

PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 05

PSI 1 2026-2027

du lundi 12/10 au vendredi 16/10

1 Révisions d'algèbre linéaire : voir le programme précédent

2 Algèbre linéaire : voir le programme précédent +

- polynômes annulateurs de f , polynôme minimal en dimension finie (hors programme) ;
- exemples en dimension infinie où le seul polynôme annulateur est 0 ;
- utilisation d'un polynôme annulateur non nul pour calculer les puissances d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée ;

3 Séries numériques, propriétés :

- définition, série convergente, divergente, somme partielle et reste d'une série convergente ;
- opérations algébriques sur les séries convergentes (et leurs sommes), divergentes ;
- condition nécessaire de convergence ($\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$) : divergence grossière ;
- équivalence entre convergence d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et convergence de la série $\sum_{n \geq 0} (u_{n+1} - u_n)$;
- pour les séries complexes, passage par les parties réelles et imaginaires ;
- séries de RIEMANN et séries géométriques : CNS de convergence, somme, équivalent ;

4 Séries à termes positifs :

- une série à termes positifs converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée ;
- théorème de comparaison : majoration, grand O, équivalence entre les termes ;
- définition de la constante d'EULER par la série harmonique et équivalent de STIRLING ;
- règle de D'ALEMBERT ; cas pratique $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n$ selon les cas ; comparaison logarithmique (HP) ;
- comparaison série-intégrale : équivalence entre convergence d'une intégrale et d'une série ;

QUESTIONS DE COURS :

- 1 définir ce qu'est une somme directe de plusieurs sous-espaces (déf. 2.41)
- 2 définir ce qu'est un polynôme d'endomorphisme (déf. 2.44)
- 3 énoncer la caractérisation d'une somme directe par les dimensions en dimension finie (th. 2.75)
- 4 énoncer le lien entre stabilité d'un sous-espace par un endomorphisme f et existence d'une base adaptée dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure par blocs (prop. 2.78)
- 5 énoncer les différentes implications sur la "linéarité" de la convergence des séries (prop. 3.3)
- 6 énoncer le théorème de comparaison version séries à termes positifs (th. 3.9)
- 7 énoncer le théorème de comparaison version séries à termes quelconques (th. 3.12)
- 8 prouver la formule des déterminants de VANDERMONDE (prop. 2.86)
- 9 prouver que si $f \in \mathcal{L}(E)$ et E de dimension finie, il existe un $P \neq 0$ annulateur de f (prop. 2.89)
- 10 prouver le théorème sur la dualité suite/série (th. 3.5)

Prévision pour la prochaine semaine : séries numériques