CHAPITRE 5
SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

⊙ On a déjà constaté que les réels (et les complexes aussi) peuvent s'écrire comme limites de suites de réels ou comme somme de séries numériques réelles. Il est donc naturel d'étudier la représentation de certaines fonctions comme limite de suites de fonctions ou comme somme d'un série de fonctions. Une question fondamentale est alors l'étude des propriétés de ces fonctions limites ou de ces fonctions sommes en rapport avec les propriétés de fonctions composant la suite ou la série : parité, périodicité, continuité, existence de limites, dérivabilité, intégrabilité, etc...

Tous ces problèmes ont commencé à être posés au début du XIX^{e} siècle, avec l'introduction des séries entières et des séries trigonométriques. Mais ce n'est qu'avec l'introduction de la notion de convergence uniforme que des réponses définitives ont pu être apportées.

On se sert des séries entières (ou séries de TAYLOR) en analyse réelle ou même en analyse complexe avec les fonctions holomorphes, en combinatoire ou en probabilités, des séries de DIRICHLET et des séries de RIEMANN en arithmétique, des séries de FOURIER en analyse harmonique ou en théorie du signal : le champ d'investigation et d'application des séries de fonctions est extrêmement vaste !

TABLE DES MATIÈRES

Programme officiel ..... page 100

Partie 1 : modes de convergence
- 1 : convergence des suites de fonctions ..... page 102
- 2 : convergence des séries de fonctions ..... page 103

Partie 2 : théorèmes de domination
- 1 : théorème de convergence dominée ..... page 105
- 2 : théorème d'intégration terme à terme ..... page 106

Partie 3 : continuité et limite des suites et séries de fonctions
- 1 : continuité ..... page 107
- 2 : double limite ..... page 107
- 3 : exemples d'étude ..... page 108

Partie 4 : intégration et dérivation des suites et séries de fonctions
- 1 : intégration ..... page 109
- 2 : dérivation ..... page 110

⊙ Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points distincts.
Si f est une fonction bornée sur I, on note $||f||_\infty$ sa norme infinie définie par $||f||_\infty = \underset{x\in I}{\text{Sup}}\,|f(x)|$.
S'il y a ambiguïté sur l'ensemble de départ de f, on notera plus précisément $||f||_{\infty,I} = \underset{x\in I}{\text{Sup}}\,|f(x)|$.

PROGRAMME

Cette section a pour objectif de définir différents modes de convergence d'une suite, d'une série de fonctions et d'étudier le transfert à la limite, à la somme des propriétés des fonctions.

Les fonctions sont définies sur un intervalle I *de* $\mathbb{R}$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

1 : Modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions

Contenus	Capacités & Commentaires
Convergence simple d'une suite de fonctions.	
Convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.	
Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.	
Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série de fonctions.	Utilisation d'une majoration uniforme de $\lvert f_n(x)\rvert$ pour établir la convergence normale de $\sum f_n$.
La convergence normale entraîne la convergence uniforme.	La convergence normale entraîne la convergence absolue en tout point.

2 : Suites et séries de fonctions intégrables

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination (resp. convergence de la série des intégrales), sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux.

Contenus	Capacités & Commentaires
Théorème de convergence dominée : si une suite (f_n) de fonctions continues par morceaux sur I converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et s'il existe une fonction φ intégrable sur I vérifiant $\lvert f_n\rvert \leqslant \varphi$ pour tout n, alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et $\int_I f_n(t)\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f(t)\,dt$.	La démonstration est hors programme.
Théorème d'intégration terme à terme : si une série $\sum f_n$ de fonctions intégrables sur I converge simplement, si sa somme est continue par morceaux sur I, et si la série $\sum \int_I \lvert f_n(t)\rvert\,dt$ converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,dt$.	La démonstration est hors programme.

3 : Régularité de la limite d'une suite de fonctions

Contenus	Capacités & Commentaires
Continuité de la limite d'une suite de fonctions : si une suite (f_n) de fonctions continues sur I converge uniformément vers f sur I, alors f est continue sur I.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Intégration sur un segment de la limite d'une suite de fonctions :
si une suite (f_n) de fonctions continues converge uniformément vers f sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)dt$$

Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions :
si une suite (f_n) de fonctions de classe C^1 sur un intervalle I converge simplement sur I vers une fonction f, et si la suite (f'_n) converge uniformément sur I vers une fonction g, alors f est de classe C^1 sur I et $f' = g$.
Extension aux suites de fonctions de classe C^k, sous l'hypothèse de convergence uniforme de $(f_n^{(k)})$ et de convergence simple de $(f_n^{(j)})$ pour $0 \leqslant j < k$.

En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

4 : Régularité de la somme d'une série de fonctions

Contenus	Capacités & Commentaires
Continuité de la somme d'une série de fonctions : si une série $\sum f_n$ de fonctions continues sur I converge uniformément sur I, alors sa somme est continue sur I.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Théorème de la double limite : si une série $\sum f_n$ de fonctions définies sur I converge uniformément sur I et si, pour tout n, f_n admet une limite ℓ_n en a borne de I (éventuellement infinie), alors la série $\sum \ell_n$ converge, la somme de la série admet une limite en a et $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.	La démonstration est hors programme.
Intégration de la somme d'une série de fonctions sur un segment : si une série $\sum f_n$ de fonctions continues converge uniformément sur $[a,b]$ alors la série des intégrales est convergente et $\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)dt$.	
Dérivation de la somme d'une série de fonctions : si une série $\sum f_n$ de classe C^1 converge simplement sur un intervalle I et si la série $\sum f'_n$ converge uniformément sur I, alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^1 sur I et sa dérivée est $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation. Extension à la classe C^k sous hypothèse similaire à celle décrite dans le cas des suites de fonctions.

PARTIE 5.1 : MODES DE CONVERGENCE

5.1.1 : Convergence des suites de fonctions

DÉFINITION 5.1 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* I *dans* $\mathbb{K}$.
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement sur** I *vers* $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ *si* $\forall x \in I,\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.
La fonction $f : I \to \mathbb{K}$ *est alors appelée la* **limite simple** *de la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EXEMPLE 5.1 : La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n : x \in [0;1] \mapsto x^n$ converge simplement sur $[0;1]$ vers la fonction f telle que $f(x) = 0$ si $x \in [0;1[$ et $f(1) = 1$.

REMARQUE 5.1 :
- *Cela signifie donc* $\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon$.
- *Ou encore que* $\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$.
- *Si* $(f_n)_{n\geqslant 0}$ *converge simplement vers* f *sur* I, *alors elle le fait aussi sur* J *si* $J \subset I$.
- *Si les fonctions* f_n *sont toutes positives (resp. négatives, croissantes, décroissantes, paires, impaires,* T*-périodiques) et que* $(f_n)_{n\geqslant 0}$ *converge simplement vers* f *sur* I, *alors la fonction* f *est aussi positive (resp. négative, croissante, décroissante, paire, impaire,* T*-périodique).*

DÉFINITION 5.2 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* I *dans* $\mathbb{K}$.
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur** I *vers* f *si les* $(f_n - f)$ *sont bornées sur* I *à partir d'un certain rang et si* $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - f||_{\infty,I} = 0$.

EXEMPLE 5.2 : Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$; montrer que f_n est de classe C^1 et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qui n'est pas de classe C^1.

REMARQUE 5.2 :
- *Si* g *est bornée sur* I *et* $J \subset I$, *alors* g *est bornée sur* J *et* $||g||_{\infty,J} \leqslant ||g||_{\infty,I}$.
- *Si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* I, *elle le fait sur tout partie* J *de* I.
- *Cela signifie :* $\forall \varepsilon > 0\ , \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.
- *Contrairement à la convergence simple : l'entier* n_0 *ne dépend que de* ε *et est indépendant de* $x \in I$.

DÉFINITION 5.3 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* I *dans* $\mathbb{K}$. *On dit que la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur tout segment de** I *vers* f *si pour tout segment* $[a;b] \subset I$ *les* $(f_n - f)$ *sont bornées sur* $[a;b]$ *à partir d'un certain rang et si* $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - f||_{\infty,[a;b]} = 0$ *où* $||f_n - f||_{\infty,[a;b]} = \sup\limits_{x\in[a;b]} |f_n(x) - f(x)|$.

PROPOSITION : IMPLICATIONS ENTRE LES DIFFÉRENTES CONVERGENCES 5.1 :
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **CVU sur** I **vers** f $\Longrightarrow$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **CVUTS de** I **vers** f $\Longrightarrow$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **CVS vers** f **sur** I**.**

EXERCICE 5.3 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour quels α y a-t-il convergence uniforme ?

REMARQUE 5.3 : • *On a donc* $\forall \varepsilon > 0,\ \forall [a;b] \subset I,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in [a;b],\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ *si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f *sur tout segment de* I. *L'entier* n_0 *ne dépend que de* ε, a *et* b.

• *Pour* I *segment, les notions de convergence uniforme sur* I *et sur tout segment de* I *sont équivalentes.*

EXERCICE 5.4 : Modes de convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{nx}{1+(nx)^2}$.

5.1.2 : Convergence des séries de fonctions

DÉFINITION 5.4 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions, on dit que la série de fonctions* $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ **converge simplement sur** I *si* $\forall x \in I,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ *est convergente. Dans ce cas, on définit sa* **somme** S *par* $\forall x \in I,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *et, pour* $n \in \mathbb{N}$, *son* **reste d'ordre** n *par* $\forall x \in I,\ R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

REMARQUE 5.4 : • *Si* $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *converge simplement sur* I *alors* $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y converge simplement vers* 0.

• *Si les* f_n *sont toutes croissantes (resp. décroissantes, paires, impaires,* T*-périodiques) et que* $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ *converge simplement vers* S *sur* I, *alors* S *l'est aussi.*

DÉFINITION 5.5 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* I *dans* $\mathbb{K}$.

- *On dit que la série de fonctions* $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ **converge uniformément sur** I *si* $\left(S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* I *; cela signifie que la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *converge simplement sur* I *et la suite de fonctions* $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* 0 *sur* I *(*$\lim_{n\to+\infty} ||R_n||_{\infty,I} = 0$*).*
- *On dit que la série de fonctions* $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ **converge uniformément sur tout segment de** I *si* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur tout segment de* I, *c'est-à-dire si* $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *converge simplement sur* I *et* $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* 0 *sur tout segment de* I.

REMARQUE 5.5 : Si $J \subset I$ *et que la série de fonctions* $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ *converge uniformément sur* I, *comme* $||R_n||_{\infty,J} \leqslant ||R_n||_{\infty,I}$ *quand* R_n *est bornée sur* I, *on a aussi convergence uniforme de* $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ *sur* J.

EXEMPLE 5.5 : Si $f_n(x) = x^n$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur $]-1;1[$ vers $S : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]-1;1[$, mais pas sur $]-1;1[$.

DÉFINITION 5.6 :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions bornées de* I *dans* $\mathbb{K}$.

- *On dit que la série de fonctions* $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ **converge normalement sur** I *si* $\sum_{n\in\mathbb{N}} ||f_n||_{\infty,I}$ *converge.*
- *On dit que la série de fonctions* $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ **converge normalement sur tout segment de** I *si, pour tout segment* $[a; b] \subset I$*, la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} ||f_n||_{\infty,[a;b]}$ *converge.*

REMARQUE 5.6 : • *Si* $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ *converge normalement sur un intervalle* I *et si* J *est un intervalle tel que* $J \subset I$*, alors* $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ *converge aussi normalement sur* J *car* $\forall n \in \mathbb{N},\ ||f_n||_{\infty,J} \leqslant ||f_n||_{\infty,I}$.

• *Une condition nécessaire pour que la série de fonctions* $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ *converge normalement sur* I *est donc que la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers la fonction nulle sur* I.

THÉORÈME : IMPLICATIONS ENTRE LES DIFFÉRENTES CONVERGENCES 5.2 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **une suite de fonctions. On a les cinq implications suivantes, qui ne sont que des implications :**

$$\begin{array}{ccc}
\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \text{ converge normalement sur I} & \Longrightarrow & \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \text{ converge normalement sur tout segment de I} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \text{ converge uniformément sur I} & \Longrightarrow & \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \text{ converge uniformément sur tout segment de I} \\
 & & \Downarrow \\
 & & \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \text{ converge simplement sur I}
\end{array}$$

EXEMPLE 5.6 : Pour $n \geqslant 1$, soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^2+1}$.

Établir que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qui est 2π-périodique.

REMARQUE 5.7 :

• *Si* $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *converge normalement sur tout segment de* I *alors pour tout* $x \in I$*, la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ *est absolument convergente, c'est-à-dire que la série de fonctions* $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n|$ *converge simplement sur* I.

• *Pour montrer que* $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *converge normalement sur* I*, il suffit de trouver une suite* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\forall x \in I,\ |f_n(x)| \leqslant \alpha_n$ *et telle que* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$ *est une série convergente.*

EXERCICE CLASSIQUE 5.7 : Pour $n \geqslant 1$, soit $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $g_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x^2}$.

Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ sur $\mathbb{R}$.

PARTIE 5.2 : THÉORÈMES DE DOMINATION

5.2.1 : Théorème de convergence dominée

THÉORÈME DE CONVERGENCE DOMINÉE (ÉNORME) 5.3 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **une suite de fonctions. On suppose que :**

- (H_1) **la suite** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement sur** I **vers** f**,**
- (H_2) **les fonctions** f_n **et la fonction** f **sont continues par morceaux sur** I**,**
- (H_3) $\exists \varphi : I \to \mathbb{R}^+$ **continue par morceaux et intégrable sur** I **telle que** $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leqslant \varphi$**.**

Alors :

- (R_1) **Les fonctions** f_n **et la fonction** f **sont intégrables sur** I**.**
- (R_2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$**.**

DÉMONSTRATION : hors programme.

EXEMPLE 5.8 : Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} (n+1)\sin^n(x)\cos(x)dx$. Qu'en conclure ?

EXERCICE CLASSIQUE 5.9 : Soit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que $\forall t \in [0;\sqrt{n}\,],\ f_n(t) = \left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)^n$ et $f_n(t) = 0$ si $t > \sqrt{n}$ dès que $n \geqslant 1$. Exprimer $\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$ en fonction des intégrales de WALLIS. En déduire la valeur de l'intégrale de GAUSS : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

ORAL BLANC 5.10 : CCP PSI 2014 Gabriel Detraz Soit $I_n = \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{t(1+t^2)} \sin\left(\dfrac{t}{n}\right)dt$.

a. Vérifier que I_n est bien défini et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

b. Trouver un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

5.2.2 : Théorème d'intégration terme à terme

THÉORÈME D'INTÉGRATION TERME À TERME (ÉNORME) 5.4 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **une suite de fonctions qui vérifient les conditions :**

- (H_1) **la série de fonctions** $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ **converge simplement sur** I **vers** S**,**
- (H_2) **les fonctions** f_n **sont continues par morceaux et intégrables sur** I**,**
- (H_3) **la fonction** S **est continue par morceaux sur** I**,**
- (H_4) **la série numérique** $\sum_{n\geqslant 0}\left(\int_I |f_n|\right)$ **converge.**

Alors (R_1) S **est intégrable sur** I (R_2) $\sum_{n\geqslant 0}\int_I f_n$ **converge.** (R_3) $\int_I S = \int_I\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n$**.**

DÉMONSTRATION : hors programme.

EXERCICE CONCOURS 5.11 : X/Cachan PSI 2017

a. Calculer $\int_0^1 x^n \ln x\,dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Montrer que $\int_0^1 \ln x \ln(1-x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$.

c. En calculer la valeur exacte.

ORAL BLANC 5.12 : Montrer que, si $x > 0$, $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t-1}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$.

EXEMPLE 5.13 : • Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq 1$, calculer $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{z-e^{it}}$.

• Existence et calcul de $\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}dt$.

REMARQUE 5.8 : • *L'hypothèse* $\sum_{n\geqslant 0}\int_I f_n$ *converge ne suffit pas.*

• *Si vous devez prouver une formule* $\int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *et que* $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ *n'est que semi-convergente, le TITT ne convient pas car avec les hypothèses du théorème* $\sum_{n\geqslant 0}\left(\int_I |f_n|\right)$ *converge donc* $\sum_{n\geqslant 0}\left|\int_I f_n\right|$ *converge.*

• *On pourra alors établir la relation* $\int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *en appliquant le théorème de convergence dominée sur la suite des sommes partielles de la série de fonctions.*

EXERCICE CONCOURS 5.14 : Mines PSI 2016 Mathieu Perrin II
Comparer les quantités $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ et $\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}dt$.

PARTIE 5.3 : CONTINUITÉ ET LIMITE DES SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

5.3.1 : Continuité

THÉORÈME DE CONTINUITÉ D'UNE LIMITE DE SUITE DE FONCTIONS CONTINUES PAR CONVERGENCE UNIFORME (ÉNORME) 5.5 :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **une suite de fonctions qui converge uniformément sur** I **(ou sur tout segment de** I**) vers la fonction** $f : I \to \mathbb{K}$**, alors :**

(i) Soit $a \in I$**, si pour tout** $n \in \mathbb{N}$**,** f_n **est continue en** a **alors** f **est continue en** a**.**

(ii) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$**,** f_n **est continue sur** I **alors** f **est continue sur** I**.**

EXEMPLE 5.15 : Que dire de la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$?

THÉORÈME DE CONTINUITÉ D'UNE SOMME DE SÉRIE DE FONCTIONS CONTINUES PAR CONVERGENCE UNIFORME OU NORMALE (ÉNORME) 5.6 :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **une suite de fonctions ; on suppose que :**

(i) la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ **converge uniformément (ou normalement) sur** I **(ou sur tout segment de** I**) vers** S**,**

(ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$**, la fonction** f_n **est continue sur** I**,**

alors la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ **de la série de fonctions est continue sur** I**.**

EXEMPLE 5.16 : Que dire de la convergence de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur $[0;1]$ si $f_n : x \mapsto (1-x)x^n$?

EXEMPLE FONDAMENTAL 5.17 : Montrer que la fonction ζ de RIEMANN définie sur $]1;+\infty[$ par $\forall x > 1,\ \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$ est continue sur $]1;+\infty[$ ainsi que η sur $\mathbb{R}_+^*$ si $\forall x > 0,\ \eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

5.3.2 : Double limite

REMARQUE HP 5.9 : Le théorème de double limite n'est au programme que pour les séries de fonctions mais il n'en demeure pas moins vrai pour les suites de fonctions.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions et* a *adhérent à* I *(*$a = \pm\infty$ *est possible) ; on suppose de plus les deux hypothèses suivantes :*

(H_1) *la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* I *(vers* f*),*

(H_2) *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, la fonction* f_n *admet une limite finie* ℓ_n *en* a*,*

alors on a les résultats suivants :

(R_1) *La suite* $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

(R_2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n$ *ce qui s'écrit aussi* $\lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\right)$.

REMARQUE 5.10 : Ce résultat est faux si $a = \mathrm{Sup}(I)$ *n'est pas un élément de* I *et qu'on n'a convergence uniforme de* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *que sur tout segment de* I.

EXEMPLE 5.18 : Reprenons notre exemple classique : $f_n(x) = x^n$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de $[0;1[$ vers 0 mais $\lim\limits_{x\to1^-}\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \neq \lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to1^-} f_n(x)$.

THÉORÈME DE DOUBLE LIMITE POUR LES SÉRIES (ÉNORME) 5.7 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et a un réel adhérent à I ($a = \pm\infty$ est possible) ; on suppose de plus avoir les deux hypothèses suivantes :

(H_1) **la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément (ou normalement) sur I vers S,**

(H_2) **pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite finie ℓ_n en a.**

alors on a les résultats suivants :

(R_1) **La série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \ell_n$ converge.**

(R_2) $\lim\limits_{x\to a} S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ell_n$ **ce qui s'écrit aussi** $\lim\limits_{x\to a}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\right)$

DÉMONSTRATION : hors programme.

EXEMPLE FONDAMENTAL 5.19 : Que valent $\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \eta(x)$?

5.3.3 : Exemples d'étude

EN PRATIQUE : Soit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$:

- *On détermine la limite simple f de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
- *Pour montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, on calcule $||f_n - f||_\infty$ (étude de fonction) ou on cherche $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 telle que $\forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n$.*
- *Pour montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur I, on cherche une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ telle que la suite $\big(f_n(x_n) - f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.*

ORAL BLANC 5.20 : Étudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}_+$ et sur les intervalles du type $[0;a]$ (avec $a > 0$) de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall x \geqslant 0,\ f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Indication : on pourra étudier $x \mapsto e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ ou montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

EN PRATIQUE : Soit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ et la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$:

- *On étudie la convergence simple de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$: ensemble de définition D de $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$,*
- *On étudie la convergence normale sur D (éventuellement sur tout segment de D).*
- *S'il n'y a pas convergence normale, on essaie d'établir la convergence uniforme en étudiant $||R_n||_\infty$.*
- *On cherche des limites ou des équivalents de $S(x)$ aux bornes par comparaison série-intégrale ou théorème de la double limite.*

EXERCICE 5.21 : **a.** Étudier le domaine de définition et la monotonie de $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+(nx)^2}$.

b. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

c. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0^+.

PARTIE 5.4 : INTÉGRATION ET DÉRIVATION DES SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

5.4.1 : Intégration

THÉORÈME D'INTERVERSION LIMITE/INTÉGRALE SUR UN SEGMENT PAR CONVERGENCE UNIFORME 5.8 :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}([a;b],\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **une suite de fonctions, on suppose que :**

(H_1) **La suite** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur le segment** $[a;b]$ **vers** f**.**

(H_2) **Pour tout** $n\in\mathbb{N}$**, la fonction** f_n **est continue sur le segment** $[a;b]$**.**

Alors on a les résultats suivants :

(R_1) f **est continue sur le segment** $[a;b]$ **(on le savait déjà).**

(R_2) $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\Big(\int_a^b f_n(t)dt\Big)\Big(= \int_a^b \Big(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\Big)dt\Big)$**.**

EXEMPLE 5.22 : Étudier la convergence de $f_n : x \mapsto (n+1)\cos(x)\sin^n(x)$ sur le segment $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

REMARQUE 5.11 : On peut généraliser ce théorème à un intervalle borné I *qui n'est pas un segment si on suppose les fonctions* f_n *intégrables sur* I*.*

THÉORÈME D'INTÉGRATION TERME À TERME SUR UN SEGMENT PAR CONVERGENCE UNIFORME 5.9 :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}([a;b],\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **une suite de fonctions, on suppose que :**

(H_1) **La série** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ **converge uniformément sur le segment** $[a;b]$ **vers** S**.**

(H_2) **Pour tout** $n\in\mathbb{N}$**, la fonction** f_n **est continue sur le segment** $[a;b]$**.**

Alors on a les conclusions suivantes :

(R_1) S **est continue sur le segment** $[a;b]$ **(on le savait déjà).**

(R_2) $\displaystyle\int_a^b S(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\int_a^b f_n(t)dt\Big)\Big(= \int_a^b \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\Big)dt\Big)$**.**

PROPOSITION D'INTÉGRATION TERME À TERME SUR UN SEGMENT PAR CONVERGENCE NORMALE 5.10 :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}([a;b],\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **une suite de fonctions, on suppose que :**

(H_1) **La série** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ **converge normalement sur le segment** $[a;b]$ **vers** S**.**

(H_2) **Pour tout** $n\in\mathbb{N}$**, la fonction** f_n **est continue sur le segment** $[a;b]$**.**

Alors en plus des deux renseignements du théorème précédent, on a :

(R_1) **La série** $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_a^b |f_n(t)|dt$ **converge.**

(R_2) $\displaystyle\int_a^b \big|S(t)\big|dt = \int_a^b \Big|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\Big|dt \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b |f_n(t)|dt$**.**

ORAL BLANC 5.23 : Exprimer $\int_0^1 \frac{t(\ln t)^2}{1-t}dt$ à l'aide d'une série.

5.4.2 : Dérivation

THÉORÈME D'INTERVERSION LIMITE/DÉRIVÉE (ÉNORME) 5.11 :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions, on suppose que :

- (H_1) **la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f,**
- (H_2) **pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe C^1 sur I,**
- (H_3) **$(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I (ou unif. sur tout segment de I) vers g.**

Alors on peut conclure :

- (R_1) **f est de classe C^1 sur I.**
- (R_2) **$f'=g$, c'est-à-dire que $\forall x\in I,\ \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)'(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(f'_n(x)\right)$.**

REMARQUE 5.12 : • *D'après la preuve, il suffit ci-dessus qu'il existe $x_0\in I$ tel que $\left(f_n(x_0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

• *Sous les hypothèses de ce théorème, on a prouvé également que la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniforme sur tout segment de I vers f. Mais elle n'est pas forcément uniforme sur I.*

• *Sous les hypothèses de ce théorème, et si on suppose de plus que I est borné, on a vu dans la preuve du théorème que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait uniformément vers f sur I.*

EXEMPLE 5.24 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f_n(x)=\frac{n^2}{x^2+n^2}$. Étudier les modes de convergence des suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers leurs limites.

REMARQUE FONDAMENTALE 5.13 : Pour démontrer que la limite simple d'une suite de fonctions est de classe C^∞, on peut utiliser une récurrence avec le théorème précédent :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions, on suppose que :

- (H_1) *la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f,*
- (H_2) *pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe C^∞ sur I,*
- (H_3) *pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, la suite $\left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I (ou uniformément sur tout segment de I) (vers φ_k).*

Alors f est de classe C^∞ sur I et $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ f^{(k)}=\varphi_k \iff \forall x\in I,\ \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)^{(k)}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(f_n^{(k)}(x)\right)$.

⊙ Mais si on veut juste prouver que f est de classe C^p sur I pour $p\geqslant 2$, on admet :

PROPOSITION DE DÉRIVÉES SUCCESSIVES POUR LES SUITES 5.12 :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions, $p\geqslant 2$, si :

- (H_1) **toutes les fonctions f_n sont de classe C^p sur I,**
- (H_2) **les suites $\left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement sur I (vers φ_k) pour $k\in[\![0;p-1]\!]$,**
- (H_3) **$\left(f_n^{(p)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I (ou unif. sur tout segment de I) (vers φ_p).**

Alors on peut conclure :

- (R_1) **$f=\varphi_0$ est de classe C^p sur I.**
- (R_2) **$\forall k\in[\![0;p]\!], f^{(k)}=\varphi_k$, c'est-à-dire : $\forall k\in[\![0;p]\!],\ \forall x\in I,\ \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)^{(k)}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(f_n^{(k)}(x)\right)$.**

THÉORÈME DE DÉRIVATION TERME À TERME (ÉNORME) 5.13 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **une suite de fonctions, on suppose que :**

- (H_1) **la série** $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ **converge simplement sur** I **vers** S**,**
- (H_2) **pour tout** $n\in\mathbb{N}$**, la fonction** f_n **est de classe** C^1 **sur** I**,**
- (H_3) $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n'$ **CVU (ou CVN) sur** I **(ou CVU (ou CVN) sur tout segment de** I**).**

Alors on peut conclure :

- (R_1) S **est de classe** C^1 **sur** I**.**
- (R_2) $S' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$**, c'est-à-dire que** $\forall x\in I,\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(f_n'(x)\right)$**.**

REMARQUE 5.14 : Il sera souvent plus simple de montrer que la convergence de la série des dérivées est normale sur I *(ou même normale sur tout segment de* I*) pour arriver au résultat du théorème précédent.*

ORAL BLANC 5.25 : CCP PSI 2013 Anaïs Espéron
Étudier la fonction $\varphi : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}e^{-nx}}{n}$.

REMARQUE FONDAMENTALE 5.15 : Encore une récurrence pour la classe C^∞ *:*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions, on suppose que :*

- (H_1) *la série* $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ *converge simplement sur* I*,*
- (H_2) *pour tout* $n\in\mathbb{N}$*, la fonction* f_n *est de classe* C^∞ *sur* I*,*
- (H_3) $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n^{(k)}$ *converge uniformément sur* I *(ou unif. sur tout segment de* I*).*

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est de classe* C^∞ *sur* I *et* $\forall x\in I,\ \forall k\in\mathbb{N}^*,\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x)$*.*

REMARQUE 5.16 : Là encore, on pourra obtenir le résultat par convergence normale.

EXEMPLE 5.26 : Domaine de définition et classe de S définie par $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}\sin\left(\frac{x}{n}\right)$?

EXEMPLE FONDAMENTAL 5.27 : Montrer que $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est de classe C^∞ sur $]1;+\infty[$.

⊙ Mais on a l'équivalent du résultat vu sur les suites de fonctions :

PROPOSITION DE DÉRIVÉES SUCCESSIVES POUR LES SÉRIES 5.14 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **une suite de fonctions,** $p\geqslant 2$**, si :**

- (H_1) **pour tout** $n\in\mathbb{N}$**, la fonction** f_n **est de classe** C^p **sur** I**,**
- (H_2) **les séries** $\sum_{n\geqslant 0} f_n^{(k)}$ **convergent simplement sur** I **pour** $k\in[\![0;p-1]\!]$**,**
- (H_3) $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n^{(p)}$ **converge uniformément sur** I **(ou uniformément sur tout segment de** I**).**

Alors on peut conclure :

- (R_1) $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ **est de classe** C^p **sur** I**.**
- (R_2) $\forall x\in I,\ \forall k\in[\![1;p]\!],\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x)$**.**

EXERCICE CONCOURS 5.28 : Centrale PSI 2014 Thibault

On pose $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de S.

b. Montrer qu'elle est de classe C^∞ sur $]0;+\infty[$. Justifier que S est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Trouver un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$.

d. Montrer que $S(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)$.

COMPÉTENCES

- Déterminer le domaine de définition de la limite simple d'une suite de fonctions.
- Savoir étudier la convergence uniforme d'une suite de fonctions selon les intervalles.
- Déterminer le domaine de définition de la somme d'une série de fonctions.
- Savoir étudier la convergence uniforme d'une série de fonctions selon les intervalles.
- Savoir étudier la convergence normale d'une série de fonctions selon les intervalles..
- Reconnaître l'application du théorème de convergence dominée et la mettre en forme.
- Maîtriser la domination de f_n en valeur absolue ou module par une fonction φ intégrable sur I.
- Reconnaître l'application du théorème d'intégration terme à terme, pour calculer la valeur de $\int_I f(t)dt$ en exprimant f comme la somme d'une série de fonctions, et la mettre en forme.
- Savoir montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_I |f_n|$ dans le théorème d'intégration terme à terme.
- Montrer la continuité d'une limite simple de suite de fonctions par convergence uniforme.
- Montrer la continuité d'une somme de série de fonctions par convergence uniforme ou normale.
- Trouver par théorème de la double limite la limite d'une limite simple de suite de fonctions en $\pm\infty$.
- Trouver par théorème de la double limite la limite d'une somme de série de fonctions en $\pm\infty$.
- Trouver une limite d'intégrales par convergence uniforme sur un segment.
- Reconnaître une "intégration terme à terme" par convergence uniforme ou normale sur un segment.
- Maîtriser la dérivation d'une limite de suite de fonctions par convergence uniforme des dérivées.
- Maîtriser la dérivation d'une somme de série de fonctions par convergence normale des dérivées.
- Généralisation à l'aspect C^∞ des limites de suites de fonctions ou des sommes de séries de fonctions.