DEVOIR 07 : SÉRIES LINÉAIRES

PSI 1 2026-2027 **mercredi 14 octobre 2026**

QCM

1 *Polynômes de matrices : soit* $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$

1.1 $(P(A) = 0$ ou $Q(A) = 0) \Longrightarrow (PQ)(A) = 0$

1.2 $(PQ)(A) = 0 \Longrightarrow (P(A) = 0$ ou $Q(A) = 0)$

1.3 $(P(A) = 0$ et $P(0) \neq 0) \Longrightarrow (\exists Q \in \mathbb{K}[X],\ A^{-1} = Q(A))$

1.4 $\exists P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\},\ P(A) = 0$

2 *Série : soit deux suites réelles* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(CV pour converge et DV pour diverge)*

2.1 $\left(\sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ et } \sum_{n\geqslant 0} v_n \text{ CV}\right) \Longleftarrow \left(\sum_{n\geqslant 0}(u_n + v_n) \text{ CV}\right)$

2.2 $\left(\sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ et } \sum_{n\geqslant 0} v_n \text{ DV}\right) \Longrightarrow \left(\sum_{n\geqslant 0}(u_n + v_n) \text{ DV}\right)$

2.3 $\sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1} - u_n)$ CV $\Longleftrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV

2.4 $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ CV $\Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

3 *Série : soit une série réelle* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *convergente*

3.1 $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

3.2 $u_n \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$

3.3 $\sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1} - u_n)$ converge

3.4 $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right) = 0$

4 *Comparaison : soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites (CVA pour converge absolument et CV pour converge)*

4.1 si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$: $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ CVA $\Longleftrightarrow \sum_{n\geqslant 0} v_n$ CVA

4.2 si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$: $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ CV $\Longleftrightarrow \sum_{n\geqslant 0} v_n$ CV

4.3 si $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$: $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ CVA $\Longrightarrow \sum_{n\geqslant 0} u_n$ CV

4.4 si $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$: $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ CV $\Longrightarrow \sum_{n\geqslant 0} u_n$ CV

Énoncé Énoncer le théorème de dualité suites-séries.

Preuve Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \cdots, a_n$ des éléments distincts de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $b_1, \cdots, b_n$ des scalaires.
Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ (à exprimer en fonction de $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$) tel que $\forall k \in [\![1; n]\!],\ P(a_k) = b_k$.

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ défini par $\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ f(x, y, z, t) = (x+y+z, -y-z-t, -x+t, x+y+z)$.
On admet que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$. Trouver la dimension et une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Calculer $f \circ f$. En déduire $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 2 Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

a. Par comparaison série intégrale, montrer que $u_n \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

b. Montrer, de plus, qu'il existe un réel ℓ tel que $\lim_{n\to+\infty}\left(u_n - 2\sqrt{n}\right) = \ell$, c'est-à-dire $u_n \underset{+\infty}{=} 2\sqrt{n} + \ell + o(1)$.

DEVOIR 07 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne `i` colonne `j` revient à déclarer la question `i.j` vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

i · j	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 07 NOM : COCO PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1	X		X	X	
2			X		
3	X		X	X	
4	X		X		

1.1 Vrai : car $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$ **1.2** Faux : Si $A = E_{1,1}$, on a $A^2 - A = 0$ alors que $A \neq 0$ et $A - I_n \neq 0$ **1.3** Vrai : vu en cours **1.4** Vrai : la famille $(I_n, A, \cdots, A^{n^2})$ est liée donc il existe au moins un polynôme non nul dans $\mathbb{K}_{n^2}[X]$ annulateur de A.

2.1 Faux : $u_n = -v_n = \dfrac{1}{n}$ **2.2** Faux : même exemple **2.3** Vrai : télescopage **2.4** Faux : $u_n = \dfrac{1}{n}$.

3.1 Vrai : cours **3.2** Faux : $u_n = \dfrac{1}{n}$ si n est un carré et $u_n = 0$ sinon **3.3** Vrai : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge **3.4** Vrai : le reste d'une série convergente tend vers 0.

4.1 Vrai : $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} |v_n|$ et $|u_n| \geqslant 0$ **4.2** Faux : $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n} = u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ diverge alors que $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ converge. **4.3** Vrai : $|u_n| \underset{+\infty}{=} o(|v_n|)$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} |v_n|$ converge **4.4** Faux : $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $u_n = \dfrac{1}{n}$.

Énoncé Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe : $\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge$\big) \iff \big(\sum\limits_{n\geqslant 0}(u_{n+1} - u_n)$ converge$\big)$.

Preuve Posons $P = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \dfrac{X - a_i}{a_k - a_i}$. Comme $\deg\Big(\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \dfrac{X - a_i}{a_k - a_i}\Big) = n-1$ pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, et que P ainsi défini est une combinaison linéaire de ces polynômes, on sait que $\deg(P) \leqslant n-1$. De plus, en substituant X par $a_1, \cdots, a_n$, on vérifie facilement que $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $P(a_k) = b_k$: voilà pour l'existence !

Si un autre $Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ vérifie $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $Q(a_k) = b_k$, posons $U = P - Q$ de sorte que $U \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et que $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $U(a_k) = b_k$. Comme U admet n racines distinctes et que $\deg(U) \leqslant n-1$, on peut conclure que $U = 0$, d'où $P = Q$ ce qui assure l'unicité recherchée.

Exercice 1 Pour $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, $f(x,y,z,t) = 0 \iff (x = t$ et $y = -z - t) \iff (x,y,z,t) = (t, -z-t, z, t)$ donc $(x,y,z,t) \in \mathrm{Ker}(f) \iff (x,y,z,t) = z(0,-1,1,0) + t(1,-1,0,1)$. Ainsi $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ avec $v_1 = (0,-1,1,0)$ et $v_2 = (1,-1,0,1)$. Comme (v_1, v_2) libre, $\dim \mathrm{Ker}(f) = 2$. Par la formule du rang, $\mathrm{Im}(f)$ est aussi un plan. De plus, par calculs, on trouve $f \circ f(x,y,z,t) = 0$ donc $f^2 = 0$ d'où $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
On en déduit que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$ (inclusion et égalité des dimensions).

Exercice 2 **a.** $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$, et elle est intégrable sur $]0;1]$ donc pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_k^{k+1} \dfrac{dt}{\sqrt{t}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_{k-1}^{k} \dfrac{dt}{\sqrt{t}}$. On somme pour $k \in [\![1;n]\!]$ et, par Chasles, $\int_1^{n+1} \dfrac{dt}{\sqrt{t}} \leqslant u_n \leqslant \int_0^n \dfrac{dt}{\sqrt{t}}$. Ainsi, on obtient $2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant u_n \leqslant 2\sqrt{n}$. Comme $2\sqrt{n+1} - 2 \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$, on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

b. On pose $v_n = u_n - 2\sqrt{n}$. Alors $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$ (en multipliant par la quantité conjuguée $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$). Ainsi $v_{n+1} - v_n = \dfrac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}$ ce qui donne par la même astuce $v_{n+1} - v_n = -\dfrac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2}$. Ainsi $v_{n+1} - v_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{4n^{3/2}}$ (on pouvait bien sûr le montrer par les développements limités) donc, par Riemann, $\sum\limits_{n\geqslant 1}(v_{n+1} - v_n)$ converge absolument donc converge et, par dualité suite/série, $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge aussi.