# Récursivité et mémoïsation

## I Rappels sur la récursivité

Une fonction est dite *récursive* si, au cours de son exécution, elle fait appel à elle même (avec des paramètres différents). Elle est en général constituée d'un cas de base auquel les différents appels récursifs permettent de se ramener.

```
def f(...) :
    if ... : # cas de base

    else : # la récursivité
```

Ce mode de programmation est particulièrement adaptée à certaines situations où le résultat de la fonction à un « rang $n$ » se déduit des valeurs aux « rangs précédents ».
On peut illustrer cela par exemple par le calcul des termes de la suite de Fibonacci $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ :

$$f_0 = f_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

Le calcul peut se programmer de la façon suivante :

```
def f(n) :
    if n in [0,1] :
        return 1
    else :
        return f(n-1)+f(n-2)
```

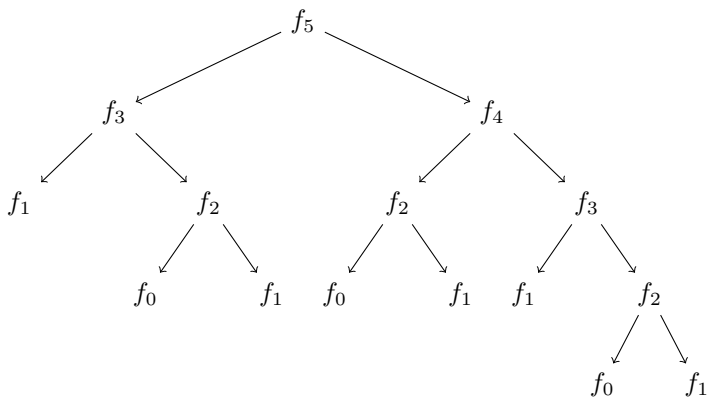
Ce code pose différents problèmes :

- l'utilisation de la récursivité limite les valeurs possibles de l'entier $n$ car le nombre d'appels récursifs est limité par la taille de la pile d'exécution,
- les deux appels à la fonction `f` dans le calcul de `f(n)` (récursivité multiple) posent des problèmes de complexité.

Si on note $C_n$ le nombre d'additions effectuées dans le calcul de $f_n$ alors on a

$$C_0 = C_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, C_{n+2} = C_{n+1} + C_n + 1$$

On en déduit alors $C_n = f_n - 1 \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$ ; on a donc une complexité exponentielle.
On peut comprendre le problème de complexité si on examine par exemple les différents appels récursifs effectués lors du calcul de $f_5$ (la phase de descente, qui ramène les calculs au cas de base)



On se rend compte que pour calculer $f_5$, on va calculer :

— $f_4$

— 2 fois $f_3$

— 3 fois $f_2$

Une solution pour contourner le problème, sur cet exemple, serait de calculer récursivement le couple $(f_n, f_{n+1})$, ie transformer la fonction en une récursivité simple : si on pose $F_n = (f_n, f_{n+1})$ alors on a $F_{n+1} = (f_{n+1}, f_n + f_{n+1})$ que l'on peut calculer à partir du vecteur $F_n$.

```
def fiboCouple(n) :
    if n == 0 :
        return (1,1)
    else :
        a,b = fiboCouple(n-1)
        return (b,a+b)
```

Pour obtenir la valeur de $f_n$, il suffit de demander

```
>>> fiboCouple(n)[0]
```

Enfin, pour éviter cette dernière syntaxe trop lourde, on peut définir la fonction récursive `fiboCouple` à l'intérieur de la fonction `fibo` (une sous-fonction) :

```
def fibo(n) :
    def fiboCouple(n) :
        if n == 0 :
            return (1,1)
        else :
            a,b = fiboCouple(n-1)
            return (b,a+b)
    return fiboCouple(n)[0]
```

Sur cet exemple simple, on peut aussi remplacer le calcul récursif (qui part de l'entier $n$ pour descendre au cas de base avant d'effectuer le calcul) par un calcul itératif :

```
def Fibo(n) :
    a,b = 1,1
    for _ in range(n) :
        a,b = b,a+b
    return a
```

Une telle fonction effectue en fait les mêmes calculs que la fonction `fibo` mais en partant directement du cas de base (c'est la phase de remontée du calcul récursif) ; on parle de calcul de *bas en haut*.
En plus d'éviter les problèmes de complexité posées par la première forme de récursivité, cette programmation itérative évite aussi les problèmes de pile d'exécution et permet donc de calculer des valeurs de $f_n$ pour des entiers $n$ plus grands.

# II Mémoïsation

Prenons comme deuxième exemple le calcul des coefficients binomiaux à partir de la formule de Pascal :

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

On peut le programmer récursivement de façon naïve :

```
def b(n,p) :
    if p == 0 or n == p :
        return 1
    else :
        return b(n-1,p-1) + b(n-1,p)
```

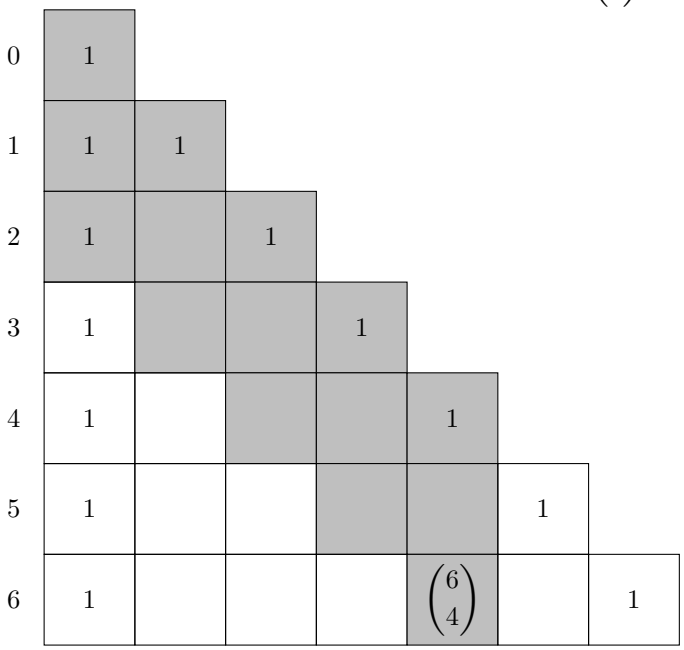
Ce code va poser exactement les mêmes problèmes que la première programmation de la suite de Fibonacci : l'appel récursif multiple va engendrer une complexité exponentielle due à des calculs de coefficients refaits plusieurs fois.

Cette fois ci, pour calculer $\binom{n}{p}$, on se rend compte qu'il suffit de connaître les coefficients de la ligne précédente (pour l'entier $n-1$) ; on pourrait donc calculer récursivement les coefficients de la ligne $n$ avant d'extraire celui qui nous intéresse : on programme en fait une fonction récursive qui calcule toute le ligne $\left[\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}\right]$, avant d'en extraire le coefficient souhaité.

```
def B(n,p) :
    def binomeLigne(n) :
        if n == 0 :
            return [1]
        else :
            L = binomeLigne(n-1) # la ligne n-1
            l = [1] * (n+1)      # construction de la ligne n
            for k in range(1,n) :
                l[k] = L[k-1]+L[k]
        return l                 # la sous-fonction renvoie toute la ligne
    return binomeLigne(n)[p]     # extraction du coeff souhaité
```

Cette solution n'est pas optimale non plus car elle calcule, pour déterminer $\binom{n}{p}$, tous les coefficients de toutes les lignes précédentes alors qu'ils ne sont pas tous nécessaires (on pourrait se contenter de calculer ceux de la $n-1^{\text{ème}}$ ligne avant de déterminer $\binom{n}{p}$, et pas toute la $n^{\text{ème}}$ ligne, mais le défaut subsiste sur les lignes précédentes).

*Coefficients binomiaux nécessaires au calcul de* $\binom{6}{4}$




Afin de ne mémoriser que les valeurs utiles, on introduit un dictionnaire dans lequel seuls les résultats des appels récursifs seront stockés :

```
binoDico = {}

def binom(n,p) :
    if (n,p) not in binoDico :
        if p == 0 or n == p :
            b = 1
        else :
            b = binom(n-1,p-1) + binom(n-1,p)
        binoDico[(n,p)] = b
    return binoDico[(n, p)]
```

Si, à la suite du calcul de `binom(6,4)`, on fait afficher le dictionnaire, on obtient

```
{(2, 0): 1, (1, 0): 1, (1, 1): 1, (2, 1): 2, (3, 1): 3, (2, 2): 1, (3, 2): 3,
 (4, 2): 6, (3, 3): 1, (4, 3): 4, (5, 3): 10, (4, 4): 1, (5, 4): 5, (6, 4):
  15}
```

qui correspond bien aux cases grisées sur le schéma précédent : seules les valeurs indispensables ont été calculées et mémorisées.
Le dictionnaire a été défini comme une variable globale, ce qui peut présenter un avantage dans le cas de plusieurs calculs successifs : après chaque calcul le dictionnaire est enrichi par les nouvelles valeurs qui n'auront donc pas besoin d'être recalculée pour une utilisation suivante de la fonction `binom`.

Cette technique consistant à introduire un dictionnaire lors d'une programmation récursive afin de mémoriser les résultats intermédiaires utiles s'appelle *mémoïsation*.

# III Mise en place de la mémoïsation

## 1. Avec un dictionnaire

On part de la version « naïve » de la fonction récursive, écrite avec une seule utilisation de la commande `return` :

```
def f(n) :
    if n in [0,1] :
        r = 1
    else :
        r = f(n-1)+f(n-2)
    return r
```

Il y a ensuite deux possibilités pour mettre en place la mémoïsation à l'aide d'un dictionnaire, en évitant d'introduire le dictionnaire en variable globale : soit définir deux fonctions différentes, soit une seule fonction qui utilise une « sous-fonction » :

*Avec deux fonctions distinctes*

La première fonction reçoit le dictionnaire en paramètre et le modifie par effets de bord.

```
def Fib(n,d) :
    if n not in d :
        if n in [0,1] :
            r = 1
        else :
            r=Fib(n-1,d)+Fib(n-2,d)
        d[n] = r
    return d[n]
```

La seconde initialise le dictionnaire et fait appel à la première fonction

```
def fib(n) :
    d = {}
    return Fib(n,d)
```

*Avec une « sous-fonction »*

C'est la sous-fonction qui est récursive, la fonction `F` définit le dictionnaire et appelle la sous-fonction `g` qui remplit le dictionnaire (qui est une variable locale de `F` mais globale pour `g`).

```
def F(n) :
    d = {}
    def g(n) :
        if n not in d :
            if n in [0,1] :
                r = 1
            else :
                r = g(n-1)+g(n-2)
            d[n] = r
        return d[n]
    return g(n)
```

## 2. Calcul de bas en haut

On peut aussi utiliser une structure de donnée de façon à mémoriser les calculs intermédaires (à la place du dictionnaire) et utiliser une programation itérative ; il faut pour cela connaître à l'avance la taille de cette structure.
Pour le calcul de $f_n$, on va devoir calculer les termes $f_0, \dots, f_n$ donc $n+1$ valeurs : on utilise une liste de longueur $n+1$ :

```
def Fibonacci(n) :
    T = [1]*(n+1)
    for k in range(2,n+1) :
        T[k] = T[k-1]+T[k-2]
    return T[n]
```

Remarque(s) :

(*III.1*) On ne fait ici que les calculs qui seraient effectué dans la phase de remontée de la programmation récursive

(*III.2*) Pour calculer le coefficient binomial $\binom{n}{p}$, on pourrait introduire un tableau de taille $n \times n$ que l'on remplit ligne par ligne (comme on le ferait « à la main »). Cette méthode calculerait des coefficients qui sont en fait inutile à la détermination de $\binom{n}{p}$ : dans l'exemple de la partie II, on calculerait tous les termes des 7 lignes au lieu de ne calculer que les termes des cases grisées.