

DEVOIR MAISON 2 : GIBIER DE NILPOTENCE

PSI 1 2026/2027

pour le vendredi 01 octobre 2027

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et soit f un endomorphisme de E . On suppose que f est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe un entier m tel que $f^m = 0$ où $f^m = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_m$ et où 0 est ici l'endomorphisme nul.

On pose $p = \min(k \in \mathbb{N} \mid f^k = 0) \in \mathbb{N}^*$ qui est appelé l'indice de nilpotence de f .

PARTIE 1 : IMAGES ET NOYAUX

- 1.1** Justifier que p est bien défini et que, pour $q \in \mathbb{N}$, on a :
$$\begin{cases} f^q = 0 & \text{si } q \geq p, \\ f^q \neq 0 & \text{si } q < p. \end{cases}$$
 Que peut-on dire de f si $p = 1$? Comparer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ si $p = 2$.

- 1.2** Ça monte et ça descend

1.2.1 Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \text{Ker}(f^k) \subset \text{Ker}(f^{k+1})$.

1.2.2 Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, (\text{Ker}(f^k) = \text{Ker}(f^{k+1}) \implies \forall q \geq k, \text{Ker}(f^q) = \text{Ker}(f^k))$.

1.2.3 Prouver les inclusions $\{0_E\} \subset \text{Ker}(f) \subset \dots \subset \text{Ker}(f^{p-1}) \subset \text{Ker}(f^p) = E$ et qu'elles sont strictes.

1.2.4 Établir que $\{0_E\} = \text{Im}(f^p) \subset \text{Im}(f^{p-1}) \subset \dots \subset \text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f) \subset E$ et que ces inclusions sont strictes.

- 1.3** Majoration de p

1.3.1 Établir avec 1.2.3 que : $\forall k \in \llbracket 0; p \rrbracket, \dim \text{Ker}(f^k) \geq k$.

1.3.2 En déduire alors que $p \leq n$.

“L'indice de f nilpotent est inférieur à la dimension de l'espace vectoriel sur lequel il est défini.”

PARTIE 2 : ORDEM E PROGRESSO

Comme $f^{p-1} \neq 0$, il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$.

- 2.1** Les bases de la liberté

2.1.1 Prouver que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est une famille libre.

2.1.2 Sans utiliser la partie 1, justifier qu'on a bien $p \leq n$.

2.1.3 Que peut-on dire de $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ si $p = n$?

- 2.2** Un exemple : soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x - y + z, 2x, x + y - z)$

2.2.1 Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. Calculer $f^2(x, y, z)$ et montrer que f est nilpotent d'indice 3.

2.2.2 Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ (bases et équations), et aussi $\text{Ker}(f^2)$ et $\text{Im}(f^2)$.

2.2.3 Trouver un vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^3$ tel que $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On suppose pour la suite du devoir que $p = n$.

PARTIE 3 : ESPACES STABLES PAR f

- 3.1** Noyaux et images : on reprend les notations de la partie précédente à propos du vecteur x_0 . Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$
- 3.1.1** Montrer que $(f^k(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est une base de $\text{Im}(f^k)$. En déduire $\text{rg}(f^k)$.
- 3.1.2** Quelle est donc la dimension de $\text{Ker}(f^k)$? Donner une base de $\text{Ker}(f^k)$.
- 3.2** Condition nécessaire de stabilité : soit F un sous-espace f -stable de dimension m et soit f_F définie par
- $$\begin{cases} f_F : F & \rightarrow F \\ x & \rightarrow f_F(x) = f(x) \end{cases} ; f_F \text{ est donc l'application induite par } f \text{ dans } F$$
- 3.2.1** Prouver que f_F est un endomorphisme nilpotent. En déduire avec la partie 1 que $F \subset \text{Ker}(f^m)$.
- 3.2.2** Établir enfin que $F = \text{Ker}(f^m)$.
- 3.3** Montrer qu'il existe $n + 1$ sous-espaces f -stables. Lesquels ?

PARTIE 4 : COMMUTANT DE f

On se place toujours sous l'hypothèse que $p = n$. On pose $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\}$; c'est le commutant de f : l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f .

- 4.1** Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.
- 4.2** Condition nécessaire de commutation : soit $g \in \mathcal{C}(f)$
- 4.2.1** Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$ et que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E .
- Il existe donc $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $g(x_0) = a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + \dots + a_{n-1} f^{n-1}(x_0)$.*
- 4.2.2** Montrer que $g = a_0 \text{id}_E + a_1 f + \dots + a_{n-1} f^{n-1}$.
- 4.3** Réciproquement, soit $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $g = a_0 \text{id}_E + a_1 f + \dots + a_{n-1} f^{n-1}$, prouver que $g \in \mathcal{C}(f)$.
- 4.4** Donner enfin une base et la dimension de $\mathcal{C}(f)$ considéré comme $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

PARTIE 5 : APPLICATION ANALYTIQUE

Soit $E = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \varphi''' - 3\varphi'' + 3\varphi' - \varphi = 0\}$. Le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ nous permet d'affirmer que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3 puisque l'équation différentielle que vérifie un élément de E est linéaire, normalisée et d'ordre 3. On définit alors

$$\begin{cases} f : E & \rightarrow E \\ \varphi & \rightarrow f(\varphi) = \varphi' - \varphi \end{cases}$$

- 5.1** Justifier que f est un endomorphisme de E nilpotent d'indice inférieur ou égal à 3.
- Soit $\varphi_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_0(x) = x^2 e^x$.*
- 5.2** Montrer que $\varphi_0 \in E$ et que $f^2(\varphi_0) \neq 0$. Donner enfin l'indice de f et une base de E .