

DEVOIR 06 : ALGÈBRE LINÉAIRE

PSI 1 2026-2027

mercredi 07 octobre 2026

QCM

1 Somme de sous-espaces : soit E un espace de dimension finie, $E_1, \dots, E_d$ des sous-espaces de E

$$\boxed{1.1} \quad \dim \left(\sum_{k=1}^d E_k \right) \leq \sum_{k=1}^d \dim(E_k) \quad \boxed{1.3} \quad \sum_{k=1}^d E_k \text{ est directe} \iff \dim \left(\sum_{k=1}^d E_k \right) = \sum_{k=1}^d \dim(E_k)$$

$$\boxed{1.2} \quad \dim \left(\prod_{k=1}^d E_k \right) = \sum_{k=1}^d \dim(E_k) \quad \boxed{1.4} \quad \sum_{k=1}^d E_k \text{ est directe} \iff (\forall p \in \llbracket 1; d \rrbracket, E_p \cap \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^d E_k = \{0_E\})$$

2 Par blocs : soit $n \geq 2$ et six matrices A, B, C, A', B', C' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis les matrices suivantes définies par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}), M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & C' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) \text{ et } M'' = \begin{pmatrix} A'A & A'B + BC' \\ 0 & CC' \end{pmatrix}$$

$$\boxed{2.1} \quad \det(M) = \det(AC)$$

$$\boxed{2.3} \quad M'' = MM'$$

$$\boxed{2.2} \quad \text{tr}(M) = \text{tr}(A) + \text{tr}(C)$$

$$\boxed{2.4} \quad \text{tr}(M'') = \text{tr}(MM')$$

3 Lagrange et VANDERMONDE : soit $n \in \mathbb{N}^*$, des réels $a_1, \dots, a_n$ distinctes deux à deux et des réels $b_1, \dots, b_n$, on définit la matrice $V = (a_j^{i-1})_{1 \leq i, j \leq n}$

$$\boxed{3.1} \quad \exists! P \in \mathbb{R}[X], \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, P(a_k) = b_k$$

$$\boxed{3.3} \quad V \text{ est inversible}$$

$$\boxed{3.2} \quad \exists! P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, P(a_k) = b_k$$

$$\boxed{3.4} \quad \det(V) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)$$

4 Polynômes d'endom. : soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $R = X^2 + 1$ et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$

$$\boxed{4.1} \quad P(f + g) = P(f) + P(g)$$

$$\boxed{4.3} \quad R(f) = f^2 + 1$$

$$\boxed{4.2} \quad (P + Q)(f) = P(f) + Q(f)$$

$$\boxed{4.4} \quad (PQ)(f) = Q(f) \circ P(f)$$

Énoncé

Soit un $\mathbb{K}$ -espace E de dimension finie, f un endomorphisme de E , F un sous-espace de E , G un supplémentaire de F , $\mathcal{B}_F$ une base de F et $\mathcal{B}_G$ une base de G de sorte que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est une base de E . Donner une condition nécessaire et suffisante sur $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ pour que F soit stable par f . Que représente l'une des matrices définie lors de cette écriture de M dans le cas où F est stable par f ?

Preuve

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$.

Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont stables par g .

Exercice 1

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $D = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \\ b^3+c^3 & c^3+a^3 & a^3+b^3 \end{vmatrix}$ et $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$.

Exprimer D en fonction de Δ . En déduire une expression factorisée de D .

Exercice 2

Soit $n \geq 1$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $f : E \rightarrow E$ par $f(M) = M + \text{tr}(M)I_n$.

- Sans preuve, que peut-on dire de f ?
- Déterminer la dimension de $F = \text{Ker}(f - \text{id}_E)$.
- Calculer $f(I_n)$. Est-ce que $I_n \in F$?
- En déduire la matrice de f dans une base bien choisie. Que valent $\text{tr}(f)$ et $\det(f)$?

DEVOIR 06	NOM :	PRÉNOM :
-----------	-------	----------

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question i,j vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

i · j	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

i · j	1	2	3	4	Fautes
1	X	X	X	X	
2	X			X	
3		X	X		
4		X		X	

1.1 Vrai : pour $d = 2$ c'est la formule de GRASSMANN et ensuite c'est une récurrence sur d en utilisant $\sum_{k=1}^{d+1} E_k = E_{d+1} + \sum_{k=1}^d E_k$ et GRASSMANN **1.2** Vrai : du cours **1.3** Vrai : du cours **1.4** Vrai : du cours.

2.1 Vrai : car $\det(AC) = \det(A)\det(C)$ **2.2** Faux : car $\text{tr}(M) = \text{tr}(A) + \text{tr}(C) \neq \text{tr}(A)\text{tr}(C)$ en général **2.3** Faux : $MM' = \begin{pmatrix} AA' & BA' + BC' \\ 0 & CC' \end{pmatrix}$ et le produit n'est pas commutatif dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **2.4** Vrai : car avec le produit précédent, on a $\text{tr}(MM') = \text{tr}(AA') + \text{tr}(CC') = \text{tr}(A'A) + \text{tr}(C'C)$.

3.1 Faux : il y en a une infinité **3.2** Vrai : du cours **3.3** Vrai : car les $a_j - a_i$ sont tous non nuls et $\det(V)$ en est le produit **3.4** Faux : c'est $a_j - a_i$.

4.1 Faux : par exemple avec $P = 1$, $\text{id}_E \neq 2\text{id}_E$ **4.2** Vrai : du cours **4.3** Faux : $f^2 + 1$ n'a aucun sens, $R(f) = f^2 + \text{id}_E$ **4.4** Vrai : $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$ et $P(f)$ et $Q(f)$ commutent.

Énoncé D'après le cours, F est stable par f si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire supérieure par blocs.

Si F est stable par f , $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ avec $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f|_F)$.

Preuve • Soit x un vecteur de $\text{Ker}(f)$, alors $f(x) = 0_E$. Ainsi $0_E = g(0_E) = g(f(x)) = g \circ f(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$ donc $g(x) \in \text{Ker}(f)$. Par conséquent $\text{Ker}(f)$ est bien stable par g .

• Soit $x \in \text{Im}(f)$, alors il existe $a \in E$ tel que $x = f(a)$. Ainsi $g(x) = g(f(a)) = g \circ f(a) = f \circ g(a) = f(g(a))$ donc $g(x) \in \text{Im}(f)$. Par conséquent $\text{Im}(f)$ est bien stable par g .

Exercice 1 Notons A la colonne contenant dans l'ordre a , a^2 , a^3 . Les colonnes B , C sont définies de même.

Alors $D = \det(B + C, A + C, A + B) = \det(B, A, A) + \dots + \det(C, C, B)$ (8 termes) en utilisant la multilinéarité.

Mais par alternance (deux fois la même colonne : déterminant nul) : $D = \det(B, C, A) + \det(C, A, B)$.

Par antisymétrie, $\det(B, C, A) = \det(A, B, C) = \det(C, A, B)$ (2 échanges de colonnes et $(-1)^2 = 1$) : $D = 2\Delta$.

En factorisant par a dans la colonne A , etc... et d'après VANDERMONDE : $D = 2abc(c - a)(c - b)(b - a)$.

Exercice 2 a. Bien sûr, l'application f est bien définie et elle est linéaire.

b. Pour $M \in E$, $M \in \text{Ker}(f - \text{id}_E) \iff f(M) = M \iff \text{tr}(M)I_n = 0 \iff \text{tr}(M) = 0$ ce qui prouve que $F = \text{Ker}(\text{tr})$. Comme tr est une forme linéaire non nulle (car $\text{tr}(I_n) = n \neq 0$) sur E , on sait que F est un hyperplan de E donc $\dim(F) = n^2 - 1$.

c. On a $f(I_n) = I_n + nI_n = (n + 1)I_n$. Comme $n \neq 0$, $f(I_n) \neq I_n$ donc $I_n \notin F$.

d. Si on prend une base $\mathcal{B}_1$ de F , comme $I_n \notin F$, la famille $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \{I_n\}$ est libre et elle comporte n^2 vecteurs dans E de dimension n^2 , ainsi $\mathcal{B}$ est une base de E . Par construction $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{diag}(1, \dots, 1, n + 1)$ donc $\text{tr}(f) = (n^2 - 1) \times 1 + 1 \times (n + 1) = n^2 + n$ et $\det(f) = 1^{n^2-1} \times (n + 1)^1 = n + 1$.