

DEVOIR 05 : ALGÈBRE LINÉAIRE

PSI 1 2026-2027

mercredi 30 septembre 2026

QCM

1 Trigonométrie circulaire

$$\begin{array}{ll} \boxed{1.1} \quad \forall x \in \mathbb{R}, 1 - \cos(x) = 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) & \boxed{1.3} \quad \forall (p, q) \in \mathbb{R}^2, \cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \boxed{1.2} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tan(\pi + x) = \tan(x) & \boxed{1.4} \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \tan(x) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2(x)} - 1} \end{array}$$

2 Théorème du rang : soit E et F 2 $\mathbb{K}$ -evs de dimensions respectives n et p et $f \in \mathcal{L}(E, F)$

$$\begin{array}{ll} \boxed{2.1} \quad (n = p \text{ et } f \text{ injective}) \implies (f \text{ isomorphisme}) & \boxed{2.3} \quad (f \text{ surjective}) \implies (p \leq n) \\ \boxed{2.2} \quad (f \text{ injective}) \iff (\text{rg}(f) = n) & \boxed{2.4} \quad (n \leq p) \implies (f \text{ est injective}) \end{array}$$

3 Matrices : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ avec A, B inversibles

$$\begin{array}{ll} \boxed{3.1} \quad \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) & \boxed{3.3} \quad (AB)^T = A^T B^T \\ \boxed{3.2} \quad \det(AB) = \det(BA) & \boxed{3.4} \quad (AB)^{-1} = A^{-1} B^{-1} \end{array}$$

4 Propriétés : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$

$$\begin{array}{ll} \boxed{4.1} \quad \text{Si } A \text{ inversible, } \det(I_n + A^{-1}B) = \det(I_n + BA^{-1}) & \boxed{4.3} \quad \det : \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^* \text{ est surjectif} \\ \boxed{4.2} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \det(A + \lambda B) = \det(A) + \lambda^n \det(B) & \boxed{4.4} \quad \det : \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^* \text{ est injectif} \end{array}$$

Énoncé Soit E un $\mathbb{K}$ -espace de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E , f un endomorphisme de E . Définir les matrices A, A' et P et rappeler la classique formule de changement de bases les reliant toutes les trois.

Preuve Soit E un espace de dimension n , H un hyperplan de E et un vecteur $e \neq 0_E \in E$ tel que $E = H \oplus D$ où $D = \text{Vect}(e)$. Soit φ et ψ deux formes linéaires non nulles telles que $H = \text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\psi)$. Montrer qu'il existe un scalaire λ (que vous donnerez en fonction de φ, ψ et e) tel que $\psi = \lambda\varphi$.

Exercice 1 Soit un entier $n \geq 1$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit $f : E \rightarrow E$ définie par $f(P) = P - P(0)X$.

- a. Montrer que f est un endomorphisme injectif de E .
- b. En déduire que $\forall Q \in E, \exists! P \in E, P - XP(0) = Q$. Exprimer P en fonction de Q .

Exercice 2 Soit $n \geq 3$ et la matrice $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $A_n = (|i - j|)_{1 \leq i, j \leq n}$. Calculer $\det(A_n)$.

Indication : on pourra commencer par l'opération de GAUSS $C_1 \leftarrow C_1 + C_n$.

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question i,j vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

i · j	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Preuve

Énoncé

Exercice 1

Exercice 2

i · j	1	2	3	4	Fautes
1			X		
2	X	X	X		
3	X	X			
4	X		X		

1.1 Faux : par exemple pour $x = 0$, c'est $1 - \cos(x) = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ **1.2** Faux : la relation est vraie mais pas

pour tous les réels **1.3** Vrai : du cours **1.4** Faux : $\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} - 1$ mais $\tan(x) < 0$ si $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$.

2.1 Vrai : cours **2.2** Vrai : $\text{rg}(f) = \dim(E) \iff \dim(\text{Ker}(f)) = 0$ par le théorème du rang **2.3** Vrai : f surjective donc $\text{Im}(f) = F$ donc $n = \dim(E) = \dim(F) + \dim(\text{Ker}(f)) = p + \dim(\text{Ker}(f))$ **2.4** Faux : on peut prendre l'application nulle.

3.1 Vrai : du cours **3.2** Vrai : $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$ **3.3** Faux : c'est $(AB)^T = B^T A^T$ en général **3.4** Faux : c'est $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ en général.

4.1 Vrai : $\det(I_n + A^{-1}B) = \det(A^{-1}A + A^{-1}B) = \det(A^{-1})\det(A + B) = \det(A + B)\det(A^{-1})$ ce qui donne $\det(I_n + A^{-1}B) = \det(AA^{-1} + BA^{-1}) = \det(I_n + BA^{-1})$ **4.2** Faux : affreux ! **4.3** Vrai : si $\lambda \neq 0$, la matrice $D_1(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{1,1}$ de dilatation a pour déterminant λ **4.4** Faux : $\det(E_{1,1}) = \det(E_{2,2}) = 0$ si $n \geq 2$.

Énoncé

On définit $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Soit aussi P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, c'est-à-dire aussi $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}_E)$. Alors on sait que P est inversible et que $A = PA'P^{-1}$.

Preuve

Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de H (il en existe car $\dim(H) = \dim(E) - 1 = n - 1$), comme $E = H \oplus D$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{n-1}, e)$ est une base de E . Si on avait $\varphi(e) = 0$, la forme linéaire φ s'annulerait en les $e_1, \dots, e_{n-1}$ (car $H = \text{Ker}(\varphi)$) et en e_n donc elle s'annulerait sur $\mathcal{B}$ et serait nulle : non car $\text{Ker}(0) = E \neq H$. Ainsi $\varphi(e) \neq 0$ et on pose $\lambda = \frac{\psi(e)}{\varphi(e)}$. La forme linéaire $\theta = \psi - \lambda\varphi$ s'annule par construction en tous les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ car $\forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $\theta(e_k) = 0 - \lambda \cdot 0 = 0$ car $H = \text{Ker}(\psi) = \text{Ker}(\varphi)$ et $\theta(e_n) = \theta(e) = \psi(e) - \frac{\psi(e)}{\varphi(e)}\varphi(e) = 0$, elle est donc nulle en tout vecteur de E et on a $\psi = \lambda\varphi$.

Exercice 1

a. Soit $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors f va clairement de E dans E car $n \geq 1$ et on calcule $f(\lambda P + Q) = \lambda P + Q - (\lambda P + Q)(0)X = \lambda P + Q - \lambda P(0)X - Q(0)X = \lambda(P - P(0)X) + (Q - Q(0)X) = \lambda f(P) + f(Q)$ donc f est linéaire. De plus, si $P \in \text{Ker}(f)$, alors $P = P(X) = P(0)X$ (1) donc $P(0) = P(0) \cdot 0 = 0$ et, en reportant cette valeur dans (1), on obtient $P = 0$. Ainsi $\text{Ker}(f) = \{0\}$ et f est injective.

b. Comme f est un endomorphisme injectif en dimension finie, on sait qu'alors f est un automorphisme de E donc f est surjectif ce qui montre que $\forall Q \in E$, $\exists! P \in E$, $Q = f(P) = P - P(0)X$.

Comme $Q(0) = P(0) - P(0)0 = P(0)$, on a donc $P = Q + Q(0)X$ donc $f^{-1} : Q \mapsto Q + Q(0)X$.

Exercice 2

Avec l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_n$, on impose une colonne de $n - 1$ en première colonne, on peut donc factoriser le déterminant de A_n par $n - 1$ pour avoir une colonne de 1 à la place. Ensuite les opérations $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$, $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}$ jusqu'à $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ permettent d'obtenir (sans changer le déterminant ni la première ligne) des 1 et des -1 partout dans les $n - 1$ dernières lignes (à dessiner). On termine en effectuant les opérations $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, ensuite $L_4 \leftarrow L_4 + L_2$ jusqu'à $L_n \leftarrow L_n + L_2$ et on arrive à une matrice triangulaire supérieure. Ainsi, $\det(A_n) = (n - 1)(-1)(-2)^{n-2} = (-1)^{n-1}(n - 1)2^{n-2}$.