

BAREME DS1

137 points

Partie I (38 points)

1a	1	continuité sur segment donc existence de l'intégrale
	2	argument $k > 0$ (1) et calcul de l'intégrale (1)
	2	argument "linéarité de l'intégrale" (1) et intégrale nulle (1)
1b	1	passage par les parties réelles de $\exp(i k \theta)$
	2	$\exp(i \theta) < 1$ (1) et formule de la somme (1)
	2	angle moitié et $\sin$ (1) et formule de trigonométrie finale (1)
1c	2	prolongement par continuité avec équivalents ou $g_n = 2f_{n+1}$
1d	2	$u_n = \pi$ avec question précédente, valeur en $n=0$ pas définie par l'énoncé
2a	3	DL1 de g en 0 ou équivalent du taux d'accroissement et conclusion
2b	1	$g \in C^1$ par théorèmes généraux sur $]0; \pi]$
	2	car dénominateur ne s'annule pas (1) et expression de $g'(x)$ (1)
2c	2	limite de $g'(x)$ en 0 vaut $g'(0)$ donc g est C^1 sur $[0; \pi]$
2d	2	poser u et $v \in C^1$ sur $[0; \pi]$ (1) et formule de l'intégration par parties (1)
	2	inégalité triangulaire (1) et majoration de $ \cos $ par 1 donc expression de la constante A qui est INDEPENDANTE de n
2e	2	théorème encadrement (1) et limite de (v_n) (1)
3a	2	argument "linéarité de l'intégrale" (1) et expression avec g_n (1)
	2	calcul de l'intégrale avec le $\cos$ (1) et reconnaissance u_n et v_n (1)
3b	1	limite de (X_n) avec les questions précédentes
3c	2	formule de trigonométrie (1) et $k+1/\alpha$ et $k-1/\alpha$ non nuls (1)
	1	expression avec $(-1)^k$ dedans (même si c'est dans la question qui suit)
3d	2	argument "linéarité de l'intégrale" (1) et expression finale (1)

Partie II (31 points)

1	2	fonction continue sur $]0; 1]$ (1) car $\alpha > 0$ (1)
	1	majoration (et positivité) ou O ou équivalent de ϕ en 0
	2	convergence de l'intégrale (1) par Riemann et comparaison (1)
2	3	ϕ continue sur $]0; 1]$ (1) et domination (1) et convergence (1)
	1	$u \rightarrow u^{(\alpha)}$ est C^1 , strictement croissante et bijective de $]0; 1]$ dans $]0; 1]$
	1	relation entre les deux intégrales car $\alpha * \beta = 1$
3	2	ψ continue sur $]0; 1]$ (1) et convergence par domination (1)
	3	poser $t = u^{(-\alpha)}$ (1) et justification (1) et relation (1)
4a	2	argument $t > -1$ (1) et formule de la somme géométrique (1)
	1	inégalité triangulaire et $1+t \geq 1$
4b	3	inégalité triangulaire et majoration avec 4a (2) et $n+\beta+1 > 0$ (1)
	2	autre inégalité avec les mêmes arguments
4c	3	linéarité de l'intégrale (1) et calcul de chacune (1) car $k+\beta > 0$ (1)
	2	cas $k=0$ d'une des sommes à part (1) et changement d'indice dans l'autre (1)
4d	1	$I_{(\alpha)}$ en fonction des intégrales de ϕ et ψ (1)
	2	limite avec II4c et Ib (1) et expression finale de $I_{(\alpha)}$ (1)

Partie III (43 points)

1	2	continuité sur $\mathbb{R}^+$ (1) et $O(t^{(\gamma-1)})$ en 0 avec $1-\gamma < 1$ (1)
	2	$O(e^{-t})$ en l'infini (1) donc fonction intégrable et intégrale convergente (1)
2a	2	continuité sur $\mathbb{R}^+$ (1) et $O(t^{(\gamma-1)})$ en 0 avec $1-\gamma < 1$ (1)
	1	$O(t^{(\gamma-2)})$ en l'infini avec $2-\gamma > 1$ donc existence
2b	2	$t=u^{(1/\gamma)}$ (1) et justification du changement de variable (1)
	1	expression après changement et reconnaissance II4d
3a	3	$u \rightarrow u/x$ justifiée (1) et expression de $F_{\gamma}(x)$ (1) et minoration (1)
3b	2	$F_{\gamma}(x)$ est positif (1) et théorème d'encadrement (1)
4	1	fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ car $\gamma > 0$
	2	et $O(1/t^2)$ en l'infini donc intégrabilité (1) et convergence de l'intégrale (1)
5	3	linéarité de l'intégrale (1) et expression (1) et $t=u/x$ donc équation (1)
6a	2	continuité sur $[x, \infty[$ (1) et $O(e^{-t})$ ou $O(1/t^2)$ donc convergence (1)
6b	1	Chasles avec introduction par exemple de 1
	2	Théorème fondamental de l'intégration (1) et conclusion avec dérivée (1)
6c	2	H_{γ} est dérivable par produit (1) et expression de sa dérivée (1)
6d	1	$1/t^{(\gamma)} \leq 14/x^{(\gamma)}$ si t dans $[x, \infty[$
	2	puis on intègre (1) et on conclut par encadrement (1)
6e	2	comme on est sur un intervalle (1), $F-H$ s'écrit $x \rightarrow C e^x$ (1)
	1	comme leurs limites sont nulles en l'infini, la constante C est nulle
7	1	F_{γ} est continue en 0 (1)
	2	H_{γ} tend vers $G_{\gamma} \cdot \text{intégrale en 0}$ (1) et limite (1)
8	2	L'intégrale vaut $G_{1-\gamma}$ (1) donc formule des compléments (1)
9	2	carré de $G_{1/2}$ par la relation (1) et $G_{1/2}$ car $G_{1/2} \geq 0$ (1)
	2	$t=u^2$ justifié (1) et valeur de J_0 (1)

Partie IV (25 points)

1a	2	$\cos$ est $C^{(2n+2)}$ sur $\mathbb{R}$ (1) et $\ \cos^{(2n+2)}\ _{\infty} = 1$ (1)
	2	calcul des dérivées de $\cos$ en 0 (1) et inégalité de Taylor-Lagrange (1)
1b	1	$\exp C^{(\infty)}$ sur $\mathbb{R}$ et calcul dérivées successives
	2	inégalité de Taylor-Lagrange (1) et limite (1)
2a	2	fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ (1) et $O(1/t^2)$ en l'infini donc convergence (1)
2b	2	poser les fonctions u et v (1) et dire qu'elles sont C^1 sur $\mathbb{R}^+$ (1)
	2	limite de uv en l'infini (1) et relation (1)
2c	3	initialisation (1) et hérédité (1) et conclusion (1)
3a	2	fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ (1) et $O(\exp(-t^2))$ en l'infini donc convergence (1)
3b	2	inégalité triangulaire (1) et majoration avec IV3b (1)
	2	limite du majorant par croissances comparées (1) et limite (1)
3c	1	linéarité sur un nombre fini d'intégrales
	2	limite de la somme partielle (1) et transformée de Fourier (1)