

CHAPITRE 3

SÉRIES NUMÉRIQUES

PARTIE 3.1 : RÉVISIONS

3.1.1 : Généralités

DÉFINITION 3.1 :

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on dit que $\sum_{n \geq 0} u_n$ est une **série convergente** si, en posant $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ (somme partielle d'ordre n), la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est elle-même convergente. Sinon, $\sum_{n \geq 0} u_n$ est dite **divergente**.

Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, on définit sa **somme** $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ son **reste d'ordre n** .

PROPOSITION 3.1 :

Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$. De plus, $\forall n \geq -1$, $S = S_n + R_n$ avec $R_{-1} = S$ et $S_{-1} = 0$.

PROPOSITION 3.2 :

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{K}$, $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ les séries associées :

- (i) Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ CV : $\sum_{n \geq 0} (u_n + \lambda v_n)$ CV et $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
- (ii) Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ CV et $\sum_{n \geq 0} v_n$ DV : $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ DV.

REMARQUE 3.1 : On ne peut rien dire de la somme de deux séries divergentes.

PROPOSITION 3.3 :

Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

REMARQUE 3.2 : $\sum_{n \geq 0} u_n$ telle que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 est dite **grossièrement divergente**.

THÉORÈME ÉNORME 3.4 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on a l'équivalence : $((u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}) \iff (\sum_{n \geq 0} (u_{n+1} - u_n) \text{ converge})$.

PROPOSITION 3.5 :

$(\sum_{n \geq 0} u_n \text{ CV}) \iff (\sum_{n \geq 0} \operatorname{Re}(u_n) \text{ et } \sum_{n \geq 0} \operatorname{Im}(u_n) \text{ CV})$. Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(u_n)$.

PROPOSITION 3.6 :

Soit $a \in \mathbb{C}$, $\sum_{n \geq 0} a^n$ converge ssi $|a| < 1$. Dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a^k = \frac{a^{n+1}}{1-a}$.

3.1.2 : Séries à termes positifs

PROPOSITION 3.7 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs :

- (i) La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.
- (ii) Si c'est le cas : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} S_n$; sinon on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

REMARQUE 3.3 : • On a un résultat analogue pour les suites réelles à valeurs négatives.

- Cette équivalence est valable même si le terme général u_n n'est positif qu'à partir d'un certain rang n_0 : mais si la série converge on a seulement $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_{n \geq n_0} S_n$ et pas forcément $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} S_n$.

REMARQUE 3.4 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$: $\sum_{n \geq 0} f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

PROPOSITION 3.8 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, à propos des séries de RIEMANN : la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

REMARQUE FONDAMENTALE 3.5 : • **Fonction zêta de RIEMANN** $\zeta :]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

- Quelques valeurs classiques sont à connaître : $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$.
- L'encadrement établi lors de la démonstration de la proposition précédente montre la double inégalité : $\forall \alpha > 1$, $\frac{1}{\alpha-1} \leq \zeta(\alpha) \leq \frac{1}{\alpha-1} + 1$; donc l'équivalent $\zeta(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha-1}$ et la limite $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \zeta(\alpha) = 1$.

REMARQUE 3.6 : On peut se servir de cette comparaison série-intégrale pour les équivalents des sommes partielles des séries de RIEMANN divergentes et des restes des séries de RIEMANN convergentes :

- Si $\alpha \in [0; 1[$ alors $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim_{+\infty} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.
- Si $\alpha > 1$ alors $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim_{+\infty} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

THÉORÈME ÉNORME 3.9 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles à termes positifs :

- (i) Si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$ et si $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge.
- (ii) Si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$ et si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- (iii) Si $u_n \sim_{+\infty} O(v_n)$ et si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- (iv) Si $u_n \sim_{+\infty} v_n$ alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont de même nature.

REMARQUE 3.7 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge ; alors $\sum_{n \geq 0} u_n^2$ converge aussi.

REMARQUE HP 3.8 : On se rappelle du théorème de CESARO : si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ , alors la suite des moyennes arithmétiques $\left(m_n = \frac{u_0 + \dots + u_{n-1}}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge aussi vers ℓ .

THÉORÈME ÉNORME 3.10 :

Équivalent de STIRLING : $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

REMARQUE FONDAMENTALE 3.9 : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ avec $\gamma \sim 0,577$ (constante d'EULER).

PROPOSITION 3.11 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs et $k > 0$:

- (i) S'il existe $\alpha > 1$ tel que $u_n \sim \frac{k}{n^\alpha}$ alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- (ii) S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $u_n \sim \frac{k}{n^\alpha}$ alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.
- (iii) S'il existe $\alpha > 1$ tel que $u_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- (iv) S'il existe $\alpha \leq 1$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geq n_0, u_n \geq \frac{k}{n^\alpha}$ alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

REMARQUE 3.10 : En pratique, on montre souvent, pour une série de terme général $u_n > 0$:

- qu'elle converge en établissant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = 0$ avec $\alpha > 1$,
- qu'elle diverge en montrant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = +\infty$ avec $\alpha \leq 1$.

REMARQUE HP 3.11 : Nature des séries de BERTRAND $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$:

$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$.

PARTIE 3.2 : SÉRIES GÉNÉRALES

DÉFINITION 3.2 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on dit que $\sum_{n \geq 0} u_n$ est une série absolument convergente si $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge.

PROPOSITION 3.12 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\sum_{n \geq 0} u_n$ ACV si et seulement si $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Im}(u_n)$ sont ACV.

THÉORÈME ÉNORME 3.13 :

Toute série $\sum_{n \geq 0} u_n$ ACV est une série CV. Et alors $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

REMARQUE 3.12 : Une série CV mais non ACV est dite une série semi-convergente.

THÉORÈME ÉNORME 3.14 :

- (i) Si $u_n = O(v_n)$, $\sum_{n \geq 0} v_n$ absolument convergente $\implies \sum_{n \geq 0} u_n$ absolument convergente.
(ii) Si $u_n \sim_{+\infty} v_n$, $\sum_{n \geq 0} u_n$ absolument convergente $\iff \sum_{n \geq 0} v_n$ absolument convergente.

REMARQUE 3.13 : Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ est telle que $\forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k < 1$ alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge. C'est un résultat dû à D'ALEMBERT mais en pratique on utilise plutôt :

THÉORÈME ÉNORME 3.15 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \ell \in \overline{\mathbb{R}_+} = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, la règle de D'ALEMBERT s'énonce :

- Si $\ell > 1$ alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge grossièrement.
- Si $\ell < 1$ alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument.

REMARQUE 3.14 : Avec les mêmes hypothèses que dans le théorème ci-dessus :

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 1$, on ne peut a priori rien dire de la convergence de la série car c'est le cas pour toutes les séries de RIEMANN pour lesquelles on a $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 1^+$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge (grossièrement) car $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang et strictement positive donc ne tend pas vers 0.

DÉFINITION 3.3 :

On dit que $\sum_{n \geq 0} u_n$ est une **série alternée** s'il existe $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ réelle de signe fixe et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n v_n$.

THÉORÈME ÉNORME 3.16 :

Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est alternée et si $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0 alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge

(CSSA). Dans ce cas, pour $n \geq -1$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est du signe de u_{n+1} et $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

REMARQUE 3.15 : Ne pas utiliser les équivalents pour des séries non positives

DÉFINITION 3.4 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites complexes, on appelle **produit de CAUCHY** des séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$

la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^n u_{n-k} v_k = \sum_{p+q=n} u_p v_q$.

THÉORÈME 3.17 :

Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont ACV, leur produit de CAUCHY l'est aussi et $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$.

REMARQUE 3.16 : Si $\sum_{n \geq 0} |u_n|^2$ et $\sum_{n \geq 0} |v_n|^2$ convergent, alors $\sum_{n \geq 0} u_n v_n$ converge absolument et on a

l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ : $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n \right| \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2} \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|^2}$.