

DEVOIR 02 : INTÉGRALES

PSI 1 2026-2027

mercredi 09 septembre 2026

QCM

1 Continuité par morceaux : soit $f, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a; b]$.

1.1 $\exp(f)$ est continue par morceaux sur $[a; b]$ **1.3** $|f|$ est continue par morceaux sur $[a; b]$

1.2 $\tan(f)$ est continue par morceaux sur $[a; b]$ **1.4** $[f + g]$ est continue par morceaux sur $[a; b]$

2 Égalités et inégalités classiques : soit $a < b$ et $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues

2.1 $\int_a^b fg = \left(\int_a^b f \right) \times \left(\int_a^b g \right)$

2.3 $\int_a^b fg \leq \|f\|_{\infty, [a; b]} \int_a^b |g|$

2.2 $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

2.4 $\int_a^b f = 0 \implies f = 0$

3 Propriétés ; soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue et on note $\|f\|_{\infty} = \max_{[0; 1]} |f|$

3.1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt$

3.3 $\int_0^1 f(t) dt = 0 \implies f = 0$

3.2 $\forall x \in [0; 1], \left(\int_x^{x^2} f(t) dt \right)' = f(x^2) - f(x)$

3.4 $\int_0^1 tf(t) dt \leq \frac{1}{2} \|f\|_{\infty}$

4 Petit et grand O, équivalents

4.1 $\frac{\ln(x)}{x^2 - 1} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} 1$

4.3 $\ln(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

4.2 $\frac{\ln(x)}{x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$

4.4 $\ln(1 + e^x) - x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Énoncé Formule de TAYLOR reste intégral avec $f : \widetilde{[a; b]} \rightarrow \mathbb{K}$ de classe C^{n+1} , on a alors :

Compléter la formule : $f(b) = f(a) + \dots$

Preuve Pour $f, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux telles que $\int_a^b f^2(t) dt > 0$ et $\int_a^b g^2(t) dt > 0$, montrer

l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ $\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt}$.

Exercice 1 Montrer l'existence et déterminer la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ où $f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

Indication : on pourra encadrer $f(x)$ ou utiliser un équivalent de $\frac{e^{-t}}{t}$ en 0^+ .

Exercice 2 Justifier l'existence de $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$. Effectuer le changement de variable $x = \pi - t$ pour exprimer I en fonction de $J = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$. En déduire la valeur exacte de I en fonction de π .

DEVOIR 02	NOM :	PRÉNOM :
-----------	-------	----------

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question i,j vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

i · j	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Preuve

Énoncé

Exercice 1

Exercice 2

i · j	1	2	3	4	Fautes
1	X		X		
2		X	X		
3	X		X	X	
4			X	X	

1.1 Vrai : $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc les limites et la continuité se conservent **1.2** Faux : $f = \text{id}$ sur $[0; \pi/2[$ et $f(\pi/2) = 0$ **1.3** Vrai : $x \mapsto |x|$ est aussi continue sur $\mathbb{R}$ **1.4** Faux : $f = g : x \mapsto x \sin(1/x)$ sur $]0; 1]$ avec $f(0) = g(0) = 0$, alors $[f + g]$ n'admet pas de limite en 0.

2.1 Faux : par exemple pour $f = g = 1$ si $b - a \neq 1$ **2.2** Vrai : linéarité de l'intégrale **2.3** Vrai : car $\int_a^b fg \leq \left| \int_a^b fg \right|$ puis inégalité triangulaire sur les intégrales (car $a < b$) **2.4** Faux : on n'a rien imposé sur le signe de f ; par exemple si $a = -1$, $b = 1$ et $f : x \mapsto x$.

3.1 Vrai : sommes de RIEMANN **3.2** Faux : c'est $\left(\int_x^{x^2} f(t) dt \right)' = 2xf(x^2) - f(x)$ **3.3** Vrai : du cours **3.4** Vrai : $\int_0^1 tf(t) dt \leq \|f\|_\infty \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} \|f\|_\infty$ (inégalité triangulaire sur les intégrales).

4.1 Faux : $\frac{\ln(x)}{x^2 - 1} = \frac{\ln(1 + (x-1))}{x-1} \times \frac{1}{1+x} \sim \frac{1}{2}$ **4.2** Faux : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$, par contre $\frac{\ln(x)}{x^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$

4.3 Vrai : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(x) = 0$ **4.4** Vrai : $\ln(1 + e^x) - x = \ln(1 + e^{-x}) \underset{+\infty}{\sim} e^{-x} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Énoncé Avec $f : [\widetilde{a}; b] \rightarrow \mathbb{K}$ de classe C^{n+1} , on a alors :

$$f(b) = f(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Preuve Soit $\varphi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \int_a^b (f(t) + xg(t))^2 dt$ (bien définie car $f + xg$ est continue par

morceaux sur le segment $[a; b]$). Par linéarité de l'intégrale, $\varphi(x) = Ax^2 + 2BX + C$ avec $A = \int_a^b g^2(t) dt$,

$B = \int_a^b f(t)g(t) dt$ et $C = \int_a^b f^2(t) dt$. φ est polynomiale de degré 2 et positive (par positivité de l'intégrale)

donc le discriminant $\Delta = 4B^2 - 4AC$ de φ est négatif, d'où $\left(\int_a^b f(t)g(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t) dt \right) \times \left(\int_a^b g^2(t) dt \right)$.

Comme $u \mapsto \sqrt{u}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a bien $\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt}$.

Exercice 1 La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur le segment $[x; 2x]$ donc $f(x)$ existe pour $x > 0$. $t \mapsto e^{-t}$ est

décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, si $x > 0$, $\forall t \in [x; 2x]$, $\frac{e^{-2x}}{t} \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{e^{-x}}{t}$. Par croissance de l'intégrale car $x < 2x$,

$$\int_x^{2x} \frac{e^{-2x}}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^{-x}}{t} dt \text{ donc } e^{-2x} \ln(2) \leq f(x) \leq e^{-x} \ln(2) \text{ car } \int_x^{2x} \frac{dt}{t} = [\ln(t)]_x^{2x} = \ln(2).$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-2x} \ln(2) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} \ln(2) = \ln(2)$, par encadrement, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \ln(2)$.

Exercice 2 $x \mapsto \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}$ est continue sur le segment $[0; \pi]$: I existe. En posant $x = \varphi(t) = \pi - t$,

$$I = \int_\pi^0 \frac{(\pi - t) \sin(\pi - t)}{1 + \cos(\pi - t)^2} (-1) dt = \int_0^\pi \frac{(\pi - x) \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx = \pi J - I \text{ car } \varphi \text{ est } C^1 \text{ strictement décroissante et}$$

bijjective de $[0; \pi]$ dans $[0; \pi]$. D'où $I = \frac{\pi}{2} J$ et $J = \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \left[-\text{Arctan}(\cos x) \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} : I = \frac{\pi^2}{4}$.