(x|y)=0$ car f est une isométrie donc qu'elle conserve le produit scalaire. On vient de montrer que $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_E)\subset\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{id}_E)^\perp$, et on conclut $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_E)=\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{id}_E)^\perp$ avec l'égalité des dimensions.

b. Comme $(f-\mathrm{id}_E)^2=(f-\mathrm{id}_E)\circ(f-\mathrm{id}_E)=0$, on a $\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{id}_E)\subset\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_E)$ donc, avec **a.**, $\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{id}_E)\subset\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{id}_E)^\perp$. Si $x\in\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{id}_E)$, on a donc $(x|x)=||x||^2=0$ donc $x=0_E$ ce qui prouve que $\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{id}_E)=\{0_E\}$ donc que $f=\mathrm{id}_E$.

103 **a.** D'abord f est bien un endomorphisme de E par bilinéarité du produit scalaire. De plus, pour tout $(x,y)\in E^2$, on a $(f(x)|y)=\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}(e_k|x)e_k\Big|y\Big)=\sum\limits_{k=1}^{n}(e_k|x)(e_k|y)=\Big(x\Big|\sum\limits_{k=1}^{n}(e_k|y)e_k\Big)$ par symétrie et linéarité du produit scalaire à gauche et à droite donc, par définition, f est un endomorphisme auto-adjoint de E. Pour $x\in E$, $(f(x)|x)=\sum\limits_{k=1}^{n}(e_k|x)^2\geqslant 0$ et, si $x\neq 0_E$, comme $x\notin E^\perp=\mathrm{Vect}(e_1,\cdots,e_n)^\perp=\{0_E\}$, il existe un indice $k\in[\![1;n]\!]$ tel que $(e_k|x)\neq 0$ ce qui donne $(f(x)|x)>0$. On en déduit que $f\in S^{++}(E)$.

D'après le théorème spectral, χ_f est scindé sur $\mathbb{R}$ et si $\lambda\in\mathbb{R}$ est une valeur propre de f, il existe $x\neq 0_E$ tel que $f(x)=\lambda x$ donc $(f(x)|x)=(\lambda x|x)=\lambda||x||^2>0$ donc $\lambda>0$ car $||x||^2>0$. Ainsi, f est autoadjoint à valeurs propres strictement positives.

b. Comme $0\notin\mathrm{Sp}(f)$, f est un automorphisme de E. En effet, si $x\in\mathrm{Ker}(f)$, on a $f(x)=0_E$ donc $(f(x)|x)=0$

ce qui impose $x = 0_E$ d'après **a.** donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ ce qui montre que $f \in GL(E)$ car E est de dimension finie. Comme f est autoadjoint, par le théorème spectral, il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ de E formée de vecteurs propres de f. Notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres. Soit g l'unique endomorphisme de E tel que $\forall k \in [\![1;n]\!],\ g(v_k) = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_k}} v_k$. Alors $\forall k \in [\![1;n]\!],\ g^2(v_k) = g\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_k}} v_k\right) = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_k}} g(v_k) = \dfrac{1}{\lambda_k} v_k = f^{-1}(v_k)$. Comme les endomorphismes g^2 et f^{-1} coïncident sur une base, on a $g^2 = f^{-1}$.

c. La famille $\mathcal{B} = \big(g(e_1), \cdots, g(e_n)\big)$ est de cardinal $n = \dim(E)$. Comme g est un automorphisme de E, $\mathcal{B}$ est l'image par g de la base $(e_1, \cdots, e_n)$ donc $\mathcal{B}$ est une base de E.

Pour $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $(g(e_i)|g(e_j)) = (e_i|g^2(e_j))$ car $g \in S(E)$ donc $(g(e_i)|g(e_j)) = (e_i|f^{-1}(e_j))$. En posant $x_j = f^{-1}(e_j)$, on a $f(x_j) = e_j = \sum\limits_{k=1}^{n} (e_k|x_j)e_k$ par définition de f donc, en identifiant les coordonnées du vecteur $e_j = \sum\limits_{k=1}^{n} \delta_{k,j} e_k = \sum\limits_{k=1}^{n} (e_k|x_j)e_k$ dans la base $(e_1, \cdots, e_n)$, on trouve que $\forall k \in [\![1;n]\!],\ (e_k|x_j) = \delta_{k,j}$. On a donc $(g(e_i)|g(e_j)) = \delta_{i,j}$ et $\mathcal{B}$ est bien une base orthonormée de E.

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 8 PROBABILITÉ ET VARIABLES ALÉATOIRES

104 **a.** Comme $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y'(\Omega) = \mathbb{N}$, on a déjà $(Y+Y')(\Omega) \subset \mathbb{N}$. De plus, pour tout entier naturel n, on a $(Y+Y'=n) = \bigsqcup_{k=0}^{n}(Y=k, Y'=n-k) \in \mathcal{A}$ donc, comme ces évènements sont incompatibles, on a $\mathbb{P}(Y+Y'=n) = \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(Y=k, Y'=n-k)$ par σ-additivité. Puisque Y et Y' sont indépendants, il vient $\mathbb{P}(Y+Y'=n) = \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(Y=k)\,\mathbb{P}(Y'=n-k) = \sum_{k=0}^{n}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\times\frac{e^{-\lambda'}\lambda'^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-(\lambda+\lambda')}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k\lambda'^{n-k}$ donc $\mathbb{P}(Y+Y'=n) = \frac{e^{-(\lambda+\lambda')}(\lambda+\lambda')^n}{n!}$ par NEWTON. Ainsi, $Y+Y'$ suit la loi de POISSON de paramètre $\lambda+\lambda'$.

Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ que si $X_1, \cdots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois de POISSON de paramètres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi de POISSON de paramètre $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

<u>Initialisation</u> pour $n = 1$ il n'y a rien à prouver et le cas $n = 2$ vient d'être fait avec $Y = X_1$ et $Y' = X_2$.

<u>Hérédité</u> : soit $n \geqslant 2$ tel que la propriété soit vraie et soit $X_1, \cdots, X_n, X_{n+1}$ des variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois de POISSON de paramètres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$. Par le lemme des coalitions, en posant $Y = X_1 + \cdots + X_n$, on a indépendance de Y et X_{n+1} et Y suit la loi de POISSON de paramètre $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$. D'après ce qui précède, $Y + X_{n+1}$ suit la loi de POISSON de paramètre $\lambda + \lambda_{n+1}$ donc $X_1 + \cdots + X_{n+1} = Y + X_{n+1}$ suit la loi de POISSON de paramètre $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1}$..

Par principe de récurrence, on a bien établi que si $n \geqslant 1$ et que $X_1, \cdots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois de POISSON de paramètres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi de POISSON de paramètre $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

b. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on admet l'existence d'une famille de variables aléatoires indépendantes $X_1, \cdots, X_k$ suivant toutes la loi de POISSON de paramètre $\frac{\lambda}{k}$. D'après la question précédente, $\sum_{i=1}^{k} X_i$ suit la loi de POISSON de paramètre $\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda}{k} = \lambda$ donc Y et $\sum_{i=1}^{k} X_i$ suivent la même loi donc Y est k-divisible. Comme ceci est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Y est infiniment divisible.

c. <u>Méthode 1 (Théodore)</u> : par l'absurde, on suppose que $\exists j \in [\![1;n]\!],\ \mathbb{P}\Big(|X_j| > \frac{A}{n}\Big) > 0$. Comme $X_1, \cdots, X_n$ suivent la même loi, on a aussi $\forall i \in [\![1;n]\!],\ \mathbb{P}\Big(|X_i| > \frac{A}{n}\Big) > 0$. Comme $\Big(|X_j| > \frac{A}{n}\Big) = \Big(X_j < -\frac{A}{n}\Big) \sqcup \Big(X_j > \frac{A}{n}\Big)$, on a par exemple que $\mathbb{P}\Big(X_j > \frac{A}{n}\Big) > 0$. Ainsi, $\forall i \in [\![1;n]\!],\ \mathbb{P}\Big(X_i > \frac{A}{n}\Big) > 0$. Or $\bigcap_{i=1}^{n}\Big(X_i > \frac{A}{n}\Big) \subset (Y > A)$, ce qui montre par indépendance de $X_1, \cdots, Xn$ que $\mathbb{P}(Y > A) \geqslant \Big(\mathbb{P}(X_1 > \frac{A}{n})\Big)^n > 0$ donc $\mathbb{P}(|Y| > A) > 0$. Non !

<u>Méthode 2 (Maxime)</u> : on a $\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\Big(X_i > \frac{A}{n}\Big)\Big) \sqcup \Big(\bigcap_{i=1}^{n}\Big(X_i < -\frac{A}{n}\Big)\Big) \subset (Y \notin [-A;A])$ donc, par indépendance

de $X_1, \cdots, X_n$, il vient $\mathbb{P}\Big(X_1 > \dfrac{A}{n}\Big)^n + \mathbb{P}\Big(X_1 < -\dfrac{A}{n}\Big)^n = 1 - \mathbb{P}(Y \in [-A; A]) = 0$, ce qui impose les relations $\mathbb{P}\Big(X_1 > \dfrac{A}{n}\Big) = \mathbb{P}\Big(X_1 < -\dfrac{A}{n}\Big) = 0$ donc $\mathbb{P}\Big(|X_1| \leqslant \dfrac{A}{n}\Big) = 1$.

Quelle que soit la méthode, $\forall i \in [\![1; n]\!]$, $\mathbb{P}\Big(X_i \in \Big[-\dfrac{A}{n}; \dfrac{A}{n}\Big]\Big) = \mathbb{P}\Big(|X_i| \leqslant \dfrac{A}{n}\Big) = 1 - \mathbb{P}\Big(|X_i| > \dfrac{A}{n}\Big) = 1$.

d. D'après la question précédente, X_i^2 est presque sûrement à valeurs dans $\Big[0; \dfrac{A^2}{n^2}\Big]$ donc $\mathbb{E}(X_i^2) \leqslant \dfrac{A^2}{n^2}$ car $\mathbb{E}(X_i^2) = \sum\limits_{x \in X_i(\Omega)} x^2\, \mathbb{P}(X_i = x) = \sum\limits_{\substack{x \in X_i(\Omega) \\ x^2 \leqslant A^2/n^2}} x^2\, \mathbb{P}(X_i = x) \leqslant \dfrac{A^2}{n^2} \sum\limits_{\substack{x \in X_i(\Omega) \\ x^2 \leqslant A^2/n^2}} x^2\, \mathbb{P}(X_i = x) \leqslant \dfrac{A^2}{n^2}$. Comme $\mathbb{E}(X_i)^2 \geqslant 0$, par la formule de König-Huygens, $\mathbb{V}(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(X_i)^2 \leqslant \dfrac{A^2}{n^2}$.

e. Si Y est infiniment divisible, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après **d.**, on a $0 \leqslant \mathbb{V}(Y) \leqslant \dfrac{A^2}{n}$. On passe à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans cette inégalité et $\mathbb{V}(Y) = 0$. Or $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}((Y - \mathbb{E}(Y))^2) = \sum\limits_{y \in Y(\Omega)} (y - \mathbb{E}(Y))^2\, \mathbb{P}(Y = y)$ par formule de transfert, et comme cette somme est nulle, on a $\forall y \neq \mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{P}(Y = y) = 0$ donc, en sommant, $\mathbb{P}(Y \neq E(Y)) = 0$, ce qui prouve que $\mathbb{P}(Y = \mathbb{E}(Y)) = 1$, et Y est presque sûrement constante.

f. Soit un entier $k \geqslant 2$, supposons que Y soit k-divisible, alors il existe des variables aléatoires réelles $X_1, \cdots, X_k$ indépendantes et suivant toutes la même loi telles que $Y \sim \sum\limits_{i=1}^{k} X_i$. Comme $\mathbb{P}(Y \in [0; 1]) = 1$, comme en **c.**, on montre que $\mathbb{P}\Big(X_1 \in \Big[0; \dfrac{1}{k}\Big]\Big) = 1$. Par conséquent, $A = \Big(\sum\limits_{i=1}^{k} X_i = 1, X_1 \in \Big[0; \dfrac{1}{k}\Big], \cdots, X_k \in \Big[0; \dfrac{1}{k}\Big]\Big)$ est presque sûr et on a vu en cours que $\mathbb{P}\Big(\sum\limits_{i=1}^{k} X_i = 1, A\Big) = \mathbb{P}\Big(\sum\limits_{i=1}^{k} X_i = 1\Big)$. Or $\Big(\sum\limits_{i=1}^{k} X_i = 1, A\Big) = \Big(X_1 = \cdots = X_k = \dfrac{1}{k}\Big)$ donc on obtient, par indépendance de $X_1, \cdots, X_k$, la relation $\mathbb{P}\Big(X_1 = \dfrac{1}{k}\Big)^k = p$. De même, $\mathbb{P}(X_1 = 0)^k = 1 - p$. Mais alors $\Big(X_1 = \dfrac{1}{k}, X_2 = \cdots = X_k = 0\Big) \subset \Big(\sum\limits_{i=1}^{k} X_i = \dfrac{1}{k}\Big)$ donc, toujours par indépendance de $X_1, \cdots, X_k$, on a la contradiction $\mathbb{P}\Big(Y = \dfrac{1}{k}\Big) \geqslant p^{\frac{1}{k}}(1-p)^{\frac{k-1}{k}} > 0$. Ainsi, Y n'est pas k-divisible si $k \geqslant 2$.

g.

105 **a.** L'énoncé identifie sans vergogne $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car b défini dans l'énoncé est un vecteur colonne.

Méthode 1 : soit λ une valeur propre de M telle que $\dim(E_\lambda(M)) \geqslant 2$, il existe donc deux vecteurs propres $a = (a_1, \cdots, a_{n+1})$ et $b = (b_1, \cdots, b_{n+1})$ de M associés à λ tels que (a, b) est libre. Traitons deux cas :

- Si $a_{n+1} = 0$, le vecteur $v = a$ répond à la question.
- Si $a_{n+1} \neq 0$, le vecteur $v = b_{n+1}a - a_{n+1}b$ est encore dans $E_\lambda(M)$ car $E_\lambda(M)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{n+1}$, il est non nul car (a, b) est libre et que $(a_{n+1}, b_{n+1}) \neq (0, 0)$ et sa $(n+1)$-ième coordonnée dans la base canonique est nulle par construction donc v convient.

Méthode 2 : soit l'hyperplan $H = \{v = (v_1, \cdots, v_n, 0) \mid (v_1, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n\} = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ et λ une valeur propre de M telle que $\dim(E_\lambda(M)) \geqslant 2$. On a donc $\dim(H) = n + 1 - 1 = n$. Grâce à la formule de Grassmann, $\dim(H \cap E_\lambda(M)) = \dim(E_\lambda(M)) + \dim(H) - \dim(H + E_\lambda(M)) \geqslant 2 + n - (n+1) = 1$ car $H + E_\lambda(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ donc il existe un vecteur non nul $v \in H \cap E_\lambda(M)$, c'est-à-dire un vecteur propre $v = (v_1, \cdots, v_n, v_{n+1})$ de M tel que $v_{n+1} = 0$.

Avec un tel vecteur propre v qu'on écrit par blocs $v = \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $w \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ " = " $\mathbb{R}^n$, l'équation $Mv = \lambda v$ se traduit par $b^T w = 0$ et $Aw = \lambda w$. Ainsi, comme $w \neq 0$ car $v \neq 0$ et que $Aw = \lambda w$, w est un vecteur propre de A associé à la même valeur propre λ.

b. L'équation $b^T w = 0$ se traduit aussi $(b|w) = 0$ avec le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ donc il existe bien un vecteur propre de A orthogonal à b si M n'est pas simple, par exemple le vecteur w.

c. Notons $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & X_5 \\ 0 & X_5 & -1 \end{pmatrix}$, comme $N = \begin{pmatrix} A & b^T \\ b & c \end{pmatrix}$ est symétrique avec $b = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ et $c = X_4$, si on note C l'évènement $C =$ "il existe un vecteur propre de A orthogonal b", on a $\overline{B} \subset C$ donc $P(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}(B) \leqslant \mathbb{P}(C)$ ce qui montre que $\mathbb{P}(B) \geqslant 1 - \mathbb{P}(C)$. Comme $X_5(\omega) = \{0, 1\}$, par la formule des probabilités totales, on a $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(X_5 = 0)\,\mathbb{P}(C|X_5 = 0) + \mathbb{P}(X_5 = 1)\,\mathbb{P}(C|X_5 = 1)$.

<u>Si $X_5 = 0$</u>, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonale donc $\mathrm{Sp}(A) = \{2, 1, -1\}$, $E_2(A) = \mathrm{Vect}(e_1)$, $E_1(A) = \mathrm{Vect}(e_2)$ et $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}(e_3)$ donc C est réalisé si et seulement si $(e_1 \perp b)$ ou $(e_2 \perp b)$ ou $(e_3 \perp b)$. Avec la formule du crible, il vient $\mathbb{P}(C|X_5 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_2 = 0) + \mathbb{P}(X_3 = 0) - \mathbb{P}(X_1 = X_2 = 0) - \mathbb{P}(X_1 = X_3 = 0) - \mathbb{P}(X_2 = X_3 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = X_2 = X_3 = 0)$ donc $\mathbb{P}(C|X_5 = 0) = 3(1-p) - 3(1-p)^2 + (1-p)^3$ par indépendance de X_1, X_2, X_3.

<u>Si $X_5 = 1$</u>, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et on a facilement $\chi_A = (X-2)(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$. Il est clair que $E_2(A) = \mathrm{Vect}(e_1)$ et, comme $A - \sqrt{2}\,I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, on a $E_{\sqrt{2}}(A) = \mathrm{Vect}((1+\sqrt{2})e_2 + e_3)$ et, de même, on a $E_{-\sqrt{2}}(A) = \mathrm{Vect}((1-\sqrt{2})e_2 + e_3)$. Ainsi, comme $e_1 \perp b \iff X_1 = 0$, $(1+\sqrt{2})e_2 + e_3 \perp b \iff (1+\sqrt{2})X_2 + X_3 = 0 \iff X_2 = X_3 = 0$ car $\sqrt{2}$ est irrationnel et $(1-\sqrt{2})e_2 + e_3 \perp b \iff (1-\sqrt{2})X_2 + X_3 = 0 \iff X_2 = X_3 = 0$ pour la même raison, C est réalisé si et seulement si $(X_1 = 0)$ ou $(X_2 = X_3 = 0)$ donc, toujours par indépendance de X_1, X_2, X_3, $\mathbb{P}(C|X_5 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_2 = X_3 = 0) - \mathbb{P}(X_1 = X_2 = X_3 = 0) = (1-p) + (1-p)^2 - (1-p)^3$.

Avec tout ceci, on conclut que $\mathbb{P}(C) = (1-p)\big[3(1-p) - 3(1-p)^2 + (1-p)^3\big] + p\big[(1-p) + (1-p)^2 - (1-p)^3\big]$ qui se simplifie bien en $\mathbb{P}(C) = 1 - 3p^3 + 2p^4$. Au final, $\mathbb{P}(B) \geqslant 3p^3 - 2p^4$.

106 **a.** Pour $t \in [-1;1]$, comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\mathbb{P}(X = n)t^n| \leqslant \mathbb{P}(X = n)$ et que $\sum\limits_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(X = n)$ converge, par comparaison, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(X = n)t^n$ converge aussi donc la domaine de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(X = n)t^n$ contient $[-1;1]$ et le rayon de convergence R de cette série vérifie bien $R \geqslant 1$. En posant $u_n : t \mapsto \mathbb{P}(X = n)t^n$, on a $||u_n||_{\infty,[-1;1]} = \mathbb{P}(X = n)$ donc la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ converge normalement sur $[-1;1]$ donc, comme toutes les fonctions u_n sont continues sur $[-1;1]$, la fonction G_X est continue sur $[-1;1]$.

b. Soit $g : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = G_X(t) - t$ qui existe et est continue sur $[0;1]$ d'après **a.**. Une fonction somme d'une série entière est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence donc, d'après **a.**, G_X est au moins dérivable sur $[0;1[$ donc g est dérivable sur $[0;1[$ et $\forall t \in [0;1[$, $g'(t) = -1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(X = n)t^{n-1}$ donc

$g'(t) \leqslant -1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(X=n) = -1 + \mathbb{E}(X) < 0$ car $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ t^{n-1} \leqslant 1$. Ainsi, g est strictement décroissante et continue sur $[0;1[$ donc, comme $g(0) = \mathbb{P}(X=0) \geqslant 0$ et $\lim\limits_{t \to 1^-} g(t) = g(1) = G_X(1) - 1 = 0$, l'application g réalise une bijection de $[0;1[$ dans $]0;\mathbb{P}(X=0)] \subset \mathbb{R}^*$ donc g ne s'annule pas sur $[0;1[$: l'équation $G_X(x) = x$ n'admet pas de solution sur $[0;1[$.

c. On pose à nouveau $g : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = G_X(t) - t$ qui est continue sur $[0;1]$ et de classe C^2 sur $[0;1[$ car $R \geqslant 1$. De plus, $\forall t \in [0;1[,\ g''(t) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\,\mathbb{P}(X=n)t^{n-2} \geqslant 0$ car $\forall n \geqslant 2,\ t^{n-2} \geqslant 0$. Mieux, si on avait $\forall n \geqslant 2,\ \mathbb{P}(X=n) = 0$, on aurait $\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(X=1) \leqslant 1$, ce qui est contraire à l'énoncé, ainsi, $\forall t \in]0;1[,\ g''(t) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\,\mathbb{P}(X=n)t^{n-2} > 0$ car $\forall n \geqslant 2,\ t^{n-2} > 0$. Ainsi, g est strictement convexe sur $[0;1]$ et g' strictement croissante sur $[0;1[$. Comme $g'(0) = \mathbb{P}(X=1) - 1 \leqslant 0$ et $g'(1) = G'_X(1) = \mathbb{E}(X) - 1 > 0$, que $g(0) \geqslant 0$ et $g(1) = 0$, on a forcément $g'(0) < 0$ sinon g' serait positive donc g croissante donc nulle sur $[0;1]$ ce qui est absurde car $g'(1) > 0$. Ainsi, g' réalise une bijection strictement croissante de $]0;1[$ dans $]g'(0), g'(1)[$ donc il existe un unique $\alpha \in]0;1[$ tel que $g'(\alpha) = 0$. La fonction g est donc strictement décroissante de $[0;\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha;1]$. Comme $g(1) = 0$, on a forcément $g(\alpha) < 0$, et puisque $g(0) \geqslant 0$ et $g(\alpha) < 0$, il existe un unique $x \in [0;\alpha[\subset [0;1[$ et $g(x) = 0$ et l'équation $g(x) = x$ n'a pas de solution dans $[\alpha;1[$. Au final, l'équation $G_X(x) = x$ admet une unique solution sur $[0;1[$.

d. Pour $n \geqslant 2$, puisque $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p_n, on sait d'après le cours que $\forall t \in \mathbb{R},\ G_{Y_n}(t) = \prod\limits_{k=1}^{n} G_{X_k}(t) = \prod\limits_{k=1}^{n} (1 - p_n + tp_n) = (1 + p_n(t-1))^n$. Ainsi, $G_{Y_n}(t) = \left(1 + \dfrac{\lambda}{n}(t-1)\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \dfrac{\lambda}{n}(t-1)\right)\right)$. Comme $\ln\left(1 + \dfrac{\lambda}{n}(t-1)\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n}(t-1)$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln\left(1 + \dfrac{\lambda}{n}(t-1)\right) = \lambda(t-1)$ donc, par continuité de $\exp$, $\lim\limits_{n \to +\infty} G_{Y_n}(t) = e^{\lambda(t-1)}$. On sait que $t \mapsto e^{\lambda(t-1)}$ est la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. On a montré dans le cours que la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergeait en loi vers une variable aléatoire X suivant la loi de Poisson de paramètre λ. En effet, soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant k$, comme Y_n suit d'après le cours la loi binomiale de paramètre n et p, $\mathbb{P}(Y_n = k) = \dbinom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \dfrac{\lambda^k}{k!} \times (1-p_n)^{-k} \times \dfrac{n.(n-1).\cdots.(n-k+1)}{n.n.\cdots.n} \times (1-_p)^n$. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (1-p_n)^n = e^{-\lambda}$ comme avant, $\lim\limits_{n \to +\infty} (1-p_n)^{-k} = 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n.(n-1).\cdots.(n-k+1)}{n.n.\cdots.n} = 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Y_n = k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ comme attendu.

e. Pour $t \in [0;1]$ par exemple (plus généralement pour t tel que la série converge absolument), par définition, $G_Z(t) = \mathbb{E}(t^Z) = \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} t^k\,\mathbb{P}(Z=k)$. Pour $k \in \mathbb{N}$, $(Z = k) = \bigsqcup\limits_{n=k}^{+\infty} (Z = k, Y = n)$ donc, par σ-additivité, on a la relation $\mathbb{P}(Z=k) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(Z=k, Y=n)$ donc $G_Z(t) = \sum\limits_{\substack{(k,n) \in \mathbb{N}^2 \\ n \geqslant k}} t^k\,\mathbb{P}(Z=k, Y=n)$ qui s'écrit aussi $G_Z(t) = \sum\limits_{\substack{(k,n) \in \mathbb{N}^2 \\ n \geqslant k}} t^k\,\mathbb{P}(Y=n, X_1 + \cdots + X_n = k)$. Puis, par indépendance de Y et des X_i, on arrive à $G_Z(t) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(Y=n) \sum\limits_{k=0}^{n} t^k\,\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n = k) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(Y=n) G_{X_1 + \cdots + X_n}(t)$ ce qui donne, par indépendance des variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$, la relation $G_Z(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(Y = n) G_{X_1}(t)^n = G_Y(G_{X_1}(t))$.

f. On suppose implicitement dans cette question que les variables aléatoires Y et X_1 admettent des espérances finies, donc qu'elles sont dérivables en 1 d'après le cours, ce qui montre par composition que G_Z est elle-même dérivable en 1 et, d'après le cours, que la variable aléatoire Z est d'espérance finie.

On sait aussi que $\mathbb{E}(Z) = G_Z'(1) = G_{X_1}'(1) G_Y'(G_{X_1}(1)) = \mathbb{E}(X_1)\,\mathbb{E}(Y)$: c'est la formule de WALD.

g. En notant Y le nombres d'œufs pondus, on a $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$, et si on note $X_i = 1$ si l'œuf numéro i éclôt et $X_i = 0$ sinon, on a $X_i \sim \mathcal{B}(\alpha)$. On peut supposer les œufs indépendants entre eux et indépendants de Y donc, en notant Z le nombres d'œufs éclos, on a $Z = \sum_{i=1}^{Y} X_i$ donc $\forall t \in \mathbb{R},\ G_Z(t) = G_Y(G_{X_1}(t))$ d'après **e.** donc $G_Z(t) = e^{\lambda((1-p+pt)-1)} = e^{\lambda p(t-1)}$ donc, comme la fonction génératrice donne la loi, Z suit la loi de POISSON de paramètre $\alpha\lambda > 0$.

107 **a.** Il faut faire une liste (par exemple NRRNNNRN...) de $a + b$ boules en choisissant les numéros des a boules noires, les autres seront forcément rouges, ainsi le nombre de combinaisons possibles est $\binom{a+b}{a}$.

b. L'évènement $(X = 0)$ contient les tirages lors desquels on ne tire jamais deux boules rouges simultanément, or ceci est impossible si $n > N$ car il y a alors dans l'urne strictement plus de boules rouges que de boules noires. Ainsi, $(X = 0) = \emptyset$ donc $\mathbb{P}(X = 0) = 0$ et, comme $(X = 0) \sqcup (X \geqslant 1) = \Omega$, $\mathbb{P}(X \geqslant 1) = 1$.

c. Comme il y a au moins deux boules noires, qu'on peut prendre ensemble, il y aura au moins un tirage lors duquel on ne prendra pas deux boules rouges, donc $X \leqslant N - 1$. Mieux que ça, comme il y a n boules rouges, donc au maximum $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ paires de boules rouges, on a $X \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leqslant N - 1$ car $n \leqslant 2N - 2$.

d. $A = \bigcap_{i=1}^{n/2} Y_i$ si Y_i c'est tirer deux boules rouges au tirage i donc par la formule des probabilités composées, on a $\mathbb{P}(A) = \frac{n}{2N} \times \frac{n-2}{2(N-1)} \times \cdots \times$ et idem pour B et on trouve $\mathbb{P}(B) = 4\,\mathbb{P}(A)$.

e. On modélise les tirages par des listes $(NN)(NR)(RR)(NN)$..... Soit $k \in [\![0; N-1]\!]$. Traitons deux cas :

Si $k > \frac{n}{2}$, on a $(X = k) = \emptyset$ d'après **c.** donc $\mathbb{P}(X = k) = 0$.

Si $k \leqslant \frac{n}{2}$, on dénombre les tirages pour lesquels $X = k$ de la manière suivante :

- on fixe les $\binom{N}{k}$ tirages lors desquels on tire les deux boules rouges.
- on fixe les $\binom{N-k}{n-2k}$ autres tirages lors desquels on tire une boule de chaque couleur.
- pour chacun de ces $n - 2k$ tirages, on choisit si c'est rouge-noir ou noir-rouge : 2^{n-2k} choix.

Ainsi, d'après **a.**, $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\binom{N}{k}\binom{N-k}{n-2k} 2^{n-2k}}{\binom{2N}{n}}$.

f. Il fallait sentir les choses en voyant l'espérance comme une moyenne, pas de calcul ????? (Maël).

g. En posant $n = 2m$, on a $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}(X = k) =$. Très calculatoire mais l'expression finale est relativement simple et permet de retrouver l'équivalent de la question précédente.

108

109 **a.** Soit une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements, les propriétés de continuité monotone sont :

- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion, alors $\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, alors $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

b. Posons l'évènement $U_N = \bigcup_{n=0}^{N} A_n$ pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, alors $U_{N+1} = U_N \cup A_{N+1}$ donc $U_N \subset U_{N+1}$ et la suite $(U_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion. D'après le théorème de continuité croissante, on a donc $\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(U_N) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} U_N\Big)$. Montrons que $\bigcup_{N=0}^{+\infty} U_N = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.

($\subset$) Si $\omega \in \bigcup_{N=0}^{+\infty} U_N$, $\exists N \in \mathbb{N},\ \omega \in U_N = \bigcup_{n=0}^{N} A_n$ donc $\exists n \in [\![0;N]\!],\ \omega \in A_n$ et on a bien $\omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.

($\supset$) Si $\omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$, $\exists n \in \mathbb{N},\ \omega \in A_n \subset U_n$ donc $\omega \in U_n$ avec $N = n$ et on a bien $\omega \in \bigcup_{N=0}^{+\infty} U_N$.

Par double inclusion, on a établi que $\bigcup_{N=0}^{+\infty} U_N = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ donc, que $\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\Big)$.

Puisque $A_0, \cdots, A_N$ sont indépendantes, on sait d'après le cours que $\overline{A_0}, \cdots, \overline{A_N}$ le sont aussi.

c. Traitons deux cas :

- S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(A_{n_0}) = 1$, comme $A_{n_0} \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$, $\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = 1$ et $\ln(\mathbb{P}(\overline{A_{n_0}})) = -\infty$ donc $\sum_{n\geqslant 0} \ln(P(\overline{A_n}))$ diverge (en mode famille sommable). L'équivalence dans ce cas est bien vérifiée.
- Si $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(A_n) < 1$, $\ln(\mathbb{P}(\overline{A_n}))$ est un réel et, pour $N \in \mathbb{N}$, on a $\prod_{n=0}^{N} \mathbb{P}(\overline{A_n}) > 0$. Ainsi, $\ln\Big(\prod_{n=0}^{N} \mathbb{P}(\overline{A_n})\Big) = \sum_{n=0}^{N} \ln(\mathbb{P}(\overline{A_n}))$ est la somme partielle d'ordre N de la série $\sum_{N\geqslant 0} \ln(\mathbb{P}(\overline{A_N}))$ à termes négatifs. Traitons à nouveau deux cas :
  - Si la série numérique $\sum_{N\geqslant 0} \ln(\mathbb{P}(\overline{A_N}))$ diverge, ses sommes partielles tendent vers $-\infty$ donc $\prod_{n=0}^{N} \mathbb{P}(\overline{A_n}) = \exp\Big(\ln\Big(\prod_{n=0}^{N} \mathbb{P}(\overline{A_n})\Big)\Big)$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$ car $\lim_{t\to-\infty} e^t = 0$. D'après la question **b.**, on a donc $\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = 1 - 0 = 1$.
  - Si la série numérique $\sum_{N\geqslant 0} \ln(\mathbb{P}(\overline{A_N}))$ converge, ses sommes partielles tendent vers un réel négatif S donc $\prod_{n=0}^{N} \mathbb{P}(\overline{A_n}) = \exp\Big(\ln\Big(\prod_{n=0}^{N} \mathbb{P}(\overline{A_n})\Big)\Big)$ tend vers $e^S \in]0;1]$ quand N tend vers $+\infty$ par continuité de $\exp$. D'après la question **b.**, on a donc $\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = 1 - e^S < 1$.

  L'équivalence est aussi respectée dans ce cas.

Les deux cas étant les seuls possibles, on a l'équivalence $\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = 1 \Longleftrightarrow \sum_{n\geqslant 0} \ln(\mathbb{P}(\overline{A_n}))$ diverge.

d. Traitons trois cas :

• S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(A_{n_0}) = 1$, on a comme avant $\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = 1$ mais il est très possible que la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge, par exemple en prenant $A_0 = \Omega$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_n = \emptyset$. L'énoncé n'est donc pas vrai dans tous les cas.

• Si $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend vers 0, alors $(\mathbb{P}(\overline{A_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 1 donc $(\ln(\mathbb{P}(\overline{A_n})))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 (par continuité de $\ln$ et $\exp$) donc la série $\sum_{n\geqslant 0} \ln(\mathbb{P}(\overline{A_n}))$ diverge grossièrement et, d'après la question **c.**, $\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = 1$.

• Si $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, comme $\ln(\mathbb{P}(\overline{A_n})) = \ln(1-\mathbb{P}(A_n))$, on a $\ln(\mathbb{P}(\overline{A_n})) \underset{+\infty}{\sim} -\mathbb{P}(A_n) \leqslant 0$ donc, par comparaison de séries à termes négatifs, $\sum_{n\geqslant 0} \ln(\mathbb{P}(\overline{A_n}))$ diverge $\Longleftrightarrow \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ diverge.

D'après la question **c.**, on a donc, dans ce cas, $\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = 1 \Longleftrightarrow \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ diverge.

On peut donc conclure, par exemple, que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'évènements mutuellement indépendants non presque sûrs, alors $\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = 1 \Longleftrightarrow \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ diverge.

110 **a.** On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive si $M^T = M$ et si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^TMX \geqslant 0$ (matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ identifiée à un réel). On a vu dans le cours que pour une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a M positive si et seulement si son spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+$. En effet :

($\Longrightarrow$) D'après le théorème spectral, χ_M n'a que des racines réelles. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $MX = \lambda X$. Alors $X^TMX = \lambda X^TX = \lambda||X||^2 \geqslant 0$ donc, comme $||X|| > 0$, on a $\lambda \geqslant 0$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+$.

($\Longleftarrow$) Si $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+$, soit une base orthonormale $\mathcal{B} = (V_1, \cdots, V_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M. Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres positives associées respectivement aux vecteurs $V_1, \cdots, V_n$. Pour $X = \sum_{k=1}^{n} x_kV_k \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ décomposé dans la base $\mathcal{B}$, on a $MX = \sum_{k=1}^{n} \lambda_kx_kV_k$ donc $X^TMX = \sum_{k=1}^{n} \lambda_kx_k^2 \geqslant 0$.

b. Comme les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ admettent des moments d'ordre 2 par hypothèse, on a vu dans le cours que $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}((X_i - \mathbb{E}(X_i)(X_j - \mathbb{E}(X_j))$ était bien défini pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ et vérifiait $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_iX_j) - \mathbb{E}(X_i)\,\mathbb{E}(X_j)$. Ceci assure l'existence de la matrice R_X.

Par symétrie de la covariance, la matrice R_X est symétrique et, pour $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, si $Y^T = (y_1 \ \cdots \ y_n)$, on a $Y^TR_XY = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} y_iy_j\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{V}\Big(\sum_{k=1}^{n} y_kX_k\Big)$ par bilinéarité de la covariance et avec une formule du cours. Comme une variance est toujours positive car $\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}((Z - \mathbb{E}(Z))^2)$ par définition si Z admet un moment d'ordre 2, d'après **a.**, on put conclure que $R_X \in S_n^+(\mathbb{R})$.

c. Pour $n = 2$, la matrice $R_X = \begin{pmatrix} \mathbb{V}(X_i) & \mathrm{Cov}(X_1, X_2) \\ \mathrm{Cov}(X_2, X_1) & \mathbb{V}(X_2) \end{pmatrix}$ étant symétrique positive d'après **b.**, ses deux valeurs propres λ_1, λ_2 sont positives d'après **a.** donc, puisque χ_{R_X} est scindé sur $\mathbb{R}$ par le théorème spectral, $\det(R_X) = \lambda_1\lambda_2 \geqslant 0$ ce qui équivaut à $\mathbb{V}(X_1)\,\mathbb{V}(X_2) - \mathrm{Cov}(X_1, X_2)^2 \geqslant 0$, ou encore, comme $\mathbb{V}(X_1) \geqslant 0$ et $\mathbb{V}(X_2) \geqslant 0$, à la majoration $|\mathrm{Cov}(X_1, X_2)| \leqslant \sqrt{\mathbb{V}(X_1)}\sqrt{\mathbb{V}(X_2)}$.

111 Bien sûr, on suppose les tirages indépendants entre eux et le tirage d'une boule dans une urne à chaque

étape uniforme. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose l'évènement $R_n =$ "on tire une boule rouge au tirage n".
a. Soit $n \geqslant 0$ et $k \in [\![0; N-1]\!]$, on a deux possibilités pour avoir k boules rouges au bout de $n+1$ tirages :

- soit on a $k+1$ boules rouges au bout de n tirages et on a tiré une boule rouge au tirage $n+1$ qui a été remplacée par une boule verte.
- soit on a déjà k boules rouges au bout de p tirages et on a tiré une boule verte au tirage $p+1$.

Ceci se traduit par $(X_{n+1} = k) = \big((X_n = k) \cap \overline{R_{n+1}}\big) \sqcup \big((X_n = k+1) \cap R_{n+1}\big)$. Par incompatibilité de ces deux évènements, $\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \mathbb{P}_{(X_n=k)}(\overline{R_{n+1}})\,\mathbb{P}(X_n = k) + \mathbb{P}_{(X_n=k+1)}(R_{n+1})\,\mathbb{P}(X_n = k+1)$ (1).
Ou alors, comme $X_n(\Omega) \subset [\![N-n; N]\!]$, avec le système complet d'évènements $\big((X_n = i)\big)_{N-n\leqslant i\leqslant N}$ et la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(X_n + 1 = k) = \sum\limits_{i=N-n}^{N} \mathbb{P}(X_n = i)\,\mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = k)$ sachant que $i \neq k$ et $i \neq k+1$, $\mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = k) = 0$, ce qui donne à nouveau la formule (1).
Or, si $X_n = k$, il y a dans l'urne k boules rouges et $N-k$ boules vertes donc $\mathbb{P}_{(X_n=k)}(\overline{R_{n+1}}) = \dfrac{N-k}{N}$. Et si $X_n = k+1$, il y a dans l'urne $k+1$ boules rouges et $N-k-1$ boules vertes donc $\mathbb{P}_{(X_n=k)}(R_{n+1}) = \dfrac{k+1}{N}$.
Ainsi, avec la relation (1), on a $\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \dfrac{N-k}{N}\,\mathbb{P}(X_n = k) + \dfrac{k+1}{N}\,\mathbb{P}(X_n = k+1)$.
Il reste à parler des cas particuliers :

- si $n = 0$ et $k = N$, on a $(X_1 = N) = (X_0 = N+1) = \emptyset$ et $(X_0 = N) = \Omega$ donc, comme $\dfrac{N-N}{N} = 0$, on a encore la relation $\mathbb{P}(X_{0+1} = N) = \dfrac{N-N}{N}\,\mathbb{P}(X_0 = N) + \dfrac{N+1}{N}\,\mathbb{P}(X_0 = N+1) = 0$.
- si $n = 0$ et $k > N$, on a $(X_1 = N) = (X_0 = k+1) = (X_0 = k) = \emptyset$ donc on a encore la relation $\mathbb{P}(X_{0+1} = k) = \dfrac{N-k}{N}\,\mathbb{P}(X_0 = k) + \dfrac{k+1}{N}\,\mathbb{P}(X_0 = k+1) = 0$.
- si ($n \geqslant 1$ et $k \geqslant N$) ou ($n = 0$ et $k > N$), on a $(X_{n+1} = N) = \emptyset = (X_n = N) = (X_n = N+1)$ donc on a toujours la relation $\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \dfrac{N-k}{N}\,\mathbb{P}(X_n = k) + \dfrac{k+1}{N}\,\mathbb{P}(X_n = k+1) = 0$.

Ainsi, dans tous les cas, $\forall n \geqslant 0$, $\forall k \geqslant 0$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \dfrac{N-k}{N}\,\mathbb{P}(X_n = k) + \dfrac{k+1}{N}\,\mathbb{P}(X_n = k+1)$.

b. Pour $n \geqslant 0$, on a $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \sum\limits_{k=0}^{N} k\,\mathbb{P}(X_{n+1} = k)$ car $X_n(\Omega) \subset [\![0; N]\!]$ donc, avec la question précédente, il vient $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \sum\limits_{k=0}^{N} k\Big(\dfrac{N-k}{N}\,\mathbb{P}(X_n = k) + \dfrac{k+1}{N}\,\mathbb{P}(X_n = k+1)\Big)$ qu'on décompose, puisque $k = (k+1)-1$, en $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \sum\limits_{k=0}^{N} k\,\mathbb{P}(X_n = k) - \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N} k^2\,\mathbb{P}(X_n = k) + \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N} (k+1)^2\,\mathbb{P}(X_n = k+1) - \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N} (k+1)\,\mathbb{P}(X_n = k+1)$.
Après simplification et changement d'indice, comme $\mathbb{P}(X_n = N+1) = 0$, il ne reste dans cette formule que $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \sum\limits_{k=0}^{N} k\,\mathbb{P}(X_n = k) - \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1} (k+1)\,\mathbb{P}(X_n = k+1) = \Big(1 - \dfrac{1}{N}\Big)\,\mathbb{E}(X_n)$.
c. $\big(\mathbb{E}(X_n)\big)_{n\geqslant 0}$ est géométrique et, comme $\mathbb{E}(X_0) = N$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_n) = N\Big(1 - \dfrac{1}{N}\Big)^n$ avec $1 - \dfrac{1}{N} \in]-1; 1[$. Or $\mathbb{E}(X_n) = \sum\limits_{k=0}^{N} k\,\mathbb{P}(X_n = k) = \sum\limits_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}(X_n = k) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{N} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X_n \geqslant 1)$ donc $0 \leqslant \mathbb{P}(X_n \geqslant 1) \leqslant \mathbb{E}(X_n)$.
Comme X_n est à valeurs positives, on a aussi directement $\mathbb{P}(X_n \geqslant 1) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(X_n)}{1} = \mathbb{E}(X_n)$ par inégalité de Markov. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = 0$, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n \geqslant 1) = 0$.
Comme $\dfrac{\mathbb{E}(X_N)}{N} = \Big(1 - \dfrac{1}{N}\Big)^N = \exp\Big(N\ln\Big(1 - \dfrac{1}{N}\Big)\Big)$ et $\ln\Big(1 - \dfrac{1}{N}\Big) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{N}$ donc $\lim\limits_{N\to+\infty} N\ln\Big(1 - \dfrac{1}{N}\Big) = -1$,

par continuité de $\exp$, on a $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{\mathbb{E}(X_N)}{N} = \dfrac{1}{e} \sim 0,37$.

d. On a $Y = 0$ si et seulement s'il reste des boules rouges (il y en a au moins une dans l'urne) à toutes les étapes. Ainsi, $(Y = 0) = \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} (X_n \geqslant 1)$ donc on a bien $(Y = 0) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} (X_k \geqslant 1)$ pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Comme la suite d'évènements $\big((X_k \geqslant 1)\big)_{k\geqslant 1}$ est décroissante car si $X_{k+1} \geqslant 1$, a fortiori, on a $X_k \geqslant 1$, on a $(Y = 0) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} (X_k \geqslant 1) = (X_n \geqslant 1)$. Par croissance de $\mathbb{P}$, il vient $0 \leqslant \mathbb{P}(Y = 0) \leqslant \mathbb{P}(X_n \geqslant 1)$ donc, par encadrement, $\mathbb{P}(Y = 0) = 0$ en passant à la limite dans cette double inégalité d'après **c.**.

112

113 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(Y = n + 2) = (C_n, X_{n+1} = 0, X_{n+2} = 1, X_{n+3} = 1)$ avec les conditions de l'expérience. Or C_n ne concerne que les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ donc, par le lemme des coalitions, $C_n, X_{n+1}, X_{n+2}, X_{n+3}$ sont indépendantes donc $\mathbb{P}(Y = n+2) = \mathbb{P}(C_n)\,\mathbb{P}(X_{n+1} = 0)\,\mathbb{P}(X_{n+2} = 1)\,\mathbb{P}(X_{n+3} = 1)$ et on a bien $\mathbb{P}(Y = n + 2) = \dfrac{\mathbb{P}(C_n)}{8}$ car X_n, X_{n+1}, X_{n+2} suivent la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

b. Pour $n \geqslant 4$, si l'évènement C_n est réalisé, on ne peut pas commencer par $X_1 = X_2 = 1$. Ainsi, on peut écrire $C_n = (C_n, X_1 = 0) \sqcup (C_n, X_1 = 1, X_2 = 0)$ (réunion de deux évènements incompatibles) donc $\mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}(C_n, X_1 = 0) + \mathbb{P}(C_n, X_1 = 1, X_2 = 0)$. Par les probabilités conditionnelles, on obtient $\mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}(X_1 = 0) \times \mathbb{P}_{(X_1=0)}(C_n) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) \times \mathbb{P}_{(X_1=1,X_2=0)}(C_n)$. Si $X_1 = 0$, c'est comme si on repartait au point de départ après un tirage donc $\mathbb{P}_{(X_1=0)}(C_n) = \mathbb{P}(C_{n-1})$. De même, si $X_1 = 1$ et $X_2 = 0$, on repart au point de départ après deux étapes donc $\mathbb{P}_{(X_1=1,X_2=0)}(C_n) = \mathbb{P}(C_{n-2})$. On a donc bien la relation $\mathbb{P}(C_n) = \dfrac{\mathbb{P}(C_{n-1})}{2} + \dfrac{\mathbb{P}(C_{n-2})}{4}$.

Pour être totalement "rigoureux", mais la méthode précédente suffit largement à l'oral, on peut écrire l'égalité $(C_n, X_1 = 0) = (X_1 = 0) \cap \Big(\bigcap\limits_{k=2}^{n-1} \overline{(X_k = X_{k+1} = 1)}\Big)$ donc, par le lemme des coalitions, comme ci-dessus, $\mathbb{P}(C_n, X_1 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0) \times \mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{k=2}^{n-1} \overline{(X_k = X_{k+1} = 1)}\Big)$. Mais la famille de variables aléatoires $(X_2, \cdots, X_n)$ suit la même loi que $(X_1, \cdots, X_{n-1})$ d'où $\mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{k=2}^{n-1} \overline{(X_k = X_{k+1} = 1)}\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{n-2} \overline{(X_k = X_{k+1} = 1)}\Big)$. Et comme on a $(C_{n-1}) = \bigcap\limits_{k=1}^{n-2} \overline{(X_k = X_{k+1} = 1)}$ par définition, $\mathbb{P}(C_n, X_1 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0)\,\mathbb{P}(C_{n-1}) = \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(C_{n-1})$. De la même manière, on montre que $\mathbb{P}(C_n, X_1 = 1, X_2 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_2 = 0)\,\mathbb{P}(C_{n-2})$.
De nouveau, on retrouve la relation $\mathbb{P}(C_n) = \dfrac{\mathbb{P}(C_{n-1})}{2} + \dfrac{\mathbb{P}(C_{n-2})}{4}$.

On vérifie que cette relation est encore vraie si $n = 3$, en effet $C_1 = \Omega$ donc $\mathbb{P}(C_1) = 1$. On aussi $\mathbb{P}(C_2) = \frac{3}{4}$ car $C_2 = (X_1 = 1, X_2 = 0) \sqcup (X_1 = 0, X_2 = 0) \sqcup (X_1 = 0, X_2 = 1)$ et on a $\mathbb{P}(C_3) = \frac{5}{8}$ car $C_3 = (X_1 = 1, X_2 = 0) \sqcup (X_1 = 0, X_2 = 0) \sqcup (X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0)$ et $\frac{5}{8} = \mathbb{P}(C_3) = \dfrac{\mathbb{P}(C_2)}{2} + \dfrac{\mathbb{P}(C_1)}{4} = \frac{3}{8} + \frac{1}{4}$.

c. Soit l'équation caractéristique $(E_c)\ :\ z^2 = \frac{z}{2} + \frac{1}{4}$ associée à la récurrence linéaire de question précédente.

Les solutions de (E_c) sont $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} \sim 0,81$ et $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4} \sim -0,31$. Il existe donc deux réels a et b tels que l'on ait $\forall n \geqslant 1,\ \mathbb{P}(C_n) = ar_1^n + br_2^n$. Comme $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C_n) = 0$. Plus précisément, comme $\mathbb{P}(C_1) = 1$ et $\mathbb{P}(C_2) = \dfrac{3}{4}$, après calculs, pour tout $n \geqslant 1$, on obtient la relation $\mathbb{P}(C_n) = \dfrac{2(5+2\sqrt{5})r_1^n - \sqrt{5}(\sqrt{5}-1)r_2^n}{5(1+\sqrt{5})}$. Ainsi, d'après la question **a.**, pour tout entier $n \geqslant 3$, on arrive à $\mathbb{P}(Y_n) = \dfrac{\mathbb{P}(C_{n-2})}{8} = \dfrac{2(5+2\sqrt{5})r_1^{n-2} - \sqrt{5}(\sqrt{5}-1)r_2^{n-2}}{40(1+\sqrt{5})}$. Or $Y_1 = (X_1 = X_2 = 1)$ donc $\mathbb{P}(Y = 1) = \dfrac{1}{4}$ et $(Y = 2) = (X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1)$ donc $\mathbb{P}(Y = 2) = \dfrac{1}{8}$. Comme $\overline{(Y = 0)} = \bigsqcup\limits_{n=1}^{+\infty}(Y = n)$, par σ-additivité, on a $1 - \mathbb{P}(Y = 0) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \sum\limits_{n=3}^{+\infty}\Big(\dfrac{2(5+2\sqrt{5})r_1^{n-2} - \sqrt{5}(\sqrt{5}-1)r_2^{n-2}}{40(1+\sqrt{5})}\Big)$. On trouve $\mathbb{P}(Y = 0) = 0$ après calculs.
Beaucoup plus simple, on pouvait constater que $(Y = 0) \subset C_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $0 \leqslant \mathbb{P}(Y = 0) \leqslant \mathbb{P}(C_n)$ et, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on arrive plus vite à $\mathbb{P}(Y = 0) = 0$ comme attendu.
d. D'après les questions **a.** et **b.**, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Y = n+2) = \dfrac{\mathbb{P}(Y = n+1)}{2} + \dfrac{\mathbb{P}(Y = n)}{4}$. On a même $\mathbb{P}(Y = 2) = \dfrac{\mathbb{P}(Y = 1)}{2} + \dfrac{\mathbb{P}(Y = 0)}{4}$ car $\mathbb{P}(Y = 2) = \dfrac{1}{8}$, $\mathbb{P}(Y = 1) = \dfrac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(Y = 0) = 0$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Y = n+2) = \dfrac{\mathbb{P}(Y = n+1)}{2} + \dfrac{\mathbb{P}(Y = n)}{4}$ (1). Il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(Y = n) \underset{+\infty}{\sim} kr_1^n$ ce qui assure l'existence de $\mathbb{E}(Y)$ et de la fonction génératrice G_Y de Y sur $\Big]-\dfrac{1}{r_1}; \dfrac{1}{r_1}\Big[$.
<u>Méthode 1</u> : d'après (1), on a $\mathbb{E}(Y) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(Y = 1) + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n\Big(\frac{1}{2}\,\mathbb{P}(Y = n-1) + \frac{1}{4}\,\mathbb{P}(Y = n-2)\Big)$.
On a aussi $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{P}(Y = 1) + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(n-1+1)\,\mathbb{P}(Y = n-1) + \dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(n-2+2)\,\mathbb{P}(Y = n-2)\Big)$ car les deux séries convergent, ce qui devient, après séparation des séries convergentes et car $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(Y = n) = 1$ d'après la question **c.**, $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\,\mathbb{E}(Y) + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\,\mathbb{E}(Y) + \frac{1}{2}$.
On pouvait écrire $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{P}(Y = 1) + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n\Big(\frac{1}{2}\,\mathbb{P}(Y+1 = n) + \frac{1}{4}\,\mathbb{P}(Y+2 = n)\Big) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{\mathbb{E}(Y+1)}{2} + \dfrac{\mathbb{E}(Y+2)}{4}$ avec le même résultat. On trouve finalement la valeur $\mathbb{E}(Y) = 5$ (6 tirages).
<u>Méthode 2</u> : on multiplie l'équation (1) car t^{n+2} pour $t \in \Big]-\dfrac{1}{r_1}; \dfrac{1}{r_1}\Big[$ et on somme, ce qui donne la relation $G_Y(t) - \dfrac{t}{4} = \dfrac{tG_Y(t)}{2} + \dfrac{t^2G_Y(t)}{4}$ car $\mathbb{P}(Y = 0) = 0$ et $\mathbb{P}(Y = 1) = \dfrac{1}{4}$. Par conséquent, $G_Y(t) = \dfrac{t}{4 - 2t - t^2}$.
Comme G_Y est dérivable en 1 car $1 \in \Big]-\dfrac{1}{r_1}; \dfrac{1}{r_1}\Big[$, on a $\mathbb{E}(Y) = G'_Y(1) = 5$ car $G'_Y(t) = \dfrac{4+t^2}{(4-2t-t^2)^2}$.

114

115

116

117 On modélise avec $\Omega = S_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1; n]\!]$, on sait que $\text{card}\,(S_n) = n!$, et $X(\Omega) = [\![1; n]\!]$ et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ donc X est une variable aléatoire.
Il n'existe qu'une permutation où tous les termes sont croissant, il s'agit de l'identité, donc $\text{card}\,(X = n) = 1$.

Par contre, si $k \in [\![1;n-1]\!]$, voici le protocole de choix pour les permutations telles que $(X=k)$:

- on choisit les $k+1$ premières boules : $\binom{n}{k+1}$ choix.
- on choisit parmi ces $k+1$ boules celle qui va être tirée en position $k+1$: k choix car on ne peut pas prendre la plus grande.
- on impose, pour les k autres boules parmi ces $k+1$, de les prendre dans l'ordre croissant : 1 seul choix.
- on range dans un ordre quelconque les $n-(k+1)$ dernières boules : $(n-k-1)!$ choix.

$\text{card}\,(X=k) = k(n-k-1)!\binom{n}{k+1}$ donc $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{\text{card}\,(X=k)}{\text{card}\,(S_n)} = \dfrac{k(n-k-1)!n!}{n!(n-k-1)!(k+1)!} = \dfrac{k}{(k+1)!}$.

On a donc la loi de X, $\forall k \in [\![1;n-1]\!]$, $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{k}{(k+1)!} = \dfrac{1}{k!} - \dfrac{1}{(k+1)!}$ et $\mathbb{P}(X=n) = \dfrac{1}{n!}$. On vérifie la cohérence de ce résultat par télescopage, $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{1}{k!} - \dfrac{1}{(k+1)!}\right)\right) + \dfrac{1}{n!} = 1 - \dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{n!} = 1$.

b. Comme X est bornée, X admet une espérance finie et $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(X=k) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{k^2}{(k+1)!} + \dfrac{1}{(n-1)!}$ donc $\mathbb{E}(X) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{k(k+1)-(k+1)+1}{(k+1)!}\right) + \dfrac{1}{(n-1)!} = \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{1}{(k-1)!} - \dfrac{1}{k!} + \dfrac{1}{(k+1)!}\right)\right) + \dfrac{1}{(n-1)!}$ qui se simplifie par télescopage en $\mathbb{E}(X) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{(k+1)!} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X) = e - 1 \sim 1,72$.

118 **a.** On sait que $\forall x \in]-1;1[$, $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$. On peut dériver $p-1$ fois cette relation sur l'intervalle ouvert de convergence et $\forall x \in]-1;1[$, $f^{(p-1)}(x) = \dfrac{(p-1)!}{(1-x)^p} = \sum\limits_{n=p-1}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-p+2)x^{n-p+1}$ donc $f^{(p-1)}(x) = \sum\limits_{n=p-1}^{+\infty} \dfrac{n!}{(n-p+1)!}x^{n-p+1} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(k+p-1)!}{k!}x^k$.

On en déduit que $\forall x \in]-1;1[$, $\dfrac{1}{(1-x)^p} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(k+p-1)!}{k!(p-1)!}x^k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \binom{k+p-1}{p-1}x^k$.

b. $T_n(\Omega) \subset [\![n;+\infty]\!]$. Pour $i \geqslant n$, $(T_n = i) = (S_i = n) \cap (S_{i-1} = n-1) = (X_i = 1) \cap (S_{i-1} = n-1)$ donc, puisque X_i et S_{i-1} sont indépendants par le lemme des coalitions, $\mathbb{P}(T_n = i) = \dfrac{1}{2} \times \mathbb{P}(S_{i-1} = n-1)$. Mais S_{i-1} suit d'après le cours la loi binomiale de paramètres $i-1, \dfrac{1}{2}$ puisque S_{i-1} est la somme de $i-1$ variables aléatoires indépendantes de paramètre $\dfrac{1}{2}$. Ainsi, $\mathbb{P}(S_{i-1} = n-1) = \binom{i-1}{n-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{i-1-(n-1)}$ donc $\mathbb{P}(S_{i-1} = n-1) = \binom{i-1}{n-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{i-1}$. Par conséquent, $\mathbb{P}(T_n = i) = \binom{i-1}{n-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{i}$. On en déduit, puisque $\Omega = (T = +\infty) \sqcup \left(\bigsqcup\limits_{i=n}^{+\infty} (T_n = i)\right)$, que $\mathbb{P}(T = +\infty) = 1 - \sum\limits_{i=n}^{+\infty} \binom{i-1}{n-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{i}$. On trouve que $\mathbb{P}(T_n = +\infty) = 0$.

c. est-ce bien nécessaire ?

119 On peut prendre $\Omega = S_n$ et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(S_n)$ (la tribu pleine) pour modéliser ces expériences puisque S_n est un ensemble fini. On suppose qu'on a une loi uniforme sur toutes les permutations, ce qui se traduit par $\mathbb{P}(E) = \dfrac{\text{card}\,(E)}{\text{card}\,(S_n)}$ pour un évènement $E \subset S_n$.

a. Si $A \subset S_n$ vérifie $\text{card}\,(A) = k$, l'évènement $(\chi_A = 1) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma([\![1;k]\!]) = A\}$. En effet, comme σ est une permutation donc une bijection, la condition $\sigma([\![1;k]\!]) \subset A$ se traduit par $\sigma([\![1;k]\!]) = A$ par inclusion et égalité des cardinaux car σ conserve le cardinal. Pour dénombrer les permutations qui vérifient $\sigma([\![1;k]\!]) = A$, on adopte le protocole de choix suivant :

- on choisit comment envoyer les entiers $1, \cdots, k$ sur les éléments de A de manière bijective, il y a $k!$ choix.
- on choisit de quelle manière envoyer les entiers $k+1, \cdots, n$ sur les éléments de $[\![1;n]\!] \setminus A$ de manière bijective, il y a $(n-k)!$ choix.

Ainsi, $\text{card}\,(\chi_a = 1) = k!(n-k)!$, donc $\mathbb{P}(\chi_a = 1) = \dfrac{k!(n-k)!}{n!} = p_k$ donc χ_A suit la loi de Bernoulli de paramètre p_k où $k = \text{card}\,(A)$ et $\dfrac{1}{p_k} = \dbinom{n}{k}$.

b. Avec les conditions sur A et B de l'énoncé, si $k = \text{card}\,(A)$ et $\ell = \text{card}\,(B)$ et $i = \text{card}\,(A \cap B)$, on a $(\chi_A = 1, \chi_B = 1) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma([\![1;k]\!]) = A,\ \sigma([\![1;\ell]\!]) = B\}$. Si $\sigma \in (\chi_A = \chi_B = 1)$, pour $1 \leqslant j \leqslant \text{Min}(k, \ell)$, on a $\sigma(j) \in A$ car $j \leqslant k$ et $\sigma(j) \in B$ car $j \leqslant \ell$. Ainsi, $\sigma(j) \in A \cap B$ pour $j \in [\![1;i]\!]$, ce qui montre à nouveau que $\sigma([\![1;i]\!]) = A \cap B$ par inclusion et égalité des cardinaux, ceci étant même vrai ($\emptyset = \emptyset$) si $i = 0$. Comme $A \not\subset B$ et $B \not\subset A$, on a $i < k$ et $i < \ell$ donc $\sigma(i+1) \in A$ car $i+1 \leqslant k$ et $\sigma(i+1) \in B$ car $i+1 \leqslant \ell$. On a donc une contradiction puisque $\sigma([\![1;i]\!]) = A \cap B$. On en déduit que $(\chi_A = \chi_B = 1) = \emptyset$, donc que $\mathbb{P}(\chi_A = 1, \chi_B = 1) = 0 \neq \mathbb{P}(\chi_A = 1)\,\mathbb{P}(\chi_B = 1)$, ce qui montre que χ_A et χ_B ne sont pas indépendantes.

c. D'après la question précédente, il est impossible d'avoir $\chi_A = 1$ en même temps que $\chi_B = 1$ si $B \not\subset A$ et $A \not\subset B$. Comme les parties de $\mathcal{A}$ vérifient cette condition, pour une permutation $\sigma \in S_n$, il ne peut y avoir qu'une partie $A \in \mathcal{A}$ qui vérifie $\chi_A(\sigma) = 1$, les autres donneront 0. Ainsi, Y ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1, elle suit donc une loi de Bernoulli.

d. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Y) = \sum\limits_{A \in \mathcal{A}} \mathbb{E}(\chi_A)$ et Y suit une loi de Bernoulli, d'où $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{P}(Y = 1) \leqslant 1$ et on sait avec la question **a.** que $\mathbb{E}(\chi_A) = p_k$ si $k = \text{card}\,(A)$. Ainsi, on a $\sum\limits_{A \in \mathcal{A}} \dfrac{1}{\binom{n}{k}} \leqslant 1$. Dans une ligne du triangle de Pascal, les termes croissent puis décroissent, et le terme maximum est "au milieu" de la ligne. En effet, pour $k \in [\![0;n-1]\!]$, $r_k = \dfrac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \dfrac{k!(n-k)!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \dfrac{n-k}{k+1}$ donc $r_k \geqslant 1 \iff k \leqslant \left\lfloor \dfrac{n-1}{2} \right\rfloor$.

En distinguant les cas n pair et n impair, on constate que le terme maximum de la n-ième ligne du triangle de Pascal est $\dbinom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. Par conséquent, $\dfrac{\text{card}\,(\mathcal{A})}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} \leqslant \sum\limits_{A \in \mathcal{A}} \dfrac{1}{\binom{n}{k}} \leqslant 1$ donc $\text{card}\,(\mathcal{A}) \leqslant \dbinom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Il est à noter que cette majoration est optimale car si on prend pour $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties à $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ éléments, ces parties sont bien au nombre de $\dbinom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ et pour deux parties $A \neq B$ de $\mathcal{A}$, on a bien $B \not\subset A$ et $A \not\subset B$.

120 **a.** On a $\det(M) = X^2 - Y^2 = (X-Y)(X+Y)$ et $X + Y \neq 0$ car $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ par hypothèse donc $X + Y \geqslant 2$. Ainsi, M inversible $\iff X \neq Y$. Or $(X = Y) = \bigsqcup\limits_{n=1}^{+\infty} (X = n, Y = n)$ (réunion d'évènements incompatibles) donc, par σ-additivité, on a $\mathbb{P}(X = Y) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n, Y = n)$. Or, X et Y ont été supposées indépendantes ce qui donne la relation $\mathbb{P}(X = Y) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)\,\mathbb{P}(Y = n) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} p(1-p)^{n-1}$.

Comme $0 < (1-p)^2 < 1$, on peut calculer avec les séries géométriques : $\mathbb{P}(X=Y) = \dfrac{p^2}{1-(1-p)^2} = \dfrac{p}{2-p}$.
La probabilité que M soit inversible est donc $1 - \mathbb{P}(X=Y) = \dfrac{2-2p}{2-p}$.

b. La matrice M est symétrique réelle donc elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et les valeurs propres α et β vérifient $\alpha+\beta = \mathrm{Tr}\,(M) = X+Y$ et $\alpha\beta = \det(M) = X^2-Y^2 = (X-Y)(X+Y)$. Ainsi, les deux valeurs propres de M sont $X+Y$ et $X-Y$. Par conséquent, comme $Y > 0$, on a $U = X+Y \geqslant 2$ et $V = X-Y \in \mathbb{Z}$. D'après le cours, $\mathrm{Cov}(U,V) = \mathbb{E}(UV) - \mathbb{E}(U)\,\mathbb{E}(V)$. Or $\mathbb{E}(V) = \mathbb{E}(X-Y) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) = 0$ par linéarité de l'espérance et que X et Y suivent la même loi. Ainsi, $\mathrm{Cov}(UV) = \mathbb{E}(UV) = \mathbb{E}((X+Y)(X-Y)) = \mathbb{E}(X^2-Y^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(Y^2) = 0$.

c. Or $(U=2, V=0) = (U=2) = (X=Y=1)$ donc $\mathbb{P}(U=2,V=0) = \mathbb{P}(X=1,Y=1) = \mathbb{P}(X=1)\,\mathbb{P}(Y=1)$ car X, Y indépendantes donc $\mathbb{P}(U=2) = \mathbb{P}(U=2,V=0) = p^2$.

Par contre, $(V=0) = (X=Y) = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} (X=Y=n)$ (réunion incompatible) donc $\mathbb{P}(V=0) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)^2$ par σ-additivité, indépendance de X et Y qui suivent la même loi. Comme $\mathbb{P}(U=2,V=0) \neq \mathbb{P}(U=2)(V=0)$ car $\mathbb{P}(V=0) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2(n-1)} = \dfrac{p^2}{1-(1-p)^2} = \dfrac{p}{2-p} < 1$, U et V ne sont pas indépendantes.

d. Comme $Z(\Omega) = \mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}(Z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Z \geqslant n)$ d'après le cours. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $(Z < n) = (X < n) \cap (Y < n)$ donc, par indépendance de X et Y, $\mathbb{P}(Z < n) = \mathbb{P}(X < n)^2 = (1 - \mathbb{P}(X \geqslant n))^2$ car X et Y suivent la même loi. Ainsi, $\mathbb{P}(Z \geqslant n) = 1 - \mathbb{P}(Z < n) = 1 - (1-(1-p)^{n-1})^2$ (classique). On en déduit donc que $\mathbb{P}(Z \geqslant n) = 2(1-p)^{n-1} - (1-p)^{2(n-1)}$. On sait sommer les séries géométriques, et comme $|1-p| < 1$, Z admet une espérance finie et $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{2}{1-(1-p)} - \dfrac{1}{1-(1-p)^2} = \dfrac{3-2p}{p(2-p)}$.

121 **a.** ($\Longrightarrow$) Supposons A nilpotente, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que A^n donc X^n annule A ce qui montre que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0\}$. par le théorème de d'Alembert-Gauss, χ_A admet au moins une racine complexe donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ car les racines de χ_A sont les valeurs propres de A. Comme χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$, la matrice A est trigonalisable donc il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ car 0 est la seule valeur propre de A. Ainsi, $\mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(T) = 0$ et $\det(A) = \det(T) = 0$.
($\Longleftarrow$) Si $\det(A) = \mathrm{Tr}\,(A) = 0$, comme $\chi_A = X^2 - \mathrm{Tr}\,(A)X + \det(A) = X^2$, par le théorème de Cayley-Hamilton, on a $A^2 = 0$ donc A est nilpotente d'indice de nilpotence 1 ou 2.
b. On a $(A=0) = (X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 0)$ donc $\mathbb{P}(A=0) = \mathbb{P}(X_1=0)\,\mathbb{P}(X_2=0)\,\mathbb{P}(X_3=0)\,\mathbb{P}(X_4=0)$ par indépendance de X_1, X_2, X_3, X_4 d'où $\mathbb{P}(A=0) = \left(\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!}\right)^4$ car ces variables aléatoires suivent la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Ainsi, $\mathbb{P}(A=0) = p = e^{-4\lambda}$.

c. D'après la question **a.**, il vient $(A \text{ nilpotente}) = (\mathrm{Tr}\,(A) = X_1 + X_4 = 0, \det(A) = X_1X_4 - X_2X_3 = 0)$. Comme X_1, X_4 sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a plus simplement $(X_1+X_4=0) = (X_1 = X_4 = 0)$, par conséquent on peut écrire $(A \text{ nilpotente}) = (X_1 = 0, X_4 = 0, X_2X_3 = 0) = (X_1 = X_2 = X_4 = 0) \cup (X_1 = X_3 = X_4 = 0)$. On en déduit alors $\mathbb{P}(A \text{ nilpotente}) = \mathbb{P}(X_1 = X_2 = X_4 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = X_3 = X_4 = 0) - \mathbb{P}(X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 0)$. À nouveau, par indépendance de X_1, X_2, X_3, X_4, il vient $\mathbb{P}(A \text{ nilpotente}) = q = 2e^{-3\lambda} - e^{-4\lambda}$.

d. En effectuant un développement limité, on a $q \underset{0}{=} 2(1 - 3\lambda + o(\lambda)) - (1 - 4\lambda + o(\lambda)) \underset{0}{=} 1 - 2\lambda + o(\lambda)$.

122 **a.** Comme le nombre d'enfants par famille est un entier, $p_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$ donc $p_0 = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha\lambda^n = 1 - \frac{\alpha\lambda}{1-\lambda}$ ce qui donne $p_0 = \frac{1-(1+\alpha)\lambda}{1-\lambda} = 1 - \frac{\alpha\lambda}{1-\lambda} \in]0;1[$.

b. On sait que $\forall x \in]-1;1[,\ f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^n$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on dérive k fois ce développement en série entière à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence et on a donc $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}$. Or, par récurrence, on obtient la relation $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-1;1[,\ f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$. Ainsi, on a la relation attendue : $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-1;1[,\ \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$ donc $\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$.

c. Notons $E_n =$ " une famille a exactement n enfants" et $G_k =$ " une famille a exactement k garçons". On a $G_k = \bigsqcup_{n=k}^{+\infty} (G_k \cap E_n)$ donc, par σ-additivité, on a $\mathbb{P}(G_k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(G_k \cap E_n)$ donc $\mathbb{P}(G_k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)\mathbb{P}_{E_n}(G_k)$. Si une famille a n enfants, le nombre de garçons suit une loi binomiale de paramètres n, p d'après l'énoncé en supposant l'indépendance du genre des enfants. Ainsi, $\mathbb{P}_{E_n}(G_k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$. Par conséquent, il vient $\mathbb{P}(G_k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \alpha\lambda^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \alpha\lambda^k p^k \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (q\lambda)^{n-k} = \frac{\alpha\lambda^k p^k}{(1-q\lambda)^{k+1}}$ d'après la question **b.**.

d. Notons $P_n =$ "une famille a au moins n enfants". On cherche $r = \mathbb{P}_{P_1}(P_2) = \frac{\mathbb{P}(P_1 \cap P_2)}{\mathbb{P}(P_1)}$ or, comme $P_2 \subset P_1$, on a $r = \frac{\mathbb{P}(P_2)}{\mathbb{P}(P_1)}$. Or $\Omega = E_0 \sqcup P_1 = E_0 \sqcup E_1 \sqcup P_2$ donc $\mathbb{P}(P_1) = 1 - \mathbb{P}(E_0) = 1 - p_0$ et $\mathbb{P}(P_2) = 1 - p_0 - p_1$. On obtient donc $r = \frac{1-p_0-p_1}{1-p_0} = 1 - \frac{p_1}{1-p_0} = 1 - \frac{\alpha\lambda(1-\lambda)}{\alpha\lambda} = \lambda$.

123 **a.** $X_p(\Omega) = [\![0; \mathrm{Min}(p,n)]\!]$ avec de la parité.

b. $\mathbb{P}(X_{p+1} = 0) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(X_p = 1)$ et

c. $\mathbb{P}(X_{p+1} = k) = \frac{n-k+1}{n}\mathbb{P}(X_p = k-1) + \frac{k+1}{n}\mathbb{P}(X_p = k+1)$.

d. $X_p(\Omega)$ est fini.

e. calcul en mettant à part $k = 0$ et $k = n$.

f. $\mathbb{E}(X_p) = G_p'(1)$. On dérive **e.** et on évalue en 1.

g. suite arithmético-géométrique. limite $n/2$. Milieu.

124 **a.** On note T_k le numéro de la boule tirée au tirage k. On admet l'existence d'un espace probabilisé qui supporte cette suite $(T_k)_{k \geqslant 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes (remarque du cours). D'abord $X_n(\Omega) = (\mathbb{N}^* \setminus \{1\}) \cup \{+\infty\}$ car on rajoute la possibilité de ne jamais avoir une autre boule que la première tirée, qu'on note $X_n = +\infty$. De plus, $(X_n = +\infty) = \bigcap_{k=2}^{+\infty} \overline{(X_n = k)}$ par convention et $(X_n = k) = \bigcup_{i=1}^{n} \Big((T_1 = i) \cap \cdots \cap (T_{k-1} = i) \cap (T_k \neq i)\Big) \in \mathcal{A}$ pour $k \geqslant 2$ donc X_n est une variable aléatoire car les T_i le sont. Par incompatibilité de ces n évènements, indépendance mutuelle des T_k qui suivent toutes la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$, on a $\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} \left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{n-1}{n^{k-1}}$ pour $k \geqslant 2$.

On vérifie la cohérence de ces résultats car $\sum\limits_{k=2}^{+\infty}\dfrac{n-1}{n^{k-1}}=\dfrac{n-1}{n}\sum\limits_{j=0}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)^j=\dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{1}{1-(1/n)}=1$. Ceci justifie que l'évènement $(X_n=+\infty)$ (toujours la même boule) est négligeable comme attendu.

b. $k\,\mathbb{P}(X_n=k)=\dfrac{k(n-1)}{n^{k-1}}$ et $\sum\limits_{k\geqslant 2}\dfrac{k(n-1)}{n^{k-1}}$ converge car le rayon de la série entière $\sum\limits_{k\geqslant 1}kx^{k-1}$ est égal à 1 et que $\left|\dfrac{1}{n}\right|<1$. De plus, comme $\forall x\in]-1;1[$, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}x^k=\dfrac{1}{1-x}$, on obtient en dérivant $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}kx^{k-1}=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ donc $\sum\limits_{k=2}^{+\infty}kx^{k-1}=\dfrac{1}{(1-x)^2}-1$. Ainsi, $\mathbb{E}(X_n)=(n-1)\times\left(\dfrac{n^2}{(n-1)^2}-1\right)=\dfrac{2n-1}{n-1}$. Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{E}(X_n)=2$ ce qu'on subodorait car plus n augmente, plus l'évènement $(X_n=2)$ devient presque sûr.

c. Comme $X_2=Y_2$, pour $k\geqslant 2$, on a $(Y_2=k)=(X_2=k)$ donc $\mathbb{P}(Y_2=k)=\dfrac{1}{2^{k-1}}$ d'après **a.**. On reconnaît cette loi, Y_2-1 suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$ car $\mathbb{P}(Y_2-1=k)=\mathbb{P}(Y_2=k+1)=\dfrac{1}{2^k}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$.

d. Pour $k\geqslant 3$, en notant i le numéro de la première boule tirée, r le premier rang pour lequel on tire une boule de numéro $j\neq i$, comme $6-i-j$ est le numéro tiré autre que i et j (car $i+j+(6-i-j)=1+2+3=6$), on a $(Y_3=k)=\bigcup\limits_{i=1}^{3}\bigcup\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3}\bigcup\limits_{r=2}^{k-1}\left(\left(\bigcap\limits_{a=1}^{r-1}(T_a=i)\right)\cap(T_r=j)\cap\left(\bigcap\limits_{b=r+1}^{k-1}(T_k=i)\cup(T_k=j)\right)\right)\cap(T_k=6-i-j)$.
Ainsi, par incompatibilité de tous ces évènements, indépendance mutuelle des tirages et symétrie entre les numéros, $\mathbb{P}(Y_3=k)=3\times 2\times\sum\limits_{r=2}^{k-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{r-1}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-r-1}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{6}{3^k}\sum\limits_{r=2}^{k-1}2^{k-r-1}=\dfrac{6(2^{k-2}-1)}{3^k}$.
À nouveau, comme $Y_3(\Omega)=\{3,4,5,\cdots,+\infty\}$, on vérifie que $\sum\limits_{k=3}^{+\infty}\mathbb{P}(Y_3=k)=\sum\limits_{k=3}^{+\infty}\dfrac{6(2^{k-2}-1)}{3^k}=1$. En effet, on a $\sum\limits_{k=3}^{+\infty}\dfrac{6(2^{k-2}-1)}{3^k}=(6/4)\dfrac{(2/3)^3}{1-(2/3)}-6\dfrac{(1/3)^3}{1-(1/3)}=\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{3}=1$. Ceci justifie que l'évènement $(Y_3=+\infty)$ (seulement deux numéros tirés éternellement) est négligeable comme attendu.

125 **a.** Comme les lancers sont indépendants (on le suppose) et qu'ils amènent tous pile avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$ (la pièce est équilibrée), la variable aléatoire Y est le temps d'attente d'une réussite dans une répétition d'expériences indépendantes de Bernoulli de même paramètre $p=\dfrac{1}{2}$ donc Y suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$ et $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y=k)=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2^k}$. On note $(Y=+\infty)$ si on n'arrive jamais à avoir pile, mais $\mathbb{P}(Y=+\infty)+\sum\limits_{k=1}^{+\infty}P(Y=k)=1$ donc $\mathbb{P}(Y=+\infty)=1-\dfrac{1/2}{1-(1/2)}=0$ et l'évènement $(Y=+\infty)$ est, comme attendu, négligeable. On sait qu'alors, $\mathbb{E}(Y)=\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{(1/2)}=2$.

b. En notant les évènements $F_k=$ "on fait face au tirage k" et $P_k=$ "on fait pile au tirage k" pour tout entier $k\in\mathbb{N}^*$, pour $(x,y)\in(\mathbb{N}^*)^2$ tel que $x\geqslant 2$, on a $(X=x,Y=y)=\left(\bigcap\limits_{i=1}^{y-1}F_i\right)\cap P_y\cap\left(\bigcap\limits_{j=y+1}^{x-1}P_j\right)\cap F_x$.
Ainsi, par indépendance des lancers, on a $\mathbb{P}(X=x,Y=y)=\dfrac{1}{2^x}$.

Pour les cas spéciaux, $(X=+\infty,Y=y)=\left(\bigcap\limits_{i=1}^{y-1}F_i\right)\cap\left(\bigcap\limits_{j=y}^{+\infty}P_j\right)$ donc, pour tout $y'\geqslant y$, on a la relation $(X=+\infty,Y=y)\subset\left(\bigcap\limits_{i=1}^{y-1}F_i\right)\cap\left(\bigcap\limits_{j=y}^{y'}P_j\right)$ ce qui montre, par croissance de la probabilité et indépendance des tirages, que $\mathbb{P}(X=+\infty, Y=y) \leqslant \frac{1}{2^{y'}}$. En faisant tendre y' vers $+\infty$, on obtient donc $\mathbb{P}(X=+\infty, Y=y)=0$.

c. $X(\Omega) = [\![2;+\infty]\!]$ avec pour convention $X=+\infty$ si on n'a jamais la séquence pile-face. Pour $x \geqslant 2$, on a $(X=x) = \bigsqcup_{y=1}^{x-1} (X=x, Y=y)$ donc, par σ-additivité, on a la relation $\mathbb{P}(X=x) = \sum_{y=1}^{x-1} \mathbb{P}(X=x,Y=y) = \frac{x-1}{2^x}$.

d. On sait que $\forall x \in]-1;1[,\ f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$. On peut dériver terme à terme deux fois à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence pour avoir $\forall x \in]-1;1[,\ f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2}$.

e. Par définition, $\mathbb{E}(X) = \sum_{x=2}^{+\infty} x\,\mathbb{P}(X=x) = \sum_{x=2}^{+\infty} \frac{x(x-1)}{2^x} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{(1-(1/2))^3} = 4$. De plus, par formule de transfert, $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x=2}^{+\infty} x^2\,\mathbb{P}(X=x) = \sum_{x=2}^{+\infty} x^2\,\mathbb{P}(X=x)$.

126 **a.** Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ et $M' \in \mathbb{R}_+$ tels que $\mathbb{P}(|X|>M)=0$ et $\mathbb{P}(|Y|>M)=0$. Or, par inégalité triangulaire, on a $(|X| \leqslant M, |Y| \leqslant M') \subset (|X+Y| \leqslant M+M')$ donc $(|X+Y|>M+M') \subset (|X|>M) \cup (|Y|>M')$ d'où $\mathbb{P}(|X+Y|>M+M') \leqslant \mathbb{P}((|X|>M)\cup(|Y|>M')) \leqslant \mathbb{P}(|X|>M)+\mathbb{P}(|Y|>M') = 0$ et $\mathbb{P}(|X+Y|>M+M')=0$ avec $M+M'>0$ donc $X+Y$ est presque sûrement bornée.

b. ($\Longrightarrow$) Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et presque sûrement bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $(|X|>M')$ est négligeable, ainsi $(X \leqslant \lfloor M \rfloor)$ est presque sûr, $\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x)t^x = \sum_{x\in X(\Omega), x \leqslant \lfloor M \rfloor} \mathbb{P}(X=x)t^x$ (les autres termes sont nuls) ce qui prouve que G_X est une fonction polynomiale.

($\Longleftarrow$) Si G_X est une fonction polynomiale, notons $d = \deg(G_X)$ de sorte que $\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \sum_{k=0}^{d} a_k t^k$ avec des réels positifs $a_0, \cdots, a_d$. Comme $G_X(1)=1$, on a $\sum_{k=0}^{d} a_k = 1$ et $\forall k \in [\![0;d]\!],\ a_k = \mathbb{P}(X=k)$ par définition donc $\mathbb{P}(X \in [\![0;d]\!]) = \sum_{k=0}^{d} a_k = 1$ prouve que $\mathbb{P}(|X| \leqslant d) = 1$, donc que X est presque sûrement bornée.

Ainsi, si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, X est presque sûrement bornée si et seulement si G_X est polynomiale.

c. Comme $X+Y$ est bornée et Y positive, $0 \leqslant X \leqslant X+Y$ prouve que X est bornée, donc que G_X est polynomiale. De même, G_Y est polynomiale. Comme X et Y sont indépendantes, $G_{X+Y}(t) = (1-p+pt)^n = G_X(t)G_Y(t)$ pour tout réel t. On cherche donc deux polynômes réels à coefficients positifs P et Q et vérifiant $P(1)=Q(1)=1$ tels que $(1-p+pX)^n = PQ$. Comme $1-p+pX$ est irréductible, on a forcément $P = (1-p+pX)^i$ et $Q = (1-p+pX)^j$ avec des entiers naturels $i+j=n$. Ainsi, $X \sim \mathcal{B}(i,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(j,p)$.

PRÉPARATION ORAUX 2026 THÈME 9 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET CALCUL DIFFÉRENTIEL

127 **a.** La fonction f est de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par opérations car les fonctions $\cos$, ch, $\sin$ et sh le sont et que les fonctions $(x,y)\mapsto x$ et $(x,y)\mapsto y$ le sont aussi puisque leurs dérivées partielles sont constantes.

b. Pour $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\mathrm{ch}(y)\cos(x)-\sin(y)\mathrm{sh}(x)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\mathrm{sh}(y)\sin(x)-\cos(y)\mathrm{ch}(x)$. Ainsi, pour $(x,y)\in\Delta$, on a $y=x$ et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f(x,x)=(0,0)\iff\mathrm{ch}(x)\cos(x)=\sin(x)\mathrm{sh}(x)$. Les $x\in\mathbb{R}_+^*$ pour lesquels $x\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$ ne vérifient pas $\mathrm{ch}(x)\cos(x)=\sin(x)\mathrm{sh}(x)$ car $\mathrm{sh}(x)\neq 0$ donc, pour $(x,x)\in\Delta$, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f(x,x)=(0,0)\iff\tan(x)=\dfrac{1}{\mathrm{th}(x)}=\coth(x)=\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$.

Posons les intervalles $I_0=\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=\left]n\pi-\frac{\pi}{2};n\pi+\frac{\pi}{2}\right[$, puis $f_n:I_n\to\mathbb{R}$ définie par $f_n(x)=\tan(x)-\coth(x)$ pour $n\in\mathbb{N}$. Les fonctions f_n sont dérivables sur I_n et on calcule leurs dérivées $\forall x\in I_n$, $f_n'(x)=1+\tan^2(x)-(1-\coth^2(x))=\tan^2(x)+\coth^2(x)>0$. Or $\lim\limits_{x\to0^+}f_0(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-}f_0(x)=+\infty$ et $f_0\left(\frac{\pi}{4}\right)=1-\coth(\pi/4)<0$ et, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to(n-(\pi/2))^+}f_n(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to(n+(\pi/2))^-}f_n(x)=+\infty$ et $f_n\left(n\pi+\frac{\pi}{4}\right)=1-\coth(n\pi+(\pi/4))<0$ donc f_n réalise une bijection de I_n dans $\mathbb{R}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Comme $0\in\mathbb{R}$, il existe un unique réel $x_n\in I_n$ tel que $f_n(x_n)=0$, et comme les f_n sont strictement croissantes sur I_n et que $f_n\left(n\pi+\frac{\pi}{4}\right)<0=f_n(x_n)$, on a $x_n>n\pi+\frac{\pi}{4}$ donc $x_n\in J_n=\left]n\pi+\frac{\pi}{4};n\pi+\frac{\pi}{2}\right[$.

Les points critiques de f sur Δ sont des (x_n,x_n) où $x_n=f_n^{-1}(0)$ avec $x_n\in\left]n\pi+\frac{\pi}{4};n\pi+\frac{\pi}{2}\right[$ pour $n\in\mathbb{N}$.

c. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=-\mathrm{ch}(y)\sin(x)-\sin(y)\mathrm{ch}(x)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\mathrm{ch}(y)\sin(x)+\sin(y)\mathrm{ch}(x)=-\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\mathrm{sh}(y)\cos(x)-\cos(y)\mathrm{sh}(x)$ pour $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$. Ainsi, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_n,x_n)=-2\mathrm{ch}(x_n)\sin(x_n)=a_n$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_n,x_n)=2\mathrm{ch}(x_n)\sin(x_n)=-a_n$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_n,x_n)=0$ pour $n\in\mathbb{N}$. Alors, la hessienne de f en le point critique (x_n,x_n) est $H_f(x_n,x_n)=\begin{pmatrix}a_n&0\\0&-a_n\end{pmatrix}$ a deux valeur propres de signes strictes opposés car $a_n\neq0$. Ainsi, f admet en (x_n,x_n) un point selle, et pas un extremum local.

Il n'y a donc aucun extremum local de f sur la demi-droite Δ.

128 **a.** Pour $x\in\mathbb{R}_+$, la fonction $t\mapsto\sin(x-t)g(t)$ est continue sur le segment $[0;x]$ donc $h(x)$ est bien définie. De plus, $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $h(x)=\displaystyle\int_0^x(\sin(x)\cos(t)-\cos(x)\sin(t))g(t)dt$ et, puisque tout converge, par linéarité de l'intégrale, $h(x)=\sin(x)\displaystyle\int_0^x\cos(t)g(t)dt-\cos(x)\int_0^x\sin(t)g(t)dt$. Par le théorème fondamental de l'intégration, comme les fonctions $a:t\mapsto\cos(t)g(t)$ et $b:t\mapsto\sin(t)g(t)$ sont continues sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, les fonctions $A:x\mapsto\displaystyle\int_0^x\cos(t)g(t)dt$ et $B:x\mapsto\displaystyle\int_0^x\sin(t)g(t)dt$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ (ce sont des primitives les primitives de a et b respectivement qui s'annulent en 0). Par opérations, h est C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ h'(x) = \cos(x)A(x) + \sin(x)\cos(x)g(x) + \sin(x)B(x) - \cos(x)\sin(x)g(x) = \cos(x)A(x) + \sin(x)B(x)$. Par opérations, h' est aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, donc h est bien de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ et on peut calculer $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ h''(x) = -\sin(x)A(x) + \cos^2(x)g(x) + \cos(x)B(x) + \sin^2(x)g(x) = -h(x) + g(x)$.

b. Les solutions réelles sur $\mathbb{R}_+$ de $(E_0)\ :\ y'' + y = 0$ sont classiquement les $y : x \mapsto \alpha\sin(x) + \beta\cos(x)$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Comme h est une solution particulière de (E) avec **a.**, les solutions réelles de (E) sur $\mathbb{R}_+$ sont, par structure affine de l'ensemble des solutions, les $y : x \mapsto h(x) + \alpha\sin(x) + \beta\cos(x)$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

c. Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(x) = e^{-x}\Big(a + \displaystyle\int_0^x f(t)dt\Big)$. Alors $\varphi'(x) = -e^{-x}\Big(a + \displaystyle\int_0^x f(t)dt\Big) + e^{-x}f(x) \leqslant 0$ donc φ est décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$. Comme $\varphi(0) = a$, on a $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \varphi(x) \leqslant a$ ce qui donne l'inégalité $a + \displaystyle\int_0^x f(t)dt \leqslant ae^x$ et on obtient $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \leqslant ae^x$ par transitivité.

d. D'après **b.**, on a $\Phi_\lambda : x \mapsto h(x) + \alpha\sin(x) + \beta\cos(x)$ avec $\Phi'_\lambda(0) = h'(0) + \alpha = \lambda$ et $\Phi_\lambda(0) = h(0) + \beta = 0$. Or $h'(0) = A(0) = 0$ et $h(0) = 0$ donc $\Phi_\lambda : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sin(x-t)g(t)dt + \lambda\sin(x)$. Je suppose qu'on souhaite étudier l'aspect lipschitzien de $\Phi_\lambda : g \mapsto \Phi_\lambda(g)$ qui est la solution de l'énoncé en utilisant l'inégalité vue en question **c.** mais dans quelle espace et avec quelle norme ?

129 **a.** La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ par opérations car les fonctions polynomiales $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto \sum\limits_{k=1}^n x_k$ et $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto \sum\limits_{k=1}^n x_k^2$ et même $\exp$ sont de classe C^1. Pour $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on calcule le gradient $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_1, \cdots, x_n) = \exp\Big(-\sum\limits_{k=1}^n x_k^2\Big)\Big(1 - 2x_1\sum\limits_{k=1}^n x_k, \cdots, 1 - 2x_n\sum\limits_{k=1}^n x_k\Big)$.

<u>Analyse</u> : si $(x_1, \cdots, x_n)$ est un point critique de f, alors $\forall j \in [\![1;n]\!],\ 1 - 2x_j\sum\limits_{k=1}^n x_k = 0$ donc $x_j \neq 0$ et $\sum\limits_{k=1}^n x_k = \dfrac{1}{2x_j}$ donc $x_1 = \cdots = x_n = \lambda$ et en reportant dans les équations, $1 - 2\lambda(n\lambda) = 0$ donc $\lambda = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.

<u>Synthèse</u> : réciproquement, si $(x_1, \cdots, x_n) = \pm\Big(\dfrac{1}{\sqrt{2n}}, \cdots, \dfrac{1}{\sqrt{2n}}\Big)$, comme $\sum\limits_{k=1}^n x_k = \pm n \times \dfrac{1}{\sqrt{2n}} = \pm\sqrt{\dfrac{n}{2}}$ et $\sum\limits_{k=1}^n x_k^2 = n \times \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}$, on a $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_1, \cdots, x_n) = \exp\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)\Big(1 - \dfrac{2}{\sqrt{2n}}\sqrt{\dfrac{n}{2}}, \cdots, 1 - \dfrac{2}{\sqrt{2n}}\sqrt{\dfrac{n}{2}}\Big) = (0, \cdots, 0)$.

Ainsi, il y a deux points critiques de f sur $\mathbb{R}^n$ qui sont $a_n = \Big(\dfrac{1}{\sqrt{2n}}, \cdots, \dfrac{1}{\sqrt{2n}}\Big)$ et $-a_n$.

b. De même, la fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$ et, pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et tout $j \in [\![1;n]\!]$, on calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j{}^2}(x_1, \cdots, x_n) = \Big(-2x_j - 2\sum\limits_{k=1}^n x_k - 2x_j\Big(1 - 2x_j\sum\limits_{k=1}^n x_k\Big)\Big)\exp\Big(-\sum\limits_{k=1}^n x_k^2\Big)$ ce qui montre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j{}^2}(a_n) = \Big(-2\dfrac{1}{\sqrt{2n}} - 2\sqrt{\dfrac{n}{2}} - 2\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\Big(1 - 2\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\sqrt{\dfrac{n}{2}}\Big)\Big)e^{-1/2} = -(n+1)\sqrt{\dfrac{2}{en}}$. Si $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ avec $i \neq j$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \cdots, x_n) = \Big(-2x_j - 2x_i\Big(1 - 2x_j\sum\limits_{k=1}^n x_k\Big)\Big)\exp\Big(-\sum\limits_{k=1}^n x_k^2\Big) = \Big(-2x_i - 2x_j + 4x_ix_j\sum\limits_{k=1}^n x_k\Big)\exp\Big(-\sum\limits_{k=1}^n x_k^2\Big)$ donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a_n) = \Big(-4\dfrac{1}{\sqrt{2n}} + \dfrac{4}{2n}\sqrt{\dfrac{n}{2}}\Big)e^{-1/2} = -\sqrt{\dfrac{2}{en}}$. Ainsi, la matrice hessienne de f en a_n vaut $H = -\sqrt{\dfrac{2}{en}}\begin{pmatrix} n+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{pmatrix}$. Soit la matrice symétrique réelle $M = \begin{pmatrix} n+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{pmatrix}$,

$M - nI_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1, d'après la formule du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(M - nI_n)) = n - 1$ donc n est une valeur propre de M d'ordre de multiplicité supérieure à $n-1$. De plus, en notant $v = (1, \cdots, 1)$, on a $Mv = 2nv$ avec $v \neq 0$ donc $2n \in \mathrm{Sp}(M)$ de sorte que $\mathrm{Sp}(M) = \{n, 2n\} \subset \mathbb{R}_+^*$ (avec $\chi_M = (X-n)^{n-1}(X-2n)$). Ainsi, M est symétrique définie positive donc H est symétrique définie négative ce qui montre que f admet en a_n un maximum local.

c. Comme $f(-x_1, \cdots, -x_n) = -f(x_1, \cdots, x_n)$, puisque f admet en a_n un minimum local, la fonction f admet un maximum local en $-a_n$ car si $\forall x \in B(a_n, r),\ f(x) \geqslant f(a_n)$, alors $\forall -x \in B(-a_n, r),\ f(-x) \leqslant f(-a_n)$.

d. Pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|f(x)| \leqslant \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|\Big) \exp\Big(-\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\Big)$ et on sait que $||x||_1 \leqslant \sqrt{n}||x||_2$ (par Cauchy-Schwarz) donc $|f(x)| \leqslant g(||x||_2)$ avec $g : r \mapsto \sqrt{n}re^{-r^2}$. Comme $\lim\limits_{r \to +\infty} g(r)$ par croissances comparées, on a bien $\lim\limits_{||x||_2 \to +\infty} f(x) = 0$ par encadrement.

e. Posons $\alpha_n = f(a_n) > 0$, il existe $r_n > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ ||x||_2 \geqslant r_n \Longrightarrow |f(x)| \leqslant \frac{\alpha_n}{2}$ d'après la question précédente. La fonction f étant continue sur le fermé borné $K_n = B_f(0, r_n)$, comme on est en dimension finie, d'après le théorème des bornes atteintes, f admet un maximum absolu sur K_n. Comme f est inférieure à $\frac{\alpha_n}{2}$ sur la frontière de K_n et que $f(a_n) = \alpha_n > \frac{\alpha_n}{2}$, le maximum de f sur K_n est atteint dans l'intérieur de K_n, c'est-à-dire dans l'ouvert $\overset{\circ}{K_n} = B(0, r_n)$ donc en un point critique, donc en a_n ou en $-a_n$ avec les calculs de la question **a.**. Mais $f(a_n) > 0$ et $f(-a_n) < 0$ donc $m_n = \underset{K_n}{\mathrm{Max}}(f) = f(a_n)$.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a deux possibilités :

- Si $x \in K_n$, alors $f(x) \leqslant m_n = f(a_n)$.
- Si $x \notin K_n$, alors $f(x) \leqslant \frac{\alpha_n}{2} \leqslant f(a_n)$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) \leqslant f(a_n) = m_n$ donc $\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\mathrm{Max}}\ f(x) = f(a_n)$ et f admet bien en a_n un maximum absolu.

130 **a.** Soit $((x, y), (x', y')) \in (\mathbb{R}^2)^2$, on a $\varphi(x, y) - \varphi(x', y') = \varphi(x, y) - \varphi(x, y') + \varphi(x, y') - \varphi(x', y')$ en suivant les axes donc, par inégalité triangulaire, $|\varphi(x, y) - \varphi(x', y')| \leqslant |\varphi(x, y) - \varphi(x, y')| + |\varphi(x, y') - \varphi(x', y')|$ donc $|\varphi(x, y) - \varphi(x', y')| \leqslant \int_{-1}^{1} |t-x|\,(|t-y| - |t-y'|)dt + \int_{-1}^{1} (|t-x| - |t-x'|)\,|t-y'|dt$. Or $\big||a| - |b|\big| \leqslant |a-b|$ donc $|\varphi(x, y) - \varphi(x', y')| \leqslant |y - y'| \int_{-1}^{1} |t-x|dt + |x - x'| \int_{-1}^{1} |t - y'|dt$. Or, si $(x, y) \in C$, $\forall t \in [-1; 1],\ |t - x| \leqslant 2$ et $|t - y'| \leqslant 2$ donc $|\varphi(x, y) - \varphi(x', y')| \leqslant 4\big(|x - x'| + |y - y'|\big) = 4||(x, y) - (x', y')||_1$. Ainsi, φ étant 4-lipschitzienne sur C (avec la norme 1), on en déduit que φ est continue sur C. Plus généralement, φ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car elle est, avec les mêmes arguments, lipschitzienne sur tout carré du type $[-a; a]^2$ avec $a > 0$.

b. La partie C est une partie bornée car $\forall (x, y) \in C,\ ||(x, y)||_\infty \leqslant 1$, et fermée, car si $\big((x_n, y_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente, vers $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, de points de C, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = y$ donc, comme $\forall n \in \mathbb{N},\ -1 \leqslant x_n, y_n \leqslant 1$, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on a $-1 \leqslant x, y \leqslant 1$ donc $(x, y) \in C$. Comme φ est continue sur le fermé borné C en dimension finie, φ est bornée sur C et y atteint ses bornes ce qui justifie l'existence de $\mu = \underset{(x,y)\in C}{\text{Min}}(\varphi(x,y))$ par le théorème des bornes atteintes.

c. Pour $(x,y) \in T$, $\varphi(x,y) = \int_{-1}^{1} |t-x|\,|t-y|dt = \int_{-1}^{x} |t-x|\,|t-y|dt + \int_{x}^{y} |t-x|\,|t-y|dt + \int_{y}^{1} |t-x|\,|t-y|dt$ par CHASLES donc $\varphi(x,y) = \int_{-1}^{x} (x-t)(y-t)dt + \int_{x}^{y} (t-x)(y-t)dt + \int_{y}^{1} (t-x)(t-y)dt$. Ainsi, en développant, $\varphi(x,y) = xy[(x+1)-(y-x)+(1-y)] - (x+y)\Big(\int_{-1}^{x} tdt - \int_{x}^{y} tdt + \int_{y}^{1} tdt\Big) + \int_{-1}^{x} t^2dt - \int_{x}^{y} t^2dt + \int_{y}^{1} t^2dt$.
On a donc $\varphi(x,y) = xy[2x-2y+2] - \dfrac{x+y}{2}\left[x^2-1-y^2+x^2+1-y^2\right] + \dfrac{x^3+1}{3} - \dfrac{y^3-x^3}{3} + \dfrac{1-y^3}{3}$ qui se simplifie en $\varphi(x,y) = \dfrac{y^3}{3} - y^2x + yx^2 - \dfrac{x^3}{3} + 2xy + \dfrac{2}{3} = \dfrac{(y-x)^3}{3} + 2xy + \dfrac{2}{3}$.

d. Comme en **b.**, T est un fermé borné donc φ admet aussi sur T un minimum qu'on note $\lambda = \underset{(x,y)\in T}{\text{Min}}(\varphi(x,y))$. La partie T est un triangle dont les trois bords (frontière de T) sont les côtés $C_1 : x = -1, -1 \leqslant y \leqslant 1$, $C_2 : y = 1, -1 \leqslant x \leqslant 1$ et $C_3 : -1 \leqslant x = y \leqslant 1$. Faisons une étude sur chacun des trois bords de ce triangle.

<u>Sur C_1</u>, soit $f_1 : [-1;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_1(y) = \varphi(-1,y) = \dfrac{(y+1)^3}{3} - 2y + \dfrac{2}{3}$, alors f_1 est dérivable sur $[-1;1]$ et $f_1'(y) = (y+1)^2 - 2$ donc f_1 est décroissante sur $[-1;-1+\sqrt{2}]$ et croissante sur $[-1+\sqrt{2};1]$. Ainsi, $\underset{[-1;1]}{\text{Min}}(f_1) = f_1(-1+\sqrt{2}) = \dfrac{4(2-\sqrt{2})}{3} \sim 0,78$.

<u>Sur C_2</u>, soit $f_2 : [-1;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_2(x) = \varphi(x,1) = \dfrac{(1-x)^3}{3} + 2x + \dfrac{2}{3} = f_1(-x)$. Par conséquent, on a $\underset{[-1;1]}{\text{Min}}(f_2) = f_2(1-\sqrt{2}) = \dfrac{4(2-\sqrt{2})}{3} \sim 0,78$. C'est normal car on a aussi $f(-x,-y) = f(x,y)$ avec le changement de variable $t = -u$.

<u>Sur C_3</u>, soit $f_3 : [-1;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_3(t) = \varphi(t,t) = t^2 + \dfrac{2}{3}$, alors f_3 est clairement minimale pour $t = 0$ donc $\underset{[-1;1]}{\text{Min}}(f_3) = f_3(0) = \dfrac{2}{3} \sim 0,670$.

Comme φ est de classe C^1 sur l'intérieur de T car elle y est polynomiale d'après la question **c.**, on peut chercher les points critiques de φ à l'intérieur de T. Pour $(x,y) \in \overset{\circ}{T}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ si et seulement si $-(y-x)^2 + 2y = (y-x)^2 + 2x = 0 \iff (y = -x \text{ et } 4x^2 + 2x = 0) \iff (y = -x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = y = 0)$. Or $(0,0)$ n'est pas dans l'intérieur de T mais sur le côté C_3 donc l'unique point critique de φ à l'intérieur de T est $\Big(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\Big)$ en lequel $\varphi\Big(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\Big) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{2}$. Comme cette valeur $\dfrac{1}{2}$ est strictement inférieure aux trois valeurs des minima des fonctions f_1, f_2, f_3 trouvées précédemment, φ admet son minimum à l'intérieur de T en un seul point qui est $\Big(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\Big)$ car il n'y a qu'un point critique. Ainsi, $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

e. Comme $T \subset C$, on a $\lambda \geqslant \mu$. De plus, pour $(x,y) \in C$, si $x \leqslant y$, on a $(x,y) \in T$ donc $f(x,y) \geqslant \lambda$. Et si $x > y$, comme $\varphi(y,x) = \varphi(x,y)$ et $(x,y) \in T$, on a $\varphi(y,x) \geqslant \lambda$ donc $\varphi(x,y) \geqslant \lambda$. Ainsi, λ est un minorant de f sur C donc $\mu \geqslant \lambda$. Ainsi, $\lambda = \mu = \dfrac{1}{2}$.

f. Par exemple, si $x \geqslant 1$ et $y \geqslant 1$, on a $\varphi(x,y) = \int_{-1}^{1} (x-t)(y-t)dt \geqslant \int_{-1}^{1} (x-1)(y-1)dt = 2(x-1)(y-1)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x,x) = +\infty$ et la fonction φ n'est pas majorée sur $\mathbb{R}^2$ donc n'admet pas de maximum absolu.

Quant au minimum éventuel, découpons le plan en 9 parties :

- Si (x,y) vérifie $x \in [-1;1]$ et $y \in [-1;1]$, alors $(x,y) \in C$ donc $\varphi(x,y) \geqslant \mu = \dfrac{1}{2}$.
- Si (x,y) vérifie $x \geqslant 1$ et $y \geqslant 1$, $\varphi(x,y) = \int_{-1}^{1} (x-t)(y-t)dt = 2xy - (x+y)\int_{-1}^{1} tdt + \int_{-1}^{1} t^2dt$ donc

$\varphi(x,y) = 2xy + \frac{2}{3} \geqslant 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \geqslant \frac{1}{2} = \mu$.

- Si (x,y) vérifie $x \geqslant 1$ et $y \leqslant -1$, $\varphi(x,y) = \int_{-1}^{1}(x-t)(t-y)dt = -2xy - \frac{2}{3} \geqslant 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \geqslant \frac{1}{2} = \mu$.
- Si (x,y) vérifie $x \leqslant -1$ et $y \geqslant 1$, $\varphi(x,y) = \int_{-1}^{1}(t-x)(y-t)dt = -2xy - \frac{2}{3} \geqslant 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \geqslant \frac{1}{2} = \mu$.
- Si (x,y) vérifie $x \leqslant -1$ et $y \leqslant -1$, $\varphi(x,y) = \int_{-1}^{1}(t-x)(t-y)dt = 2xy + \frac{2}{3} \geqslant 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \geqslant \frac{1}{2} = \mu$.
- Si (x,y) vérifie $x \in]-1;1[$ et $y \geqslant 1$, $\varphi(x,y) = \int_{-1}^{x}(x-t)(y-t)dt + \int_{x}^{1}(t-x)(y-t)dt$ donc $\varphi(x,y) = x - \frac{x^3}{3} + (1+x^2)y$ après calculs et $\varphi(x,y) \geqslant -\frac{x^3}{3} + x^2 + x + 1 = \frac{(1-x)^3}{3} + 2x + \frac{2}{3} = f_2(x) \geqslant \mu$.
- Si (x,y) vérifie $x \in]-1;1[$ et $y \leqslant -1$, $\varphi(x,y) = \int_{-1}^{x}(x-t)(t-y)dt + \int_{x}^{1}(t-x)(t-y)dt$ donc $\varphi(x,y) = -x + \frac{x^3}{3} - (1+x^2)y \geqslant -x + \frac{x^3}{3} + 1 + x^2 = \frac{(x+1)^3}{3} - 2x + \frac{2}{3} = f_1(x) \geqslant \mu$.
- Si (x,y) vérifie $x \geqslant 1$ et $y \in]-1;1[$, $\varphi(x,y) = \int_{-1}^{y}(x-t)(y-t)dt + \int_{y}^{1}(x-t)(t-y)dt$ donc $\varphi(x,y) = x(1+y^2) + y - \frac{y^3}{3} \geqslant 1 + y^2 + y - \frac{y^3}{3} = f_2(y) \geqslant \mu$.
- Si (x,y) vérifie $x \leqslant -1$ et $y \in]-1;1[$, $\varphi(x,y) = \int_{-1}^{y}(t-x)(y-t)dt + \int_{y}^{1}(t-x)(t-y)dt$ donc $\varphi(x,y) = -x(1+y^2) - y + \frac{y^3}{3} \geqslant 1 + y^2 - y + \frac{y^3}{3} = f_1(y) \geqslant \mu$.

Ainsi, μ est le minimum de φ sur $\mathbb{R}^2$. On aurait pu traiter moins de cas avec les symétries de la fonction φ.

131 **a.** Supposons qu'il existe une fonction $y :]-r;r[\to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in]-r;r[,\ y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ qui soit solution de (E) sur $]-r;r[$ avec $r > 0$. Puisque le rayon R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ vérifie $R \geqslant r$ par l'existence de $y(x)$ pour $x \in]-r;r[$, on peut dériver terme à terme à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence $]-R;R[$ donc dans $]-r;r[$, ainsi $\forall x \in]-r;r[,\ y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^{n-2}$. On a donc $\forall x \in]-r;r[,\ \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\big((n-1)a_{n-1} + a_n\big)x^n = x^2$ ce qui donne, par unicité du développement en série entière, $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $\forall n \geqslant 3,\ (n-1)a_{n-1} + a_n = 0$.
On trouve donc, par une récurrence simple, que $\forall n \geqslant 3,\ a_n \neq 0$ donc que $\forall n \geqslant 2,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = -n$ puis $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty$ et, avec D'ALEMBERT, $R = 0$, ce qui est absurde. Ainsi, il n'existe aucune solution de (E) qui soit développable en série entière au voisinage de 0.

b. Les solutions réelles de $(E_0)\ :\ x^2y' + y = 0$ sur $I_1 = \mathbb{R}_-^*$ ou sur $I_2 = \mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $y : x \mapsto \lambda e^{1/x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est une primitive de $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ sur I_1 ou I_2. Par méthode de variation de la constante, une solution particulière de (E) sur I_1 ou I_2 se trouve avec $y : x \mapsto \lambda(x)e^{1/x}$ avec $\lambda : I_k \to \mathbb{R}$ dérivable. En reportant dans (E), y solution de $(E) \iff \forall x \in I_k,\ x^2\lambda'(x)e^{1/x} - \lambda(x)e^{1/x} + \lambda(x)e^{1/x} = x^2 \iff \lambda'(x) = e^{-1/x}$. On prend, sur I_2, la fonction $\lambda : x \mapsto \int_1^x e^{-1/t}dt$ (la primitive de $f : t \mapsto e^{-1/t}$ qui s'annule en $1 \in I_2$). Les solutions réelles de (E) sur I_2 sont donc les fonctions $y : x \mapsto \left(\alpha + \int_1^x e^{-1/t}dt\right)e^{1/x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Puisque $\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty$, si on veut une limite finie de y en 0^+, il est nécessaire d'avoir $\lim_{x\to 0^+}\left(\alpha + \int_1^x e^{-1/t}dt\right) = 0$.

La fonction f est continue sur $]0;1]$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0)=0$ ce qui assure la convergence de $\int_0^1 f(t)dt$, la seule valeur possible pour avoir une limite finie de y en 0^+ est donc $\alpha=\int_0^1 f(t)dt$. Posons $y_0 : x \mapsto \left(\int_0^1 f(t)dt + \int_1^x e^{-1/t}dt\right)e^{1/x} = e^{1/x}\int_0^x e^{-1/t}dt$ par CHASLES. Comme f est positive et croissante sur $\mathbb{R}_+$, pour $x>0$, on a $\forall t\in[0;x],\ 0\leqslant f(t)\leqslant f(x)$ donc, par croissance de l'intégrale, $0\leqslant \int_0^x f(t)dt \leqslant \int_0^x f(x)dt = xf(x)$ donc $0\leqslant y_0(x)\leqslant xf(x)e^{1/x}=x$. Par encadrement, $\lim\limits_{x\to 0^+} y_0(x)=0$.
La fonction $y_0 : x\mapsto e^{1/x}\int_0^x e^{-1/t}dt$ est la seule solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ qui admette une limite finie en 0^+.
c. Par la même méthode qu'en **b.**, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions $y : x\mapsto \left(\beta+\int_{-1}^x e^{-1/t}dt\right)e^{1/x}$ avec $\beta\in\mathbb{R}$ car $-1\in\mathbb{R}_-^*$. Pour tout $\beta\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to 0^-}(\beta e^{1/x})=0$ car $\lim\limits_{t\to-\infty} e^t=0$.
Pour tout $x\in]-1;0[$, en posant les fonctions $u : t\mapsto e^{-1/t}$ et $v : t\mapsto t^2$ qui sont de classe C^1 sur $[-1;x]$, on a $e^{1/x}\int_{-1}^x e^{-1/t}dt = e^{1/x}\left[t^2e^{-1/t}\right]_{-1}^x - 2e^{1/x}\int_{-1}^x te^{-1/t}dt = x^2 - e.e^{1/x} - 2e^{1/x}\int_{-1}^x te^{-1/t}dt$. On recommence en posant $u : t\mapsto e^{-1/t}$ et $v : t\mapsto t^3$ qui sont de classe C^1 sur $[-1;x]$ et on a la nouvelle relation $e^{1/x}\int_{-1}^x e^{-1/t}dt = x^2 - e.e^{1/x} - 2e^{1/x}\left[t^3e^{-1/t}\right]_{-1}^x + 6e^{1/x}\int_{-1}^x t^2e^{-1/t}dt$. À terminer.

132

133 **a.** Par opérations, f est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ car $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\ x^4+y^2>0$. Si $||(x,y)||_2\leqslant 1$ et $(x,y)\neq(0,0)$, on a $|f(x,y)| = -x^2\ln(x^4+y^2)$ car $0<x^4+y^2\leqslant 1$ donc $\ln(x^4+y^2)\leqslant 0$. Ainsi, si $x=0$, $|f(x,y)|=0$ et si $x\neq 0$, $|f(x,y)|\leqslant -x^2\ln(x^4) = -4x^2\ln(|x|) = g(x)$ car $x^4+y^2\geqslant x^4$ donc $-\ln(x^4+y^2)\leqslant -\ln(x^4) = 4\ln(|x|)$. Comme g se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0)=0$ par croissances compareés, si on se donne $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ que $\forall x\in]-\eta;\eta[,\ |g(x)|\leqslant\varepsilon$. Ainsi, si $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et si $||(x,y)||_2\leqslant \mathrm{Min}(1,\eta)>0$, on a $|f(x,y)|\leqslant g(x)\leqslant\varepsilon$.
Ceci prouve la continuité de f en $(0,0)$ donc, d'après ce qui précède, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
b. D'abord, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{2t^2\ln(|t|)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} 2t\ln(|t|) = 0$ par croissances comparées. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} 0 = 0$. De plus, pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, on a classiquement $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\ln(x^4+y^2)+\frac{4x^5}{x^4+y^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$. Avec l'indication de l'énoncé, pour $x\neq 0$, on a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,x^2) = \frac{2x^4}{x^4+x^4} = 1$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\partial f}{\partial y}(x,x^2) = 1 \neq \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ alors que $\lim\limits_{x\to 0}(x,x^2)=(0,0)$. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $(0,0)$, ce qui justifie que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
c. $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ est un point critique de f si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$. Or $2x\ln(x^4+y^2)+\frac{4x^5}{x^4+y^2} = \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = 0 \Longleftrightarrow (x=0 \text{ ou } (y=0, 8x\ln(|x|)+4x=0)$ ce qui donne enfin $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x,y)=(0,0)\Longleftrightarrow (x=0 \text{ ou } (y=0, x=\pm e^{1/2}))$. En tout point critique $(0,y)$ de f, on a $f(0,y)=0$. Comme $f\left(\pm e^{1/2},0\right) = \frac{1}{e}\ln(1/e^2) = -\frac{2}{e}<0$, les points critiques $(0,y)$ ne sont pas des minima absolus de f.

134 **a.** Le couple $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ est fixé. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène $(E_0)\ :\ y''-4y=0$ sont, d'après le cours, les fonctions $y : t\mapsto Ae^{2t}+Be^{-2t}$ avec $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ car l'équation caractéristique associée à (E_0) est $z^2-4=0$ donc les solutions sont ± 2. Il est clair que les fonctions $f_1 : t\mapsto -\frac{at+b}{4}$ et $f_2 : t\mapsto \frac{at-b}{4}$

sont respectivement solutions particulières de l'équation (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

Analyse : soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, il existe d'après ce qui précède quatre scalaires réels A_1, A_2, B_1, B_2 tels que $\forall t > 0,\ y(t) = A_1e^{2t} + B_1e^{-2t} - \dfrac{at+b}{4}$ et $\forall t < 0,\ y(t) = A_2e^{2t} + B_2e^{-2t} + \dfrac{at-b}{4}$.

Par continuité de y en 0, $y(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} y(x) = A_1+B_1-\frac{b}{4} = \lim\limits_{x\to 0^-} y(x) = A_2+B_2-\frac{b}{4}$: $A_1+B_1 = A_2+B_2$ (1).

Par continuité de y' en 0, on a $y'(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} y'(x) = 2A_1 - 2B_1 - \frac{a}{4} = \lim\limits_{x\to 0^-} y'(x) = 2A_2 - 2B_2 + \frac{a}{4}$ donc $A_1 - B_1 = A_2 - B_2 + \frac{a}{4}$ (2). En additionnant et en soustrayant (1) et (2) : $A_2 = A_1 - \frac{a}{8}$ et $B_2 = B_1 + \frac{a}{8}$.

Synthèse : soit $(A_1, B_1) \in \mathbb{R}^2$ et la fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y(0) = A_1 + B_1 - \dfrac{b}{4}$ et aussi par $\forall x > 0,\ y(x) = A_1e^{2x} + B_1e^{-2x} - \dfrac{ax+b}{4}$ et $\forall x < 0,\ y(x) = \Big(A_1 - \dfrac{a}{8}\Big)e^{2x} + \Big(B_1 + \dfrac{a}{8}\Big)e^{-2x} + \dfrac{ax-b}{4}$. Ce qui précède prouve que y est une solution de classe C^∞ de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. De plus, comme il vient $\lim\limits_{x\to 0^+} y(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} y(x) = y(0) = A_1+B_1-\dfrac{b}{4}$: y est continue en 0. $\lim\limits_{x\to 0^+} y'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} y'(x) = 2A_1 - 2B_1 - \dfrac{a}{4}$ donc y est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $y'(0) = 2A_1 - 2B_1 - \dfrac{a}{4}$. Enfin, $\forall x > 0,\ y''(x) = 4A_1e^{2x} + 4B_1e^{-2x}$ et $\forall x < 0,\ y''(x) = 4\Big(A_1 - \dfrac{a}{8}\Big)e^{2x} + 4\Big(B_1 + \dfrac{a}{8}\Big)e^{-2x}$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} y''(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} y''(x) = 4A_1 + 4B_1$ et y est donc deux fois dérivable en 0 (théorème de prolongement C^1 appliqué à y') avec $y''(0) = 4A_1 + 4B_1$. Ainsi $y''(0) - 4y(0) = 4A_1 + 4B_1 - 4\Big(A_1 + B_1 - \dfrac{b}{4}\Big) = b = a|0| + b$. Finalement, y est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $(A_1, B_1) \in \mathbb{R}^2$, $y(0) = A_1 + B_1 - \dfrac{b}{4}$, $\forall x > 0,\ y(x) = A_1e^{2x} + B_1e^{-2x} - \dfrac{ax+b}{4}$ et $\forall x < 0,\ y(x) = \Big(A_1 - \dfrac{a}{8}\Big)e^{2x} + \Big(B_1 + \dfrac{a}{8}\Big)e^{-2x} + \dfrac{ax-b}{4}$.

b. Si une solution y de (E) sur $\mathbb{R}$ a l'expression ci-dessus, pour que y admette une asymptote en $+\infty$, il est clair qu'il est nécessaire et suffisant qu'on ait $A_1 = 0$ et pour que y admette une asymptote en $-\infty$, il est nécessaire et suffisant qu'on ait $B_1 + \dfrac{a}{8} = 0$. Ainsi, la fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y(0) = -\dfrac{a}{8} - \dfrac{b}{4}$, $\forall x > 0,\ y(x) = -\dfrac{a}{8}e^{-2x} - \dfrac{ax+b}{4}$ et $\forall x < 0,\ y(x) = -\dfrac{a}{8}e^{2x} + \dfrac{ax-b}{4}$ est l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$ dont le graphe possède des asymptotes en $\pm\infty$, respectivement les droites d'équations $y = -\dfrac{ax+b}{4}$ et $y = \dfrac{ax-b}{4}$.

135 **a.** Par opérations, la fonction f est de classe C^2 (et même C^∞) sur l'ouvert $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Comme $\forall (x,y) \in D,\ |f(x,y)| \leqslant |xy|\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |x||y| \leqslant ||(x,y)||_2^2$ et que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} ||(x,y)||_2 = 0$, par encadrement, on trouve $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ et f est aussi continue en $(0,0)$. Par conséquent, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0$ en revenant à la définition et, par un calcul brutal, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{x(y^4 + 4x^2y^2 - x^4)}{(x^2+y^2)^2}$. Le second calcul n'était pas nécessaire puisque $f(x,y) = -f(y,x)$ (1) donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(y,x)$ en dérivant (1) par rapport à x avec la règle de la chaîne.

c. De même, les fonctions rationnelles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur l'ouvert D par opérations. De plus, $\forall (x,y) \in D,\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant \dfrac{|y|(2x^4 + 4x^2y^2 + 2y^4)}{(x^2+y^2)^2} = 2|y| \leqslant 2||(x,y)||_2$ et, comme en **a.**, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est aussi continue en $(0,0)$. Comme $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(y,x)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est aussi continue en $(0,0)$.

Ainsi, par définition, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

d. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{t} = 1$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = -1$. On peut aussi calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = 0$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,t) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = 0$. Par contraposée du théorème de SCHWARZ, f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ car $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

136 **a.** La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ par opérations et $\forall x < 0,\ g'(x) = e^{1/x} - \dfrac{e^{1/x}}{x} + e^x > 0$ donc g strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_-^*$. Or $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = 1$ donc, par le théorème de la bijection, g réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_-^*$ dans $]-\infty;1[$. Comme $g(-1) = -e^{-1} + e^{-1} = 0$ et que g est une bijection $\mathbb{R}_-^*$ dans $]-\infty;1[$, le seul réel x strictement négatif tel que $(x) = 0$ est $x = -1$. Or $g(x) = 0$ est impossible si $x \geqslant 0$ donc, pour un réel $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0 \iff x = -1$.

b. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ par opérations et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^y + ye^x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^y + e^x$. Ainsi, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x,y) = (0,0) \iff (e^y + ye^x = xe^y + e^x = 0) \iff (xy - 1 = xe^{-1/x} + e^x = 0) \iff x = y = -1$ d'après la question **a.**. Le seul point critique de f sur $\mathbb{R}^2$ est donc le point $(-1,-1)$.

c. Comme $\mathbb{R}^2$ est un ouvert, si f admet un extremum local, c'est en un point critique, donc en $(-1,-1)$. Comme f est aussi de classe C^2 par opérations sur $\mathbb{R}^2$, on calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = ye^x$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = xe^y$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = e^x + e^y$, donc la hessienne de f en $(-1,-1)$ est $e^{-1}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont e^{-1} et $-3e^{-1}$ de signes stricts opposés donc f admet en $(-1,-1)$ un point selle. f ne possède donc aucun extremum local, et a fortiori aucun extremum absolu. De plus, $f(x,1) = ex + e^x$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x,1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,1) = +\infty$ donc f n'est ni minorée, ni majorée.