

# DEVOIR 06 : ALGÈBRE LINÉAIRE

PSI 1 2026-2027

mercredi 07 octobre 2026

## QCM

**1** Somme de sous-espaces : soit  $E$  un espace de dimension finie,  $E_1, \dots, E_d$  des sous-espaces de  $E$

**1.1**  $\dim \left( \sum_{k=1}^d E_k \right) \leq \sum_{k=1}^d \dim(E_k)$       **1.3**  $\sum_{k=1}^d E_k$  est directe  $\iff \dim \left( \sum_{k=1}^d E_k \right) = \sum_{k=1}^d \dim(E_k)$

**1.2**  $\dim \left( \prod_{k=1}^d E_k \right) = \sum_{k=1}^d \dim(E_k)$       **1.4**  $\sum_{k=1}^d E_k$  est directe  $\iff (\forall p \in \llbracket 1; d \rrbracket, E_p \cap \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^d E_k = \{0_E\})$

**2** Par blocs : soit  $n \geq 2$  et six matrices  $A, B, C, A', B', C'$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , puis les matrices suivantes définies par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}), M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & C' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) \text{ et } M'' = \begin{pmatrix} A'A & A'B + BC' \\ 0 & CC' \end{pmatrix}$$

**2.1**  $\det(M) = \det(AC)$

**2.3**  $M'' = MM'$

**2.2**  $\text{tr}(M) = \text{tr}(A) + \text{tr}(C)$

**2.4**  $\text{tr}(M'') = \text{tr}(MM')$

**3** Lagrange et VANDERMONDE : soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , des réels  $a_1, \dots, a_n$  distinctes deux à deux et des réels  $b_1, \dots, b_n$ , on définit la matrice  $V = (a_j^{i-1})_{1 \leq i, j \leq n}$

**3.1**  $\exists! P \in \mathbb{R}[X], \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, P(a_k) = b_k$       **3.3**  $V$  est inversible

**3.2**  $\exists! P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, P(a_k) = b_k$       **3.4**  $\det(V) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)$

**4** Polynômes d'endom. : soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ ,  $R = X^2 + 1$  et  $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$

**4.1**  $P(f + g) = P(f) + P(g)$

**4.3**  $R(f) = f^2 + 1$

**4.2**  $(P + Q)(f) = P(f) + Q(f)$

**4.4**  $(PQ)(f) = Q(f) \circ P(f)$

## Énoncé

Soit un  $\mathbb{K}$ -espace  $E$  de dimension finie,  $f$  un endomorphisme de  $E$ ,  $F$  un sous-espace de  $E$ ,  $G$  un supplémentaire de  $F$ ,  $\mathcal{B}_F$  une base de  $F$  et  $\mathcal{B}_G$  une base de  $G$  de sorte que  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$  est une base de  $E$ . Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  pour que  $F$  soit stable par  $f$ . Que représente l'une des matrices définie lors de cette écriture de  $M$  dans le cas où  $F$  est stable par  $f$  ?

## Preuve

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$  tels que  $f \circ g = g \circ f$ .

Montrer que  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont stables par  $g$ .

## Exercice 1

Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ ,  $D = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \\ b^3+c^3 & c^3+a^3 & a^3+b^3 \end{vmatrix}$  et  $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$ .

Exprimer  $D$  en fonction de  $\Delta$ . En déduire une expression factorisée de  $D$ .

## Exercice 2

Soit  $n \geq 1$  et  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on définit  $f : E \rightarrow E$  par  $f(M) = M + \text{tr}(M)I_n$ .

a. Sans preuve, que peut-on dire de  $f$  ?

b. Déterminer la dimension de  $F = \text{Ker}(f - \text{id}_E)$ .

c. Calculer  $f(I_n)$ . Est-ce que  $I_n \in F$  ?

d. En déduire la matrice de  $f$  dans une base bien choisie. Que valent  $\text{tr}(f)$  et  $\det(f)$  ?

|           |       |          |
|-----------|-------|----------|
| DEVOIR 06 | NOM : | PRÉNOM : |
|-----------|-------|----------|

**QCM** Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question i,j vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

| i · j | 1 | 2 | 3 | 4 | Fautes |
|-------|---|---|---|---|--------|
| 1     |   |   |   |   |        |
| 2     |   |   |   |   |        |
| 3     |   |   |   |   |        |
| 4     |   |   |   |   |        |

**Énoncé**

**Preuve**

**Exercice 1**

|                   |
|-------------------|
| <b>Exercice 2</b> |
|-------------------|

| i · j | 1 | 2 | 3 | 4 | Fautes |
|-------|---|---|---|---|--------|
| 1     | X | X | X | X |        |
| 2     | X |   |   | X |        |
| 3     |   | X | X |   |        |
| 4     |   | X |   | X |        |

**1.1** Vrai : pour  $d = 2$  c'est la formule de GRASSMANN et ensuite c'est une récurrence sur  $d$  en utilisant  $\sum_{k=1}^{d+1} E_k = E_{d+1} + \sum_{k=1}^d E_k$  et GRASSMANN **1.2** Vrai : du cours **1.3** Vrai : du cours **1.4** Vrai : du cours.

**2.1** Vrai : car  $\det(AC) = \det(A)\det(C)$  **2.2** Faux : car  $\text{tr}(M) = \text{tr}(A) + \text{tr}(C) \neq \text{tr}(A)\text{tr}(C)$  en général **2.3** Faux :  $MM' = \begin{pmatrix} AA' & BA' + BC' \\ 0 & CC' \end{pmatrix}$  et le produit n'est pas commutatif dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  **2.4** Vrai : car avec le produit précédent, on a  $\text{tr}(MM') = \text{tr}(AA') + \text{tr}(CC') = \text{tr}(A'A) + \text{tr}(C'C)$ .

**3.1** Faux : il y en a une infinité **3.2** Vrai : du cours **3.3** Vrai : car les  $a_j - a_i$  sont tous non nuls et  $\det(V)$  en est le produit **3.4** Faux : c'est  $a_j - a_i$ .

**4.1** Faux : par exemple avec  $P = 1$ ,  $\text{id}_E \neq 2\text{id}_E$  **4.2** Vrai : du cours **4.3** Faux :  $f^2 + 1$  n'a aucun sens,  $R(f) = f^2 + \text{id}_E$  **4.4** Vrai :  $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$  et  $P(f)$  et  $Q(f)$  commutent.

**Énoncé** D'après le cours,  $F$  est stable par  $f$  si et seulement si  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  est triangulaire supérieure par blocs.

Si  $F$  est stable par  $f$ ,  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$  avec  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f|_F)$ .

**Preuve** • Soit  $x$  un vecteur de  $\text{Ker}(f)$ , alors  $f(x) = 0_E$ . Ainsi  $0_E = g(0_E) = g(f(x)) = g \circ f(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$  donc  $g(x) \in \text{Ker}(f)$ . Par conséquent  $\text{Ker}(f)$  est bien stable par  $g$ .

• Soit  $x \in \text{Im}(f)$ , alors il existe  $a \in E$  tel que  $x = f(a)$ . Ainsi  $g(x) = g(f(a)) = g \circ f(a) = f \circ g(a) = f(g(a))$  donc  $g(x) \in \text{Im}(f)$ . Par conséquent  $\text{Im}(f)$  est bien stable par  $g$ .

**Exercice 1** Notons  $A$  la colonne contenant dans l'ordre  $a$ ,  $a^2$ ,  $a^3$ . Les colonnes  $B$ ,  $C$  sont définies de même.

Alors  $D = \det(B + C, A + C, A + B) = \det(B, A, A) + \dots + \det(C, C, B)$  (8 termes) en utilisant la multilinéarité.

Mais par alternance (deux fois la même colonne : déterminant nul) :  $D = \det(B, C, A) + \det(C, A, B)$ .

Par antisymétrie,  $\det(B, C, A) = \det(A, B, C) = \det(C, A, B)$  (2 échanges de colonnes et  $(-1)^2 = 1$ ) :  $D = 2\Delta$ .

En factorisant par  $a$  dans la colonne  $A$ , etc... et d'après VANDERMONDE :  $D = 2abc(c - a)(c - b)(b - a)$ .

**Exercice 2** a. Bien sûr, l'application  $f$  est bien définie et elle est linéaire.

b. Pour  $M \in E$ ,  $M \in \text{Ker}(f - \text{id}_E) \iff f(M) = M \iff \text{tr}(M)I_n = 0 \iff \text{tr}(M) = 0$  ce qui prouve que  $F = \text{Ker}(\text{tr})$ . Comme  $\text{tr}$  est une forme linéaire non nulle sur  $E$ , on sait que  $F$  est un hyperplan de  $E$  donc  $\dim(F) = n^2 - 1$ .

c. On a  $f(I_n) = I_n + nI_n = (n + 1)I_n$ . Comme  $n + 1 \neq 0$ ,  $I_n \notin F$ .

d. Si on prend une base  $\mathcal{B}_1$  de  $F$ , comme  $I_n \notin F$ , la famille  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1(I_n)$  est libre et elle comporte  $n^2$  vecteurs dans  $E$  de dimension  $n^2$ , ainsi  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ . Par construction  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{diag}(1, \dots, 1, n + 1)$  donc  $\text{tr}(f) = (n^2 - 1) \times 1 + 1 \times (n + 1) = n^2 + n$  et  $\det(f) = 1^{n^2 - 1} \times (n + 1)^1 = n + 1$ .