

DEVOIR 01 : RÉVISIONS

PSI 1 2026-2027

mercredi 02 septembre 2026

QCM

1 Trigonométrie des angles doubles

1.1 $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$

1.3 $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

1.2 $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$

1.4 $\forall x \in \mathbb{R}, x \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \implies \cos(2x) = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

2 Croissances comparées : soit $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$

2.1 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0$ **2.2** $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-\beta x} = 0$ **2.3** $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ **2.4** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh}(x)}{e^x} = 1$

3 Développements limités classiques

3.1 $\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$ **3.3** $e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$

3.2 $\ln(1+x) \underset{0}{=} x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + o(x^n)$ **3.4** $\sqrt[3]{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + o(x^2)$

4 Circulaires réciproques et hyperboliques

4.1 $\forall x \in \mathbb{R}^*, \left(\operatorname{Arccos} \left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)} \right) \right)' = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$ **4.3** $\forall x \in [-1; 1], \operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}$

4.2 $\forall x \in \mathbb{R}, \left(\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) \right)' = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$ **4.4** $\forall x \in [-1; 1], \operatorname{Arcsin}'(x) + \operatorname{Arccos}'(x) = 0$

Définition Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et un réel $a \in \mathbb{R}$. Traduire “ f est continue en a ” avec des quantificateurs.

Énoncé Donner un énoncé complet, avec les hypothèses minimales, du théorème de ROLLE.

Exercice 1 Montrer que $\forall x \in [-1; 1], f(x) = \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arccos}(-x) = \pi$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\forall x \in \mathbb{R}, -1 < f'(x) < 0$.

- Que peut-on dire des limites éventuelles de f en $\pm\infty$?
- Montrer que $g : x \mapsto x - f(x)$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- Montrer qu'il existe un unique $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(\ell) = \ell$.

Soit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

d. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| < |u_0 - \ell| = \alpha$. Indication : $u_{n+1} - \ell = f(u_n) - f(\ell)$.

e. Justifier l'existence de $k = \max_{x \in [\ell - \alpha; \ell + \alpha]} |f'(x)|$. Montrer que $k < 1$.

f. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

DEVOIR 01	NOM :	PRÉNOM :
-----------	-------	----------

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question i,j vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

i · j	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Définition

Énoncé

Exercice 1

Exercise 2

i · j	1	2	3	4	Fautes
1	X			X	
2	X		X		
3	X			X	
4		X	X		

1.1 Vrai : $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x$ **1.2** Faux : $\cos(2x) = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2(x) - 1$

1.3 Faux : formule correcte mais pas pour tous les réels **1.4** Vrai : la formule est classique et les x convenables.

2.1 Vrai : du cours **2.2** Faux : vrai si $\beta > 0$ **2.3** Vrai : $\sin'(0) = 1$ **2.4** Faux : $\frac{\text{sh}(x)}{e^x} = \frac{1 - e^{-2x}}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$.

3.1 Vrai : cours et sin impaire **3.2** Faux : il y a des $-$ **3.3** Faux : il manque $\frac{x^4}{24}$ **3.4** Vrai : $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{-2}{3} \right) = -\frac{1}{9}$.

4.1 Faux : Arcsin et Arccos non dérivables en ± 1 **4.2** Vrai : $(\text{Arctan}(\text{sh}(x)))' = \frac{\text{sh}'(x)}{1 + \text{sh}^2(x)} = \frac{\text{ch}(x)}{\text{ch}^2(x)}$ **4.3**

Vrai : du cours **4.4** Faux : $\left(\text{Arccos} \left(\frac{1}{\text{ch}(x)} \right) \right)' = -\frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}^2(x)} \times \left(-\frac{\text{ch}(x)}{\sqrt{\text{ch}^2(x) - 1}} \right) = \frac{\text{sgn}(x)}{\text{ch}(x)}$.

Définition La fonction f est continue en a si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x - a| \leq \alpha \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.

Énoncé Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a < b$ deux réels de I . Si f est continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$ et si $f(a) = f(b)$, alors il existe un réel $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 1 $f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $] -1; 1[$ et $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + (-1) \times \left(-\frac{1}{\sqrt{1-(-x)^2}} \right) = 0$

donc f est constante sur l'intervalle $] -1; 1[$ où elle vaut $f(0) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$. Comme f est clairement paire et que $f(1) = \pi + 0 = \pi$, on a $\forall x \in [-1; 1], \text{Arccos } x + \text{Arccos}(-x) = \pi$.

Exercice 2 **a.** Comme $f' < 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par hypothèse, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de la limite monotone, f admet une limite finie en $-\infty$ si f est majorée et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ sinon. De même, f admet une limite finie en $+\infty$ si f est minorée et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ sinon.

b. Comme $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 1 - f'(x) > 0$, la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle y est injective. De plus, avec la question précédente, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$. Ainsi g est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par le théorème des valeurs intermédiaires car g est continue. Par conséquent, avec ce qui précède ou directement avec le théorème de la bijection continue, g est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

c. Comme $0 \in \mathbb{R}$, il existe un unique $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $g(\ell) = \ell - f(\ell) = 0$, c'est-à-dire $\exists! \ell \in \mathbb{R}, f(\ell) = \ell$.

d. Par l'égalité des accroissements finis, comme $u_{n+1} - \ell = f(u_n) - f(\ell)$ et que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $c_n \in]u_n; \ell[$ tel que $u_{n+1} - \ell = f'(c_n)(u_n - \ell)$ donc $|u_{n+1} - \ell| < |u_n - \ell|$ car $|f'(c_n)| < 1$.

e. Comme $|f'|$ est continue sur le segment $K = [\ell - \alpha; \ell + \alpha]$, elle y est bornée et y atteint ses bornes donc il existe $a \in K$ tel que $|f'(a)| = \max_{x \in K} |f'(x)| = k$. Ainsi, k existe et $k = |f'(a)| < 1$ par hypothèse.

f. On a bien $|u_0 - \ell| = k^0 |u_0 - \ell| \leq k^0 |u_0 - \ell|$ (initialisation). Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$, alors par l'inégalité des accroissements finis car f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, avec la définition de k , on a $|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq \sup_{x \in]u_n; \ell[} |f'(x)| \times |u_n - \ell|$ et $\sup_{x \in]u_n; \ell[} |f'(x)| \leq k$ car $]u_n; \ell[\subset [\ell - \alpha; \ell + \alpha]$. Ainsi, $|u_{n+1} - \ell| \leq k \times (k^n |u_0 - \ell|) = k^{n+1} |u_0 - \ell|$ (hérédité). Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0$ car $|k| < 1$, on obtient par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.