

PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 02

PSI 1 2026-2027

du lundi 21/09 au vendredi 25/09

1 Intégrales sur un segment : voir programme précédent

2 Intégrales convergentes et divergentes : $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ avec I intervalle et f continue par morceaux sur I

- définition de la convergence de $\int_{[a;b[} f$ (resp. $\int_{]a;b]} f$) par l'existence d'une limite finie de $\int_a^x f$ (resp. $\int_x^b f$) quand x tend vers b (resp. vers a) : définition de la valeur de l'intégrale dans ce cas ;
- définition de la convergence de $\int_{]a;b[} f$ par l'existence de $\int_{]a;c]} f$ et de $\int_{[c;b[} f$ pour un certain $c \in]a;b[$: indépendance de cette définition par rapport à c et définition de la valeur de l'intégrale dans ce cas ;
- cas particulier des fonctions positives en bornant une "primitive" ;
- convergence des intégrales de référence : $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ et $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$ selon α et λ ;
- Si $f \in C^0([a; b], \mathbb{K})$ et $\varphi :]\alpha; \beta[\rightarrow]a; b[$ bijection strictement croissante de classe C^1 alors $\int_a^b f(x) dx$ et $\int_\alpha^\beta f \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt$ sont de même nature et $\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt$; calcul en pratique ;
- Si $f, g :]a; b[\rightarrow \mathbb{K}$ de classe C^1 et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow b} f(x)g(x)$ existent et sont finies, $\int_a^b f'(x)g(x) dx$ et $\int_a^b f(x)g'(x) dx$ sont de même nature et $\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$; pratique ;

3 Fonctions intégrables :

- si $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux, on dit que $\int_I f$ converge absolument si $\int_I |f|$ converge ;
- l'absolue convergence d'une intégrale implique sa convergence et inégalité triangulaire associée ;
- on dit que $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux est intégrable si $\int_I f$ est absolument convergente ;
- CHASLES généralisé, caractérisation avec limite d'une "primitive" de $|f|$ aux bornes de l'intervalle ;
- théorème de comparaison : par $\sim$, O , o , majoration, minoration ;
- exemples d'intégrales convergentes associées à des fonctions non intégrables ;
- exemples de fonctions équivalentes dont les intégrales associées ne sont pas de même nature ;
- espaces $L^1(I, \mathbb{K})$, $L^2(I, \mathbb{K})$, produit scalaire sur les fonctions continues, inégalité de CAUCHY-SCHWARZ ;
- pratique de la comparaison série/intégrale : surtout le principe graphique général à utiliser pour toute fonction monotone pour l'obtention de convergences, de limites ou d'équivalents ;

QUESTIONS DE COURS :

- 1 définir ce qu'est une fonction continue par morceaux sur un intervalle (déf. 1.3 et 1.4)
- 2 définir la convergence de $\int_a^b f(t) dt$ si $f :]a; b[\rightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux (déf. 1.10)
- 3 énoncer l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ sur les intégrales (prop. 1.2, th. 1.3, prop. 1.34)
- 4 énoncer la formule de TAYLOR reste intégral (th. 1.10)
- 5 énoncer le théorème de changement de variable sur des intervalles ouverts (th. 1.26)
- 6 énoncer le théorème d'intégration par parties sur des intervalles ouverts (th. 1.27)
- 7 énoncer le théorème de comparaison concernant l'intégrabilité (th. 1.30)
- 8 prouver que si f et g sont continues sur I et si $\int_I f CV$ et $\int_I g DV$, alors $\int_I (f + g) DV$ (th. 1.25)
- 9 prouver que si $a \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha > 0$, alors $\int_1^{+\infty} \frac{e^{iat}}{t^\alpha} dt$ converge (exem. 1.36)
- 10 prouver que si f et g sont de carré intégrable sur I , alors fg est intégrable sur I (prop. 1.34)

Prévision pour la prochaine semaine : début de l'algèbre linéaire