

DEVOIR 04 : INTÉGRALES LINÉAIRES

PSI 1 2026-2027

mercredi 23 septembre 2026

QCM

1 Noyaux et images : soit E un espace vectoriel et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$

1.1 $\text{Ker}(f + g) \subset \text{Ker}(f) + \text{Ker}(g)$

1.3 $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f \circ g)$

1.2 $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$

1.4 $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(f \circ g)$

2 Endomorphisme : soit E un espace de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ et S un supplémentaire de $\text{Ker}(f)$

2.1 $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$

2.3 $f^2 = f \implies E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$

2.2 $f|_S^{\text{Im}(f)}$ est un isomorphisme

2.4 $f^2 \neq 0 \iff \text{Ker}(f) \not\subset \text{Im}(f)$

3 Projections et symétries : soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et deux sous-espaces F et G de E qui sont supplémentaires (c'est-à-dire $E = F \oplus G$), soit p la projection sur F parallèlement à G

3.1 $\text{id}_E - 2p$ est la symétrie par rapport à G parallèlement à F

3.3 $\forall x \in E, x \in F \iff p(x) = x$

3.2 $\text{id}_E - p$ est la projection sur G parallèlement à F

3.4 $\forall x \in E, x - p(x) \in F$

4 Soit E un espace de dimension n , $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de E et q tel que $1 \leq q \leq p$.

4.1 $(v_1, \dots, v_p)$ libre $\implies p \leq n$

4.3 $((v_1, \dots, v_p)$ libre et $p = n) \iff (v_1, \dots, v_p)$ base de E

4.2 $(v_1, \dots, v_q)$ libre $\implies (v_1, \dots, v_p)$ libre

4.4 $p = n \implies (v_1, \dots, v_p)$ génératrice

Énoncé Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et S un supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ dans E . Que dit le théorème du rang (pas seulement la formule du rang en dimension finie) ?

Preuve Soit une fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha f(x) = +\infty$ avec $\alpha \leq 1$.
Montrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 1 Soit $f :]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$. Déterminer des équivalents (les plus simples possibles) de $f(x)$ quand x tend vers 1^+ et vers $+\infty$. Justifier que f est intégrable sur $]1; +\infty[$.
Grâce au changement de variable $x = \cosh(t)$ (à justifier), trouver la valeur exacte de $I = \int_1^{+\infty} f(x) dx$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = \left(\frac{x-y-z}{2}, y, \frac{-x-y+z}{2}\right)$. On admet que f est linéaire. Prouver que f est une projection et déterminez le sous-espace (base et équation) sur lequel on effectue la projection et celui (base et équation) parallèlement auquel elle s'effectue (caractérisation géométrique).

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question i,j vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

i · j	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Preuve

Énoncé

Exercice 1

Exercice 2

i · j	1	2	3	4	Fautes
1		X	X		
2		X	X		
3	X	X	X		
4	X		X		

1.1 Faux : c'est $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f+g)$ **1.2** Vrai : vu en cours **1.3** Vrai : vu en cours **1.4** Faux : c'est $\text{Im}(f \circ g) \subset \text{Im}(f)$.

2.1 Faux : si $E = \mathbb{R}^2$ et $f(x, y) = (0, x)$ par exemple **2.2** Vrai : c'est le maintenant célèbre théorème du rang

2.3 Vrai : $f^2 = f \iff f$ est un projecteur alors on sait que $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$ **2.4** Faux : avec par exemple $f(x, y, z) = (0, 0, x)$, on a bien $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(e_2, e_3) \not\subset \text{Im}(f) = \text{Vect}(e_3)$ et pourtant $f^2 = 0$.

3.1 et **3.2** Vrais : si $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$, en notant $s = \text{id}_E - 2p$ et $q = \text{id}_E - p$, on a $s(y + z) = y + z - 2y = z - y$ et $q(y + z) = y + z - y = z$ **3.3** Vrai : $\text{Ker}(\text{id}_E - p) = \text{Im}(p) = F$ **3.4** Faux : $x - p(x) \in G$.

4.1 Vrai : du cours **4.2** Faux : à l'envers, "une sous-famille d'une famille libre est libre" **4.3** Vrai : du cours **4.4** Faux : si $v_1 = \dots = v_p$.

Énoncé

Avec ces notations, f induit un isomorphisme entre S et $\text{Im}(f)$; c'est-à-dire que l'application restreinte $g = f|_S^{\text{Im}(f)} : S \rightarrow \text{Im}(f)$ définie par $g(x) = f(x)$ pour $x \in S$ est un isomorphisme.

Preuve

L'hypothèse se traduit par $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\alpha f(x)} = 0$ ou encore $\frac{1}{x^\alpha} = o(f(x))$. Par l'absurde, si f était intégrable sur $\mathbb{R}_+$, par comparaison, $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ serait intégrable sur $[1; +\infty[$ ce qui est faux par RIEMANN. On en déduit bien par comparaison que f n'est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pouvait dire aussi que cette limite implique l'existence de $a > 0$ tel que $\forall x \geq a, x^\alpha f(x) \geq 1 \iff f(x) \geq \frac{1}{x^\alpha} \geq 0$ avec la conclusion directement par minoration.

Exercice 1

Comme $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$: $f(x) \sim_{1+} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x-1}} = O\left(\frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}\right)$. Puis $f(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x^2}$ car $x^2 - 1 \sim_{+\infty} x^2$. f est continue sur $]1; +\infty[$. Par RIEMANN, comme $\frac{1}{2} < 1$ et $2 > 1$, f est intégrable sur $]1; +\infty[$. Comme ch est une bijection strictement croissante et C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]1; +\infty[$, on a le calcul $\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \text{sh}(t) f(\text{ch}(t)) dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\text{ch}(t)} = [2 \text{Arctan}(e^t)]_0^{+\infty} = [\text{Arctan}(\text{sh}(t))]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f^2(x, y, z) = \left(\frac{x - y - z - 2y + x + y - z}{4}, \frac{-x + y + z - 2y - x - y + z}{4} \right)$ donc $f^2(x, y, z) = \left(\frac{x - y - z}{2}, \frac{-x - y + z}{2} \right) = f(x, y, z)$ donc f est un projecteur : la projection sur $\text{Ker}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})$ parallèlement à $\text{Ker}(f)$. Or $f(x, y, z) = (0, 0, 0) \iff y = x - z = 0 \iff (x, y, z) = (x, 0, x) = x(1, 0, 1)$. Ainsi $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = (1, 0, 1)$ donc $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$ et $\text{Ker}(f)$ a pour équations : $x - z = y = 0$. De plus, $(x, y, z) \in \text{Im}(f) \iff f(x, y, z) = (x, y, z) \iff x + y + z = 0 \iff (x, y, z) = (x, y, -x - y)$ donc $(x, y, z) \in \text{Im}(f) \iff (x, y, z) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)$ ainsi $\text{Im}(f) = \text{Vect}(v_2, v_3)$ avec $v_2 = (1, 0, -1)$ et $v_3 = (0, 1, -1)$ et comme (v_2, v_3) est libre car v_2 et v_3 ne sont pas colinéaires, $\dim(\text{Im}(f)) = 2$ (on le savait déjà avec la formule du rang), (v_2, v_3) est une base de $\text{Im}(f)$ qui a pour équation $x + y + z = 0$.