

PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 03

PSI 1 2026-2027

du lundi 28/09 au vendredi 02/10

1 **Intégration** : voir les programmes précédents

2 **Révisions d'algèbre linéaire** :

- espaces et sous-espaces vectoriels, sous-espaces engendrés ;
- somme de deux sous-espaces, somme directe, sous-espaces supplémentaires ;
- applications linéaires, noyau et image, caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité ;
- projecteurs et symétries : passage de l'algébrique au géométrique ;
- famille libre, génératrice, base, propriétés de ces familles ;
- sous-espace stables par un endomorphisme et endomorphismes induits ;
- théorème du rang (isomorphisme entre un supplémentaire du noyau et l'image) ;
- application donnée par ses restrictions à des sous-espaces en somme directe ;
- familles libres, génératrices, liées, bases éventuellement infinies (hors programme néanmoins) ;
- définition des hyperplans (prog. en dimension finie) : supplémentaire droite ou dimension $\dim(E) - 1$;
- les hyperplans sont les noyaux des formes linéaires non nulles ;
- les hyperplans n'ont qu'une seule équation à un coefficient multiplicatif près ;
- calcul matriciel : somme, produit, espace vectoriel, anneau, matrices élémentaires, dimension ;
- transposée, matrices symétriques, antisymétriques, diagonales, triangulaires, trace ;
- inverses de matrices, calcul de puissances, matrices de GAUSS ;
- représentations matricielles : famille, matrice d'application linéaire, d'endomorphisme ;
- isomorphisme matrice-applications linéaires, relation avec le produit, l'inverse ;
- matriciellement : image d'un vecteur, changement de bases, matrices de passage entre bases ;
- changement de bases pour une application linéaire, matrices équivalentes, matrices semblables ;
- déterminant des matrices carrées, relations associées, $\det(A) = \det({}^tA)$;
- déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base, caractérisation des bases ;
- déterminant des endomorphismes, relations associées, caractérisation des automorphismes ;
- développement par rapport à une rangée ;
- matrices des opérations de GAUSS, conservation du déterminant par transvection, algorithme ;
- déterminant de VANDERMONDE, orientation d'un espace réel de dimension finie ;
- définition et terminologie sur les systèmes, système homogène associé, rang, déterminant si système "carré", compatibilité, interprétations avec les hyperplans, les formes linéaires, les vecteurs ;
- résolution avec le pivot de GAUSS, inconnues auxiliaires et principales ;
- systèmes de CRAMER et résolution avec les déterminants (HP) ;

QUESTIONS DE COURS :

- 1 énoncer le théorème de changement de variable sur des intervalles ouverts (th. 1.26)
- 2 énoncer le théorème d'intégration par parties sur des intervalles ouverts (th. 1.27)
- 3 énoncer le théorème du rang (th. 2.13)
- 4 énoncer les propriétés d'une projection p sur F parallèlement à G (th. 2.15)
- 5 énoncer la caractérisation géométrique d'un projecteur (th. 2.16)
- 6 énoncer la dualité liant les hyperplans et les formes linéaires non nulles en dimension finie (th. 2.36)
- 7 énoncer la formule de changement de bases dans sa forme "endomorphisme" (th. 2.53)
- 8 prouver que $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f + g)$ et $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$ (rem. 2.20)
- 9 prouver que $\text{rang}(g \circ f) \leq \min(\text{rang}(f), \text{rang}(g))$ (prop. 2.35)
- 10 prouver que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et donner les dimensions et bases de chaque sev (prop. 2.39)

Prévision pour la prochaine semaine : algèbre linéaire