

PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 01

PSI 1 2026-2027

du lundi 14/09 au vendredi 18/09

1 Intégrales sur un segment :

- révisions de sup sur l'intégrale sur un segment des fonctions continues, égalité et inégalités classiques ;
- relations entre intégrales et primitives, théorème fondamental de l'intégration ;
- intégration par parties, TAYLOR reste intégral, changement de variable, sommes de RIEMANN ;
- définition des fonctions continues par morceaux sur un segment puis sur un intervalle ;
- généralisation de l'intégrale aux fonctions continues par morceaux à valeurs complexes sur un segment ;

2 Intégrales convergentes et divergentes : $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ avec I intervalle et f continue par morceaux sur I

- définition de la convergence de $\int_{[a;b[} f$ (resp. $\int_{]a;b]} f$) par l'existence d'une limite finie de $\int_a^x f$ (resp. $\int_x^b f$) quand x tend vers b (resp. vers a) : définition de la valeur de l'intégrale dans ce cas ;
- définition de la convergence de $\int_{]a;b[} f$ par l'existence de $\int_{]a;c]} f$ et de $\int_{[c;b[} f$ pour un certain $c \in]a;b[$: indépendance de cette définition par rapport à c et définition de la valeur de l'intégrale dans ce cas ;
- cas particulier des fonctions positives en bornant une "primitive" ;
- convergence des intégrales de référence : $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ et $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$ selon α et λ ;
- Si $f \in C^0([a; b], \mathbb{K})$ et $\varphi :]\alpha; \beta[\rightarrow]a; b[$ bijection strictement croissante de classe C^1 alors $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_\alpha^\beta f \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt$ sont de même nature et $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt$; calcul en pratique ;
- Si $f, g :]a; b[\rightarrow \mathbb{K}$ de classe C^1 et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow b} f(x)g(x)$ existent et sont finies, $\int_a^b f'(x)g(x)dx$ et $\int_a^b f(x)g'(x)dx$ sont de même nature et $\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$; pratique ;

3 Fonctions intégrables :

- si $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux, on dit que $\int_I f$ converge absolument si $\int_I |f|$ converge ;
- l'absolue convergence d'une intégrale implique sa convergence et inégalité triangulaire associée ;
- on dit que $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux est intégrable si $\int_I f$ est absolument convergente ;
- théorème de comparaison : par $\sim$, O , o , majoration, minoration ;

QUESTIONS DE COURS :

- 1 définir ce qu'est une fonction continue par morceaux sur un intervalle (déf. 1.3 et 1.4)
- 2 définir la convergence de $\int_a^b f(t)dt$ si $f :]a;b[\rightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux (déf. 1.10)
- 3 énoncer l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ sur les intégrales (prop. 1.2, th. 1.3, prop. 1.34)
- 4 énoncer la formule de TAYLOR reste intégral (th. 1.10)
- 5 énoncer le théorème de changement de variable sur des intervalles ouverts (th. 1.26)
- 6 énoncer le théorème d'intégration par parties sur des intervalles ouverts (th. 1.27)
- 7 énoncer le théorème de comparaison concernant l'intégrabilité (th. 1.30)
- 8 prouver que pour f continue sur I , $u, v : J \rightarrow I$ dérivables, $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ est dérivable (prop. 1.7)
- 9 prouver que si f est continue sur $[a; b[$ et si $\int_a^b f$ converge, alors $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_x^b f(t)dt = 0$ (prop. 1.19)
- 10 prouver que si f et g sont continues sur I et si $\int_I f CV$ et $\int_I g DV$, alors $\int_I (f+g) DV$ (th. 1.25)

Prévision pour la prochaine semaine : tout sur les intégrales