

DEVOIR MAISON 1 : BEAU GAUSS

PSI 1 2026/2027

pour le jeudi 10 septembre 2026

PARTIE 1 : WALLIS

1.1.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : \theta \mapsto \sin^n(\theta)$ est continue sur le segment $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc I_n est bien

défini. On a $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = [-\cos(\theta)]_0^{\pi/2} = 1$ et $I_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta = \left[\frac{2\theta - \sin(2\theta)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$.

1.1.2 Comme f_n est positive, continue et pas identiquement nulle, d'après le cours, $I_n > 0$. Or $f_{n+1} \leq f_n$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $I_{n+1} \leq I_n$ par croissance de l'intégrale. De plus, $I_n - I_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^n(\theta)(1 - \sin(\theta)) d\theta$ et la fonction $\theta \mapsto \sin^n(\theta)(1 - \sin(\theta))$ est continue, positive et pas identiquement nulle sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc, comme avant, $I_n - I_{n+1} > 0$. Ainsi, la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est strictement décroissante.

1.2.1 Pour $n \in \mathbb{N}$, on décompose $I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} (\sin(\theta)) \times (\sin^{n+1}(\theta)) d\theta$. Les deux fonctions $u : \theta \mapsto -\cos(\theta)$ et $v : \theta \mapsto \sin^{n+1}(\theta)$ sont de classe C^1 sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et, par intégration par parties, on parvient à la relation $I_{n+2} = [-\cos(\theta)(\sin(\theta))^{n+1}]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^2(\theta) \sin^n(\theta) d\theta$. Comme $\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta)$, par linéarité de l'intégrale, $I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})$ donc $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

1.2.2 D'après 1.1.2 et 1.2.1, $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$ donc $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$. Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$.

1.3.1 Posons $u_n = (n+1)I_n I_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} = (n+2)I_{n+1} I_{n+2} = (n+1)I_{n+1} I_n$ d'après 1.2.1. Ainsi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. Comme $u_0 = 1 \cdot \frac{\pi}{2}$, il vient $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.

1.3.2 Comme en 1.2.2, pour $n \geq 1$, on a $I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$ donc $\frac{\pi}{2(n+1)} = I_n I_{n+1} \leq I_n^2 \leq I_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2n}$. Ainsi, comme $I_n \geq 0$, $\sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \leq I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. Par encadrement, $I_n \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ car $\sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

1.4 Pour $k \in \mathbb{N}$, $I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = \frac{2k-1}{2k} \times \dots \times \frac{1}{2} I_0$ (par récurrence). Ainsi, en rajoutant les termes pairs

qui manquent au numérateur, on trouve $I_{2k} = \frac{(2k)! I_0}{(2k)^2 \dots 2^2} = \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2^{2k+1}} \binom{2k}{k}$.

De même, si $k \geq 0$, $I_{2k+1} = \frac{\pi}{2(2k+1)I_{2k}}$ d'après 1.3.1 donc $I_{2k+1} = \frac{2^{2k} (k!)^2}{(2k+1)!}$.

PARTIE 2 : DÉFINITION ET CALCUL DE $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

2.1 Comme $h : t \mapsto e^{-t^2}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$, le théorème fondamental de l'intégration nous permet d'affirmer que H est bien définie et C^∞ sur $\mathbb{R}_+$, c'est l'unique primitive de h sur $\mathbb{R}_+$ qui s'annule en 0.

Ainsi $H' = h > 0$ donc H est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.

2.2 Soit $A \geq 1$, comme $\forall t \geq 1, e^{-t^2} \leq e^{-t}$ et que $\forall t \in [0; 1], e^{-t^2} \leq 1$, on a par la relation de CHASLES la

minoration
$$H(A) = \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^A e^{-t^2} dt \leq 1 + \int_1^A e^{-t} dt = 1 + [-e^{-t}]_1^A = 1 + \frac{1}{e} - e^{-A} \leq 1 + \frac{1}{e}.$$

2.3 La fonction croissante H est majorée par $1 + \frac{1}{e}$ d'après 2.2 donc elle admet une limite finie en $+\infty$ d'après

le théorème de la limite monotone. On note
$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} H(A) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-t^2} dt = I.$$

2.4.1 Soit $b :]-1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $b(x) = x - \ln(1+x)$. Alors b est dérivable sur $] -1; +\infty[$ et $b'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$ donc b est décroissante sur $] -1; 0]$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Or $b(0) = 0$ donc b est positive ce qui donne bien $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$. On peut aussi dire que $m : x \mapsto \ln(1+x)$ est concave sur $] -1; +\infty[$ car elle y est deux fois dérivable et que $\forall x > 0, m''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \leq 0$ donc sa courbe est en

dessous de ses tangentes, notamment en 0, d'où
$$\forall x > -1, m(x) = \ln(1+x) \leq x = m'(0)(x-0) + m(0).$$

2.4.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0; \sqrt{n}]$, en posant $x = \frac{t^2}{n} \in [0; 1] \subset]-1; +\infty[$, d'après 2.4.1, $\ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \leq \frac{t^2}{n}$.

Comme $n > 0$ et $\exp$ croissante, $e^{-t^2} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n}$. Si $t = \sqrt{n}$, $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2}$ est claire ($0 \leq e^{-n}$). Si

$t \in [0; \sqrt{n}[$, avec $x = -\frac{t^2}{n} \in]-1; 0[\subset]-1; +\infty[$ et, d'après 2.4.1, $\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq -\frac{t^2}{n}$. Comme $n > 0$ et $\exp$

croissante à nouveau, $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2}$. Ainsi,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0; \sqrt{n}], \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n}.$$

2.5.1 $t \mapsto \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n$ est continue sur $[0; \sqrt{n}]$ et $\varphi_n : \theta \mapsto \sqrt{n} \cos(\theta)$ est de classe C^1 de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ dans $[0; \sqrt{n}]$.

En posant $t = \varphi(\theta)$, on a
$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_{\pi/2}^0 (1 - \cos^2(\theta))^n (-\sqrt{n} \sin(\theta)) d\theta = \sqrt{n} I_{2n+1}.$$

2.5.2 $t \mapsto \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$ est continue sur $[0; \sqrt{n}]$ et $\psi_n : \theta \mapsto \sqrt{n} \cotan(\theta)$ est C^1 de $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ dans $[0; \sqrt{n}]$. On

obtient
$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \int_{\pi/2}^{\pi/4} \sin^{2n}(\theta) \times \left(\frac{-\sqrt{n}}{\sin^2(\theta)}\right) d\theta = \sqrt{n} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{2n-2}(\theta) d\theta \leq \sqrt{n} I_{2n-2}$$
 car

$\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right] \subset [0; \frac{\pi}{2}]$ en posant $t = \psi_n(\theta)$ car $\cotan'(\theta) = -\sin^{-2}(\theta)$.

2.6.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on intègre la double inégalité de la question 2.4.2 sur le segment $[0; \sqrt{n}]$ et on a l'encadrement $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n} dt$ par croissance de l'intégrale. Grâce

aux questions 2.5.1 et 2.5.2, on obtient donc

$$\boxed{\sqrt{n} I_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt = H(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n} I_{2n-2}.}$$

2.6.2 Or, d'après 1.3.2, on a $I_{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$ et $I_{2n-2} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n-2)}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$ aussi. Par

conséquent $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} I_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} I_{2n-2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Par encadrement, on a donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\sqrt{n}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

2.7 Comme on sait avec 2.3 que $\lim_{A \rightarrow +\infty} H(A)$ existe et vaut I , par caractérisation séquentielle de la limite et com-

posée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\sqrt{n}) = I$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$. Ainsi, par unicité de la limite,

$$\boxed{I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

PARTIE 3 : AUTRE MÉTHODE

3.1.1 On applique l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE à $f = \exp$ de classe C^2 entre u et v à l'ordre 1. Si

$(u, v) \in]-\infty; 1]^2$, puisque $f'(u) = e^u$ et $\text{Max}_{[u, v]} |f''| = \text{Max}(e^u, e^v) \leq e$,

$$\boxed{|e^v - e^u - e^u(v - u)| \leq e \frac{(v - u)^2}{2}.}$$

3.1.2 Avec 3.1.1, si $x \in \mathbb{R}_+$, $h \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, $t \in [0; 1]$, $u = -x(1+t^2) \in]-\infty; 1]$ et $v = -(x+h)(1+t^2) \in]-\infty; 1]$,

comme $v - u = -h(1+t^2)$: $|e^{-(x+h)(1+t^2)} - e^{-x(1+t^2)} + h(1+t^2)e^{-x(1+t^2)}| \leq e \frac{h^2(1+t^2)}{2}$. Mais comme

$1+t^2 \leq 2$, on obtient bien

$$\boxed{|e^{-(x+h)(1+t^2)} - e^{-x(1+t^2)} + h(1+t^2)e^{-x(1+t^2)}| \leq 2eh^2.}$$

3.2.1 Pour $x \geq 0$, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue sur le segment $[0; 1]$ donc

$$\boxed{\varphi(x) \text{ est bien défini.}}$$

3.2.2 Si $x \in \mathbb{R}_+$ et $h \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$ tel que $x+h \geq 0$, par linéarité de l'intégrale et inégalité de la moyenne, on

a $\left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} + \int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_0^1 \left| \frac{e^{-(x+h)(1+t^2)} - e^{-x(1+t^2)} + h(1+t^2)e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \right| dt$. Grâce

à la question 3.1.2, on a donc

$$\boxed{\left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} + \int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt \right| \leq \int_0^1 2e|h| dt = 2e|h|.}$$

3.2.3 Comme $\lim_{h \rightarrow 0} 2e|h| = 0$, en faisant tendre h vers 0^+ dans l'inégalité de la question précédente, on prouve

par encadrement la dérivabilité de φ en $x \in \mathbb{R}_+$ et

$$\boxed{\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \varphi'(x) = - \int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt.}$$

3.3.1 Comme $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, $w : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ par le théorème

fondamental de l'intégration. $f = w^2$ est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall x \geq 0, f'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Comme $g(x) = \varphi(x^2)$, par composée, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$g'(x) = 2x\varphi'(x^2) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt.$$

3.3.2 Si $x > 0$, $g'(x) = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt$ et on pose $t = \psi(u) = \frac{u}{x}$ avec ψ de classe C^1 de $[0; x]$ dans $[0; 1]$

ce qui, par changement de variable, donne

$$g'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (\text{variables}$$

muettes). Comme $g'(0) = 0$, cette relation est universellement vraie sur $\mathbb{R}_+$.

3.3.3 Soit $x \geq 0$, comme $\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \geq 0$, il est clair que $g(x) \geq 0$. De plus, puisque $e^{-x^2 t^2} \leq 1$, on a

$$g(x) = e^{-x^2} \int_0^1 \frac{e^{-x^2 t^2}}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+t^2} dt = \frac{\pi e^{-x^2}}{4} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \quad \text{en encadrant car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi e^{-x^2}}{4} = 0.$$

3.4.1 Pour $x \in \mathbb{R}_+$, $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt - 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$ d'après 3.3.1 et 3.3.2

donc $f+g$ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$. Comme $f(0) = 0$ et $g(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$, on a

$$\text{donc} \quad \forall x \geq 0, f(x) + g(x) = f(0) + g(0) = \frac{\pi}{4}.$$

3.4.2 D'après la question 3.3.3, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ or $f(x) = \frac{\pi}{4} - g(x)$ donc, par soustraction : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$.

$$\text{Ainsi, comme} \quad \int_0^x e^{-t^2} dt = \sqrt{f(x)}, \text{ on a} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Cette intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$, dite de GAUSS, est célèbre, et sa valeur est donc $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Ainsi,

par parité, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$, et avec le changement de variable $u = \sqrt{2}t$, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi}$

et enfin $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} du = 1$. Cette dernière intégrale permet de définir la loi normale standard $\mathcal{N}(0, 1)$ (ou

loi gaussienne ou loi de LAPLACE-GAUSS ou loi normale centrée réduite), c'est une loi à densité sur $\mathbb{R}$ et une variable aléatoire X suit cette loi si $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b \implies \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} du$. Cette loi

est essentielle en probabilités grâce au théorème central limite.