
L'usage des calculatrices est interdit

Dans tout ce problème, on considère α un réel tel que $\alpha > 1$.

I Résultats préliminaires.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les deux fonctions f_n et g_n sur $]0, \pi]$ par $f_0(x) = 0$ et

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n \cos(kx) \quad \text{et} \quad g_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

- a) Calculer $\int_0^\pi \cos(kx) \, dx$, pour $k \in \mathbb{N}^*$, et en déduire la valeur de $\int_0^\pi f_n(t) \, dt$.
 - b) Montrer que si $x \in]0, \pi]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}g_n(x)$.
 - c) Montrer que g_n est prolongeable par continuité en 0. On notera encore g_n la fonction ainsi prolongée. Quelle est alors la valeur de $g_n(0)$?
 - d) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^\pi g_n(t) \, dt$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \pi$.
2. On définit sur $[0, \pi]$ la fonction g par :

$$\forall x \in]0, \pi], g(x) = \frac{\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) - 1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{et} \quad g(0) = 0$$

- a) Montrer que g est dérivable en 0 et préciser $g'(0)$.
 - b) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$ et calculer g' .
 - c) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.
 - d) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \int_0^\pi g(x) \sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right) \, dx$.
Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, qu'il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|v_n| \leq \frac{A}{2n+1}$.
 - e) En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_n = \int_0^\pi f_n(x) \cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) \, dx$.
- a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $X_n = -\frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) + \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2}u_n$.
 - b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)$.
 - c) Pour $k \geq 1$, calculer $\int_0^\pi \cos(kx) \cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) \, dx$.
 - d) En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $X_n = \frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) \sum_{k=1}^n (-1)^k \left[\frac{1}{1+k\alpha} + \frac{1}{1-k\alpha} \right]$.

II Calcul d'une intégrale.

On pose dans la suite du problème $\beta = \frac{1}{\alpha}$; on a donc $0 < \beta < 1$.

On définit sur $]0, 1]$ les fonctions φ et ψ par :

$$\forall t \in]0, 1], \varphi(t) = \frac{t^{\beta-1}}{1+t} \quad \text{et} \quad \psi(t) = \frac{t^{-\beta}}{1+t}$$

1. Justifier la convergence, pour $\alpha > 1$, de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\alpha}$.

Dans la suite, on note I_α la valeur de cette intégrale :

$$\forall \alpha > 1, I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\alpha}.$$

2. Montrer que $\int_0^1 \varphi(t) dt$ est convergente et que, en posant $t = u^\alpha$,

$$\int_0^1 \varphi(t) dt = \alpha \int_0^1 \frac{du}{1+u^\alpha}.$$

3. Montrer que $\int_0^1 \psi(t) dt$ est convergente et que

$$\int_0^1 \psi(t) dt = \alpha \int_1^{+\infty} \frac{du}{1+u^\alpha}.$$

4. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose $\sigma_n(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k$.

- a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1], \left| \sigma_n(t) - \frac{1}{1+t} \right| \leq t^{n+1}$.

- b) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les deux inégalités suivantes :

$$\left| \int_0^1 \varphi(t) dt - \int_0^1 \sigma_n(t) t^{\beta-1} dt \right| \leq \frac{1}{n+1+\beta} \quad \text{et} \quad \left| \int_0^1 \psi(t) dt - \int_0^1 \sigma_{n-1}(t) t^{-\beta} dt \right| \leq \frac{1}{n+1-\beta}.$$

- c) Calculer $\int_0^1 \sigma_n(t) t^{\beta-1} dt + \int_0^1 \sigma_{n-1}(t) t^{-\beta} dt$ et en déduire, en utilisant **I.3.d**,

$$\int_0^1 \sigma_n(t) t^{\beta-1} dt + \int_0^1 \sigma_{n-1}(t) t^{-\beta} dt = \alpha + \frac{2X_n}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}.$$

- d) Déterminer la valeur de I_α .

III Vers la formule des compléments.

Dans la suite du problème, on note γ un réel de l'intervalle $]0, 1[$.

On pose :

$$G_\gamma = \int_0^{+\infty} t^{\gamma-1} e^{-t} dt \quad \text{et} \quad \forall x \in [0, +\infty[, \quad F_\gamma(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\gamma-1}}{t+1} e^{-xt} dt.$$

1. Démontrer que G_γ existe.

2. a) Démontrer que F_γ est bien définie sur $[0, +\infty[$.

b) À l'aide d'un changement de variable, déterminer un lien entre $F_\gamma(0)$ et $I_{1/\gamma}$ et en déduire

$$F_\gamma(0) = \frac{\pi}{\sin(\gamma\pi)}.$$

3. a) Montrer que, pour $x > 0$, $F_\gamma(x) \leq \frac{1}{x^\gamma} G_\gamma$; on pourra, entre autres, utiliser le changement de variable $u = xt$.

b) En déduire la limite, quand x tend vers $+\infty$, de $F_\gamma(x)$.

4. Démontrer que, pour $x > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^\gamma}{t+1} e^{-xt} dt$ est convergente.

Dans toute la suite du problème, on admettra que la fonction F_γ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, avec

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad F'_\gamma(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{t^\gamma}{t+1} e^{-xt} dt.$$

5. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, démontrer que :

$$F_\gamma(x) - F'_\gamma(x) = \frac{G_\gamma}{x^\gamma}.$$

6. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on pose :

$$h_\gamma(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\gamma} dt.$$

a) Montrer que h_γ est bien définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Justifier que h_γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et donner la valeur, pour $x > 0$, de $h'_\gamma(x)$.

c) En déduire que $H_\gamma : x \mapsto G_\gamma \times e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\gamma} dt$ est solution, sur $\mathbb{R}^{+*}$, de l'équation différentielle $y - y' = \frac{G_\gamma}{x^\gamma}$.

d) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} H_\gamma(x) = 0$.

e) En déduire que

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad F_\gamma(x) = H_\gamma(x).$$

7. Déduire des questions précédentes que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\gamma-1}}{t+1} dt = G_\gamma \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\gamma} dt$$

8. Démontrer l'identité suivante (*formule des compléments*) :

$$G_\gamma G_{1-\gamma} = \frac{\pi}{\sin(\gamma\pi)}$$

9. En déduire la valeur $G_{1/2}$ puis celle de l'intégrale de Gauss :

$$J_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

IV Une transformée de Fourier.

1. a) Montrer, à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, que, pour tout $u \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left| \cos(u) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} u^{2k} \right| \leq \frac{u^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

- b) Montrer que, pour $u \geq 0$, on a

$$e^{-u} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} u^k$$

2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt$; J_0 est donc l'intégrale de Gauss calculée à la fin de la partie précédente.

- a) Justifier, pour $n \geq 0$, que J_n existe.
b) À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une relation entre J_n et J_{n+1} .
c) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, que

$$J_n = J_0 \times \frac{(2n)!}{4^n n!}$$

3. Dans cette question, on définit la fonction $\mathcal{F}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t^2} dt.$$

- a) Justifier que $\mathcal{F}(x)$ existe, pour tout réel x fixé.
b) Montrer que

$$\mathcal{F}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} t^{2k} e^{-t^2} dt.$$

- c) En déduire la valeur de $\mathcal{F}(x)$.