DEVOIR 08 : SÉRIES NUMÉRIQUES

PSI 1 2026-2027 **mercredi 04 novembre 2026**

QCM

1 *Caractérisation séquentielle : soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$ *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle qui tend vers* $+\infty$

1.1 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$

1.2 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \Longleftarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$

1.3 Si f monotone : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$

1.4 Si f monotone : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \Longleftarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$

2 Riemann *et* d'Alembert *: soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de termes réels strictement positifs*

2.1 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1^- \Longrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge

2.2 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1^+ \Longrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge

2.3 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}u_n = 3 \Longrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge

2.4 $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0 \Longrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge

3 *Série de signe quelconque : soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle qui tend vers* 0

3.1 $\sum\limits_{n\geqslant 0} |u_n|$ converge $\Longrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge

3.2 $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge $\Longrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} \sin^2(u_n)$ converge

3.3 $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge $\Longrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge

3.4 $\sum\limits_{n\geqslant 0} |u_n|$ converge $\Longrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge

4 *Séries alternées : soit* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite réelle positive décroissante qui tend vers* 0*, on pose* $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$

4.1 $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$

4.2 $|R_{n+1}| \leqslant u_n$

4.3 $|R_n| \leqslant u_{n+2}$

4.4 $R_{n+2} \leqslant |u_n|$

Énoncé Énoncer les trois hypothèses et les trois conclusions du critère spécial des séries alternées.

Preuve Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$, on suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell < 1$. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Exercice 1 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n}\cos\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ et $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

On rappelle que $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$ où γ est la constante d'Euler ($\gamma \sim 0.577$).

a. Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le réel S_{3n} en fonction de H_{3n} et H_n.

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{3n}$. Montrer que les suites $(S_{3n+1})_{n\geqslant 0}$ et $(S_{3n+2})_{n\geqslant 0}$ convergent aussi.

c. En déduire l'existence et la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 2 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose, pour des entiers $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$.

Pour quelles valeurs de α le terme u_n est défini pour tout entier $n \geqslant 2$?

Dans ce cas, pour quelles valeurs de α la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ est-elle absolument convergente ?

Toujours dans ce cas, effectuer un développement asymptotique de u_n à l'ordre 2 (deux termes significatifs) et en déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ converge.

DEVOIR 08 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question i.j vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

i · j	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 08 NOM : COCO PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1	X		X	X	
2		X	X		
3	X	X		X	
4	X	X		X	

1.1 Vrai : caractérisation séquentielle pour une suite **1.2** Faux : il faudrait que ce soit vrai pour toutes les suites qui tendent vers $+\infty$ **1.3** Vrai : la monotonie ne change rien **1.4** Vrai : comme f est monotone, elle possède une limite ℓ' (finie ou pas) en $+\infty$, alors par caractérisation séquentielle, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell'$. Mais comme on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$, par unicité de la limite, on a $\ell = \ell'$.

2.1 Faux : pour $u_n = \dfrac{1}{n}$ par exemple **2.2** Vrai : car alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas tendre vers 0 donc divergence grossière **2.3** Vrai : à partir d'un certain rang $u_n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et RIEMANN **2.4** Faux : pour $u_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$.

3.1 Vrai : ACV implique CV **3.2** Vrai : $u_n \to 0$ et $u_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \sin^2(u_n) > 0$ **3.3** Faux : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ (CSSA) et $u_n^2 = \dfrac{1}{n}$ **3.4** Vrai : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc $u_n^2 \underset{+\infty}{=} o(|u_n|)$ et comparaison.

4.1 Vrai : CSSA **4.2** Vrai : $|R_{n+1}| \leqslant |u_{n+2}| = u_{n+2} \leqslant u_n$ **4.3** Faux : si $u_n = \dfrac{1}{2^n}$, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n = \dfrac{2}{3}$ et, après calculs, $R_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{3\times 2^n}$ et $|R_n| > u_{n+2}$ **4.4** Vrai : $|R_{n+2}| \leqslant |u_{n+3}| = u_{n+3} \leqslant u_n$.

Énoncé Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est une série alternée telle que la suite $\big(|u_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0 alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge. De plus, pour $n \geqslant -1$, $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est du signe de u_{n+1} et $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.

Preuve Si $k = \dfrac{\ell+1}{2} < 1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{\ell+1}{2} = k < 1$ par définition de la limite. Ainsi, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant k^{n-n_0} u_{n_0}$ et $\sum u_n$ CV par comparaison car $\sum k^n$ CV (car $|k| < 1$).

Exercice 1 **a.** $S_{3n} = \sum\limits_{k=1}^{3n} u_k = \Big(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\Big) + \Big(-\frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{6}\Big) + \cdots + \Big(-\frac{1}{2(3n-2)} - \frac{1}{2(3n-1)} + \frac{1}{3n}\Big)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ donc $S_{3n} = -\frac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3k+1} - \frac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3k+2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{3k} = -\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{3n}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \dfrac{H_n - H_{3n}}{2}$.

b. On en déduit que $S_{3n} \underset{+\infty}{=} \dfrac{\ln(n) + \gamma - \ln(3n) - \gamma + o(1)}{2} \underset{+\infty}{=} -\dfrac{\ln(3)}{2} + o(1)$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{3n} = -\dfrac{\ln(3)}{2}$. Comme $S_{3n+1} = S_{3n} + u_{3n+1}$ et $S_{3n+2} = S_{3n+1} + u_{3n+2}$, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{3n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{3n+2} = -\dfrac{\ln(3)}{2}$.

c. Comme $(S_{3n})_{n\geqslant 1}$, $(S_{3n+1})_{n\geqslant 0}$ et $(S_{3n+2})_{n\geqslant 0}$ convergent vers la même limite, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = \ell = -\dfrac{1}{2}\ln(3)$.

Exercice 2 Si $\alpha \leqslant 0$, u_3 n'est pas définie car $n^\alpha + (-1)^3 \leqslant 0$. Si $\alpha > 0$, pour tout $n \geqslant 2$, $n^\alpha > 1$ donc $n^\alpha + (-1)^n > 0$ et u_n est défini. Comme $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$, $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ ACV $\iff \alpha > 2$. Prenons donc $\alpha > 0$, alors $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\Big(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\Big)^{-1/2} \underset{+\infty}{=} \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\left(1 - \dfrac{(-1)^n}{2n^\alpha} + o\Big(\dfrac{1}{n^\alpha}\Big)\right) \underset{+\infty}{=} \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}} - \dfrac{1}{2n^{\frac{3\alpha}{2}}} + o\Big(\dfrac{1}{n^{\frac{3\alpha}{2}}}\Big)$. Ainsi $u_n = v_n + w_n$ avec $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$ et $w_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^{\frac{3\alpha}{2}}} < 0$. $\sum\limits_{n\geqslant 2} v_n$ converge par le CSSA car $\Big(\dfrac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\Big)_{n\geqslant 2}$ décroît vers 0 car $\alpha > 0$ et $\sum\limits_{n\geqslant 2} w_n$ CV$\iff \alpha > \dfrac{2}{3}$. Par somme, $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$ CV$\iff \alpha > \dfrac{2}{3}$.