

Partie I

1. a) Comme $k \neq 0$, $\int_0^\pi \cos(kx) dx = \left[\frac{\sin(kx)}{k} \right]_0^\pi = 0$ et, par linéarité de l'intégrale, $\int_0^\pi f_n(t) dt = 0$
- b) On a $f_n(x) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n e^{ikx} \right)$ et comme $e^{ix} \neq 1$, on a $\sum_{k=1}^n e^{ikx} = e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} = e^{i\frac{n+1}{2}x} \frac{-2i \sin(\frac{nx}{2})}{-2i \sin(\frac{x}{2})}$ d'où on déduit $f_n(x) = \frac{\cos(\frac{n+1}{2}x) \sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} = \frac{1}{2 \sin(\frac{x}{2})} \left[\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right] = \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}g_n(x) \right]$
Le résultat étant donné, on pouvait aussi le prouver par récurrence sur n .
- c) On a $\lim_0 g_n = \lim_0 (1 + 2f_n) = 2n + 1$ car, la somme étant finie et par linéarité de la limite, $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = n$, donc on prolonge par continuité g_n par $\boxed{g_n(0) = \lim_{x \rightarrow 0} g_n(x) = 2n + 1}$
On peut aussi déterminer cette limite à partir de l'expression de g_n et en utilisant $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
- d) On a, pour $n \geq 1$, $g_n = 1 + 2f_n$ donc $u_n = \pi + 2 \int_0^\pi f_n(t) dt = \pi$ (avec **I.1.a**) ; comme $u_0 = \int_0^\pi dt = \pi$, on a $\boxed{u_n = \pi \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$
2. a) On a $g(x) \underset{0}{=} \frac{1 - \frac{x^2}{2\alpha^2} - 1 + o(x^2)}{\frac{x}{2} + o(x^2)} = -\frac{\frac{x}{\alpha^2} + o(x)}{1 + o(x)} = -\frac{x}{\alpha^2} + o(x)$. Comme $g(0) = 0$, on peut aussi écrire $g(x) \underset{0}{=} g(0) - \frac{x}{\alpha^2} + o(x)$ et ce $DL_1(0)$ prouve que g est dérivable en 0 et $\boxed{g'(0) = \frac{-1}{\alpha^2}}$
- b) Comme $\sin(\frac{x}{2}) \neq 0$ si $x \in]0, \pi]$, g est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$ et $g'(x) = \frac{-\sin(\frac{x}{\alpha})}{\alpha \sin(\frac{x}{2})} + \left(\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) - 1 \right) \frac{-\cos(\frac{x}{2})}{2 \sin^2(\frac{x}{2})}$
- c) Comme $\cos(\frac{x}{\alpha}) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2\alpha^2}$, on obtient $\lim_0 g' = -\frac{2}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} = g'(0)$ donc $\boxed{g \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, \pi]}$
- d) g et $x \mapsto -\cos\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$ donc, $v_n = \left[g(x) \frac{-\cos\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{\frac{2n+1}{2}} \right]_0^\pi + \int_0^\pi g'(x) \frac{\cos\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{\frac{2n+1}{2}} dx$
 par IPP, donc $|v_n| = \frac{2}{2n+1} \left| \int_0^\pi g'(x) \cos\left((2n+1)\frac{x}{2}\right) dx \right| \leq \boxed{\frac{2}{2n+1} \int_0^\pi |g'(x)| dx}$ par inégalité triangulaire.
- e) On en déduit, par encadrement, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0}$ puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$.
3. a) Avec **I.1.b**, par linéarité de l'intégrale, $X_n = -\frac{1}{2} \int_0^\pi \cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi g_n(x) \cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx$ donc, par définition de $g_n(x)$, $X_n = -\frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) + \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) - 1 + 1 \right) dx$ et $\boxed{X_n = -\frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) + \frac{1}{2}(v_n + u_n)}$
 vue la valeur de $g(x)$.
- b) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pi$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, on a $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = -\frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) + \frac{\pi}{2}}$
- c) On a $\int_0^\pi \cos(kx) \cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left[\cos\left(\left(k + \frac{1}{\alpha}\right)x\right) + \cos\left(\left(k - \frac{1}{\alpha}\right)x\right) \right] dx$ et comme on a $k \pm \frac{1}{\alpha} \neq 0$, on a $\int_0^\pi \cos(kx) \cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin\left(\left(k + \frac{1}{\alpha}\right)x\right)}{k + \frac{1}{\alpha}} + \frac{\sin\left(\left(k - \frac{1}{\alpha}\right)x\right)}{k - \frac{1}{\alpha}} \right]_0^\pi$,
 donc $\int_0^\pi \cos(kx) \cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx = \frac{(-1)^k}{2} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}{k + \frac{1}{\alpha}} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}{k - \frac{1}{\alpha}} \right) = \boxed{\frac{(-1)^k \alpha \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}{2} \left(\frac{1}{1 + k\alpha} + \frac{1}{1 - k\alpha} \right)}$
- d) Avec l'expression de f_n , on a $\boxed{X_n = \frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) \sum_{k=1}^n (-1)^k \left(\frac{1}{1 + k\alpha} + \frac{1}{1 - k\alpha} \right)}$ la somme étant finie et par linéarité de l'intégrale.

Partie II

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^\alpha}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et, pour $x > 0$, $0 \leq \frac{1}{1+x^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha}$. Comme $\alpha > 1$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ est convergente (Riemann) donc, par comparaison, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\alpha}$ converge donc I_α existe pour $\alpha > 1$

2. φ est continue sur $]0, 1]$ et $0 \leq \varphi(t) \leq \frac{1}{t^{1-\beta}}$; comme $1 - \beta < 1$, $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-\beta}}$ converge donc $\int_0^1 \varphi(t) dt$ converge aussi. L'application $u \mapsto u^\alpha$ est $\mathcal{C}^1$, bijective et strictement croissante de $]0, 1]$ sur $]0, 1]$, $dt = \alpha u^{\alpha-1} du$, donc, par changement de variable, $\int_0^1 \varphi(t) dt = \int_0^1 \frac{u^{\alpha(\beta-1)}}{1+u^\alpha} \times \alpha u^{\alpha-1} du = \alpha \int_0^1 \frac{du}{1+u^\alpha}$ car $\alpha(\beta-1) = 1 - \alpha$.

3. ψ est continue sur $]0, 1]$ et $0 \leq \psi(t) \leq \frac{1}{t^\beta}$ avec $\beta < 1$ donc $\int_0^1 \psi(t) dt$ converge.

On pose cette fois $t = u^{-\alpha}$: la fonction $u \mapsto u^{-\alpha}$ est $\mathcal{C}^1$ bijective et strictement décroissante de $[1, +\infty[$ sur $]0, 1]$ et on trouve $\int_0^1 \psi(t) dt = \int_{+\infty}^1 \frac{u^{\alpha\beta}}{1+u^{-\alpha}} \times (-\alpha)u^{-1-\alpha} du = \alpha \int_1^{+\infty} \frac{du}{1+u^\alpha}$.

4. a) On a $\sigma_n(t) = \frac{1 - (-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}$ (car $t \neq -1$) donc (avec $t \geq 0$) $\left| \sigma_n(t) - \frac{1}{1+t} \right| = \frac{t^{n+1}}{1+t} \leq t^{n+1}$

b) On a $\left| \int_0^1 \varphi(t) dt - \int_0^1 \sigma_n(t)t^{\beta-1} dt \right| = \left| \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - \sigma_n(t) \right) t^{\beta-1} dt \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{1}{1+t} - \sigma_n(t) \right| t^{\beta-1} dt$ par inégalité triangulaire. Puis, avec **II.4.a**, $\int_0^1 \left| \frac{1}{1+t} - \sigma_n(t) \right| t^{\beta-1} dt \leq \int_0^1 t^{n+\beta} dt = \left[\frac{t^{n+\beta+1}}{n+\beta+1} \right]_0^1 = \frac{1}{1+n+\beta}$ avec

$$1+n+\beta > 0. \text{ On a donc bien } \left| \int_0^1 \varphi(t) dt - \int_0^1 \sigma_n(t)t^{\beta-1} dt \right| \leq \frac{1}{n+1+\beta}$$

$$\text{On trouve de même, } \left| \int_0^1 \psi(t) dt - \int_0^1 \sigma_{n-1}(t)t^{-\beta} dt \right| \leq \int_0^1 t^{n-\beta} dt \leq \frac{1}{n-\beta+1}$$

c) À nouveau par linéarité de l'intégrale, la somme étant finie, on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sigma_n(t)t^{\beta-1} dt + \int_0^1 \sigma_{n-1}(t)t^{-\beta} dt &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{k+\beta-1} dt + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 t^{k-\beta} dt \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \left[\frac{t^{k+\beta}}{k+\beta} \right]_0^1 + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\frac{t^{k+1-\beta}}{k+1-\beta} \right]_0^1 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\alpha}{1+k\alpha} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \frac{\alpha}{1-(k+1)\alpha} \\ &\stackrel{h=k+1}{=} \alpha + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\alpha}{1+k\alpha} + \sum_{h=1}^n (-1)^h \frac{\alpha}{1-h\alpha} = \alpha + \alpha \sum_{k=1}^n (-1)^k \left(\frac{1}{1+k\alpha} + \frac{1}{1-k\alpha} \right) \end{aligned}$$

$$\text{ce qui donne } \int_0^1 \sigma_n(t)t^{\beta-1} dt + \int_0^1 \sigma_{n-1}(t)t^{-\beta} dt = \alpha + \frac{2X_n}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)} \text{ avec } \mathbf{I.3.d.}$$

d) Par encadrement, avec **II.4.b**, on a $\int_0^1 \varphi(t) dt + \int_0^1 \psi(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sigma_n(t)t^{\beta-1} dt + \int_0^1 \sigma_{n-1}(t)t^{-\beta} dt$. Avec **II.4.c** et **I.3.b**, on en déduit $\int_0^1 \varphi(t) dt + \int_0^1 \psi(t) dt = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}$. Comme, par relation de Chasles et avec **II.1** et **II.2**, on a $\alpha I_\alpha = \int_0^1 \varphi(t) dt + \int_0^1 \psi(t) dt$, on conclut $I_\alpha = \frac{\pi}{\alpha \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}$

Partie III

1. $t \mapsto t^{\gamma-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. Si $t \in]0, 1]$ alors $0 \leq t^{\gamma-1}e^{-t} \leq \frac{1}{t^{1-\gamma}}$ et $1 - \gamma < 1$ donc $\int_0^1 t^{\gamma-1}e^{-t} dt$ converge. Si $t \geq 1$ alors $0 \leq t^{\gamma-1}e^{-t} \leq e^{-t}$ car $\gamma - 1 < 0$ donc $\int_1^{+\infty} t^{\gamma-1}e^{-t} dt$ converge aussi. On en déduit que G_γ existe pour $\gamma \in]0, 1[$

2. a) $t \mapsto \frac{t^{\gamma-1}}{1+t}e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. Si $t \in]0, 1]$, on a $0 \leq \frac{t^{\gamma-1}}{1+t}e^{-xt} \leq t^{\gamma-1} = \frac{1}{t^{1-\gamma}}$ et $1 - \gamma < 1$ donc $\int_0^1 \frac{t^{\gamma-1}}{1+t}e^{-xt} dt$ converge. Si $t \geq 1$, on a $0 \leq \frac{t^{\gamma-1}}{1+t}e^{-xt} \leq \frac{t^{\gamma-1}}{t} = \frac{1}{t^{2-\gamma}}$ et $2 - \gamma > 1$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{t^{\gamma-1}}{1+t}e^{-xt} dt$ converge. Ainsi, $F_\gamma(x)$ existe pour $x \geq 0$

- b) On pose $t = u^{1/\gamma}$: la fonction $u \mapsto u^{1/\gamma}$ est $\mathcal{C}^1$, bijective et strictement croissante de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc
- $$F_\gamma(0) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\gamma}(\gamma-1)}}{1+u^{\frac{1}{\gamma}}} \times \frac{1}{\gamma} u^{\frac{1}{\gamma}-1} du = \frac{1}{\gamma} I_{1/\gamma}. \text{ Comme } \frac{1}{\gamma} > 1, \text{ on a, d'après II.4.d, } \boxed{F_\gamma(0) = \frac{\pi}{\sin(\gamma\pi)}}$$
3. a) On pose $t = \frac{u}{x}$, pour $x > 0$: l'application $u \mapsto \frac{u}{x}$ est $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$;
 $dt = \frac{1}{x} du$ donc $F_\gamma(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(u/x)^{\gamma-1}}{1+(u/x)} e^{-u} \frac{du}{x} = \frac{1}{x^\gamma} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\gamma-1}}{1+(u/x)} e^{-u} du$. De plus, pour $u \geq 0$, on a
 $\frac{1}{1+(u/x)} \leq 1$ donc $\frac{u^{\gamma-1}}{1+(u/x)} e^{-u} \leq u^{\gamma-1} e^{-u}$, ce qui donne, en intégrant (la convergence des intégrales est déjà assurée) $\boxed{F_\gamma(x) \leq \frac{G_\gamma}{x^\gamma}}$
- b) On a l'encadrement $0 \leq F_\gamma(x) \leq \frac{G_\gamma}{x^\gamma} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $\boxed{\lim_{+\infty} F_\gamma = 0}$
4. $t \mapsto \frac{t^\gamma}{1+t} e^{-xt}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^+$ car $\gamma > 0$ et $t^\gamma e^{-xt} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ car $x > 0$ donc il existe $a \geq 1$ tel que, pour $t \geq a$,
on a $0 \leq \frac{t^\gamma}{1+t} e^{-xt} \leq \frac{1}{t^2}$. Ainsi $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^\gamma}{1+t} e^{-xt} dt \text{ est convergente si } x > 0}$
5. On a, par linéarité, $F_\gamma(x) - F'_\gamma(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\gamma-1} + t^\gamma}{1+t} e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\gamma-1}(1+t)}{1+t} e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} t^{\gamma-1} e^{-xt} dt$ donc,
en utilisant le changement de variable $u = xt$ déjà justifié précédemment, on obtient $\boxed{F_\gamma(x) - F'_\gamma(x) = \frac{G_\gamma}{x^\gamma}}$
6. a) Si $x > 0$, $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^\gamma}$ est continue sur $[x, +\infty[$ et, pour $t \geq 1$, $0 \leq \frac{e^{-t}}{t^\gamma} \leq e^{-t}$ donc $\boxed{h_\gamma(x) \text{ existe pour } x > 0}$
- b) On écrit $h_\gamma(x) = - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t^\gamma} dt + h_\gamma(1)$ donc, comme $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^\gamma}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, $x \mapsto \int_1^x \frac{e^{-t}}{t^\gamma} dt$ est l'unique primitive de $x \mapsto \frac{e^{-x}}{x^\gamma}$ qui s'annule en 1 donc $\boxed{h_\gamma \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ et } h'_\gamma(x) = -\frac{e^{-x}}{x^\gamma} \text{ pour } x > 0}$
- c) Par produit, H_γ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et, pour $x > 0$, $H'_\gamma(x) = H_\gamma(x) + G_\gamma e^x h'_\gamma(x) = H_\gamma(x) - G_\gamma e^x \frac{e^{-x}}{x^\gamma}$ donc
 $\boxed{H_\gamma(x) - H'_\gamma(x) = \frac{G_\gamma}{x^\gamma} \text{ pour } x > 0}$
- d) L'application $t \mapsto \frac{1}{t^\gamma}$ est décroissante sur $[x, +\infty[$ donc, pour $t \geq x$, on a $0 \leq \frac{e^{-t}}{t^\gamma} \leq \frac{e^{-t}}{x^\gamma}$, ce qui donne en intégrant, $0 \leq H_\gamma(x) \leq G_\gamma e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x^\gamma} dx = G_\gamma e^x \frac{1}{x^\gamma} [-e^{-t}]_x^{+\infty} = \frac{G_\gamma}{x^\gamma}$. Par encadrement, on a $\boxed{\lim_{+\infty} H_\gamma = 0}$
- e) Comme F_γ et H_γ sont solutions sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$ de la même équation différentielle linéaire, $F_\gamma - H_\gamma$ est solution de l'équation homogène $y - y' = 0$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, F_\gamma(x) - H_\gamma(x) = \lambda e^x$. Comme $\lim_{+\infty} (F_\gamma - H_\gamma) = 0$, on en déduit $\lambda = 0$ donc $\boxed{F_\gamma = H_\gamma}$
7. Il s'agit de prolonger l'égalité, valable sur $\mathbb{R}^{+*}$, entre F_γ et H_γ en $x = 0$: F_γ est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc en 0 et comme $0 \leq \frac{e^{-t}}{t^\gamma} \leq \frac{1}{t^\gamma}$ avec $\gamma < 1$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\gamma} dt$ est convergente donc $\lim_{x \rightarrow 0} h_\gamma(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\gamma} dt$, ce qui donne $\lim_{x \rightarrow 0} H_\gamma(x) = G_\gamma \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\gamma} dt$. Par passage à la limite quand x tend vers 0 dans l'égalité de III.5, on a
 $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^{\gamma-1}}{1+t} dt = F_\gamma(0) = G_\gamma \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\gamma} dt}$
8. En remarquant que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\gamma} dt = G_{1-\gamma}$ (et $1 - \gamma \in]0, 1[$) et avec la valeur de $F_\gamma(0)$ vue en III.2.b, on déduit
 $\boxed{G_\gamma G_{1-\gamma} = \frac{\pi}{\sin(\gamma\pi)}}$
9. Avec $\gamma = \frac{1}{2} \in]0, 1[$, on a $G_{1/2}^2 = \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{2})} = \pi$ et comme $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est positive, on a $G_{1/2} \geq 0$ donc $\boxed{G_{1/2} = \sqrt{\pi}}$
On pose alors $t = u^2$: l'application $u \mapsto u^2$ est $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$; $dt = 2u du$
donc $G_{1/2} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} \times 2u du = 2J_0$ ce qui donne l'existence de J_0 et $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

Partie IV

1. a) La fonction $\cos$ est de classe $\mathcal{C}^{2n+2}$ sur $\mathbb{R}$; pour $k \leq n$, on a les dérivées $\cos^{(2k)}(0) = (-1)^k \cos(0) = (-1)^k$ et $\cos^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \sin(0) = 0$ puis $|\cos^{(2n+2)}| = |\cos| \leq 1$ donc l'inégalité de Taylor-Lagrange donne
- $$\left| \cos(u) - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{u^k}{k!} \cos^{(k)}(0) \right| \leq \frac{|u|^{2n+2}}{(2n+2)!} \|\cos^{(2n+2)}\|_{\infty}, \text{ ce qui, compte tenu des termes impairs qui sont nuls}$$

$$\text{donne } \left| \cos(u) - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{u^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{u^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

- b) On applique à nouveau l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $\varphi : u \mapsto e^{-u}$ qui est $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}^+$; on a $\varphi^{(k)}(0) = (-1)^k$ et $|\varphi^{(n+1)}(u)| = e^{-u} \leq 1$ sur $\mathbb{R}^+$ donc $\left| e^{-u} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} u^k \right| \leq \frac{u^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc, par

$$\text{encadrement, } e^{-u} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} u^k$$

2. a) La fonction $t \mapsto t^{2n} e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $t^{2n} e^{-t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $t \mapsto t^{2n} e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$

- b) Les fonctions $u : t \mapsto e^{-t^2}$ et $v : t \mapsto \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$; $u(0)v(0) = \lim_{t \rightarrow 0} uv = 0$ donc, par IPP,

$$J_n = \left[u(t)v(t) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \times (-2te^{-t^2}) dt = \frac{2}{2n+1} J_{n+1}. \text{ On a donc } J_{n+1} = \frac{2n+1}{2} J_n$$

- c) Une récurrence suffit : on a bien $J_0 = J_0 \times \frac{0!}{4^0 0!}$ et si $J_n = J_0 \frac{(2n)!}{4^n n!}$ alors $J_{n+1} = \frac{2n+1}{2} J_n \stackrel{\text{HR}}{=} \frac{2n+1}{2} \times J_0 \frac{(2n)!}{4^n n!}$ puis $J_{n+1} = J_0 \frac{(2n+2)!}{(2n+2)2 \times 4^{n+1}} = J_0 \frac{(2n+2)!}{4^{n+1}(n+1)!}$

3. a) $t \mapsto \cos(xt)e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. On a $|\cos(xt)e^{-t^2}| \leq e^{-t^2}$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge d'après **III.9** donc

$$t \mapsto \cos(xt)e^{-t^2} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^+$$

- b) On a les inégalités suivantes (toutes les intégrales convergent d'après **IV.2.a**) :

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{F}(x) - \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} t^{2k} e^{-t^2} dt \right| &= \left| \int_0^{+\infty} \left(\cos(xt) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} t^{2k} \right) e^{-t^2} dt \right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} \left| \cos(xt) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} t^{2k} \right| e^{-t^2} dt \\ &\stackrel{\text{IV.1.a}}{\leq} \int_0^{+\infty} \frac{(xt)^{2n+2}}{(2n+2)!} e^{-t^2} dt = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} J_{n+1} \\ &\leq J_0 \frac{x^{2n+2}}{4^{n+1}(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat par encadrement.

- c) Par linéarité de l'intégrale (toutes les convergences ont déjà été prouvées), on a

$$\int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} t^{2k} e^{-t^2} dt = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} J_k = J_0 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{4^k k!} x^{2k} = J_0 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{x^2}{4} \right)^k$$

donc, avec **IV.1.b** et $\frac{x^2}{4} \in \mathbb{R}^+$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} t^{2k} e^{-t^2} dt = J_0 e^{-x^2/4}$. Par unicité de la limite,

$$\text{on conclut } \mathcal{F}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2/4} \text{ pour tout réel } x$$