

# DEVOIR 03 : INTÉGRALES

PSI 1 2026-2027

mercredi 16 septembre 2026

## QCM

**1** Convergence : soit  $f, g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  continues par morceaux (CV pour converge et DV pour diverge)

**1.1**  $(\int_0^{+\infty} f \text{ DV et } \int_0^{+\infty} g \text{ CV}) \implies \int_0^{+\infty} (f+g) \text{ DV}$

**1.3**  $\int_0^{+\infty} f \text{ DV} \implies \int_1^{+\infty} f \text{ DV}$

**1.2**  $(\int_0^{+\infty} f \text{ CV et } \int_0^{+\infty} g \text{ CV}) \implies \int_0^{+\infty} fg \text{ CV}$

**1.4**  $\int_0^{+\infty} f \text{ CV} \iff \int_0^1 f \text{ CV}$

**2** Convergence d'intégrale et intégrabilité : soit  $f, g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  continues par morceaux

**2.1**  $f \sim_{+\infty} g \implies (\int_0^{+\infty} f \text{ et } \int_0^{+\infty} g \text{ de même nature})$  **2.3**  $(f \leq g \text{ et } \int_0^{+\infty} f \text{ diverge}) \implies \int_0^{+\infty} g \text{ diverge}$

**2.2**  $f \text{ intégrable sur } \mathbb{R}_+ \implies \int_0^{+\infty} f \text{ converge}$

**2.4**  $(f = O(g) \text{ et } g \text{ intégr. sur } \mathbb{R}_+) \implies \int_0^{+\infty} f \text{ converge}$

**3** Critère de RIEMANN : soit  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux

**3.1**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0 \implies f \text{ intégrable sur } \mathbb{R}_+$  **3.3**  $(\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2f(x) = 0) \implies \int_0^{+\infty} f \text{ converge}$

**3.2**  $f \text{ intégrable sur } \mathbb{R}_+ \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  **3.4**  $(\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3f(x) = 1 \text{ ou } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}f(x) = +\infty) \implies \int_0^{+\infty} f \text{ diverge}$

**4** Borne amovible : soit  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $\int_0^{+\infty} f$  converge ; on pose  $F(x) = \int_0^x f$  pour  $x \geq 0$

**4.1**  $F$  est continue en 0

**4.3**  $F$  est bornée sur  $\mathbb{R}_+$

**4.2**  $F$  est dérivable en 0

**4.4**  $\forall x > 0, F'(x) = f(x)$

**Énoncé** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $f_\alpha : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie par  $\forall x > 0, f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ .

Donner des conditions nécessaires et suffisantes de convergence de  $\int_1^{+\infty} f_\alpha$ , puis de  $\int_0^1 f_\alpha$ .

**Preuve** Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  continue et telle que  $\int_0^{+\infty} f$  converge. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} f = 0$ .

**Exercice 1** Par intégration par parties, montrer que  $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$  converge et calculer sa valeur.

**Exercice 2** Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\alpha \geq \beta$ . On définit  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$  par  $f(t) = \frac{1}{t^\alpha + t^\beta}$ .

a. Déterminer des équivalents simples de  $f(t)$  quand  $t$  tend vers  $0^+$  puis quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .

b. En déduire pour quelles valeurs de  $(\alpha, \beta)$  la fonction  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

|           |       |          |
|-----------|-------|----------|
| DEVOIR 03 | NOM : | PRÉNOM : |
|-----------|-------|----------|

**QCM** Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question i,j vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

| i · j | 1 | 2 | 3 | 4 | Fautes |
|-------|---|---|---|---|--------|
| 1     |   |   |   |   |        |
| 2     |   |   |   |   |        |
| 3     |   |   |   |   |        |
| 4     |   |   |   |   |        |

**Énoncé**

**Preuve**

**Exercice 1**

|                   |
|-------------------|
| <b>Exercice 2</b> |
|-------------------|

| i · j | 1 | 2 | 3 | 4 | Fautes |
|-------|---|---|---|---|--------|
| 1     | X |   |   |   |        |
| 2     |   | X |   | X |        |
| 3     |   |   | X | X |        |
| 4     | X |   | X | X |        |

**1.1** Vrai : par l'absurde, si  $\int_0^{+\infty} (f + g)$  convergeait, comme  $f = (f + g) - g$ , on aurait par somme  $\int_0^{+\infty} f$  convergente **1.2** Faux :  $f(t) = g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}$  par exemple **1.3** Faux : on pourrait avoir  $\int_1^{+\infty} f$  convergente et  $\int_0^1 f$  divergente **1.4** Faux : c'est  $\int_0^{+\infty} f$  converge  $\iff (\int_0^1 f$  et  $\int_1^{+\infty} f$  convergent).

**2.1** Faux :  $\frac{\sin(x)}{\sqrt{x} + \sin(x)} \sim \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$  (voir cours) **2.2** Vrai : ACV  $\implies$  CV **2.3** Faux : on ne sait pas si  $f$  positive **2.4** Vrai : comparaison.

**3.1** Faux :  $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$  **3.2** Faux : exemple en cours **3.3** Vrai :  $f(x) = o(x^{-1/2})$  et  $f(x) = o(x^{-2})$

**3.4** Vrai :  $f(x) \geq \frac{1}{2x^3}$  localement donc  $\int_0^1 f(x)dx$  diverge ou  $f(x) \geq \frac{1}{\sqrt{x}}$  localement donc  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  diverge.

**4.1** Vrai : le reste d'une intégrale convergente tend vers 0 **4.2** Faux : on prend  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$  alors  $F(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$

**4.3** Vrai :  $F$  tend vers 0 en  $0^+$  et admet une limite finie en  $+\infty$  en étant continue, c'est classique ! **4.4** Vrai : il suffit d'écrire  $F(x) = \int_0^1 f + \int_1^x f$  est c'est le théorème fondamental de l'intégration.

**Énoncé** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $f_\alpha : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie par  $\forall x > 0, f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}$  :

$\int_1^{+\infty} f_\alpha$  converge  $\iff \alpha > 1$  et  $\int_0^1 f_\alpha$  converge  $\iff \alpha < 1$  (critère de RIEMANN).

**Preuve** Puisque  $\int_0^{+\infty} f$  converge,  $\int_x^{+\infty} f$  converge aussi si  $x \geq 0$ . En effet, il suffit de passer à la limite quand

$y$  tend vers  $+\infty$  dans la relation  $\int_0^y f = \int_0^x f + \int_x^y f$  (CHASLES) ce qui donne en plus  $\int_0^{+\infty} f = \int_0^x f + \int_x^{+\infty} f$ .

Ainsi,  $\int_x^{+\infty} f = \int_0^{+\infty} f - \int_0^x f$ . Par définition  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f = \int_0^{+\infty} f$ , on a donc l'existence et la valeur de la limite en  $+\infty$  de  $\int_x^{+\infty} f$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} f = \int_0^{+\infty} f - \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f = \int_0^{+\infty} f - \int_0^{+\infty} f = 0$ .

**Exercice 1** La fonction  $f : t \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Avec  $u = f$  et  $v(t) = t$ ,  $u$  et  $v$  sont de classe

$C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $u'(t) = -\frac{2}{t(1+t^2)}$ . Comme  $u(t) = \ln(1+t^2) - 2\ln(t) \underset{0}{\sim} -2\ln(t)$  et  $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln(t) = 0$ , on a

$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = 0$ . De plus,  $u(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$  donc  $u(t)v(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ . Le "crochet converge" donc

$\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$  et  $\int_0^{+\infty} \frac{2}{1+t^2} dt$  ont même nature et  $t \mapsto \frac{2}{1+t^2}$  admet pour primitive sur  $\mathbb{R}_+$  la fonction

$2 \operatorname{Arctan}$  qui a une limite finie en  $+\infty$ . Ainsi,  $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{1+t^2} = [2 \operatorname{Arctan}(t)]_0^{+\infty} = \pi$ .

**Exercice 2** La fonction  $f$  est bien continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**a.** • Si  $\alpha = \beta$ ,  $f(t) = \frac{1}{2t^\alpha}$  d'où  $f(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{2t^\alpha}$  et  $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2t^\alpha}$ . • Si  $\alpha > \beta$ ,  $f(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{t^\beta}$  et  $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$ .

**b.** Si  $\alpha = \beta$ ,  $f$  n'est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  pour aucune valeur de  $\alpha$  car  $f$  est non intégrable sur  $]0; 1]$  si  $\alpha \geq 1$  et  $f$  est non intégrable sur  $[1; +\infty[$  si  $\alpha \leq 1$  par le critère de RIEMANN.

Si  $\alpha > \beta$ , de même,  $f$  est intégrable sur  $]0; 1]$  ssi  $\beta < 1$  et  $f$  est intégrable sur  $[1; +\infty[$  ssi  $\alpha > 1$ .

Au final,  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  si et seulement si  $\beta < 1 < \alpha$ .