DS 2.1 : MINES PC 2014 MATHS 1

PSI 1 2026/2027 **samedi 03 octobre 2026**

On note :

- $\mathbb{N}$ *l'ensemble des entiers naturels,*
- $\mathbb{R}$ *l'ensemble des réels,*
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *l'ensemble des matrices carrées de taille* n *à coefficients réels.*

Dans tout le problème,

- E **est un espace vectoriel de dimension** $n \geqslant 2$ **sur le corps des réels,**
- t **un endomorphisme non nul de** E**.**

Soit $\mathcal{B}$ *une base de* E*, on note* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(t)$ *la matrice représentant* t *dans cette base* $\mathcal{B}$*.*

On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ *est une homothétie <u>si</u> c'est un multiple scalaire de l'identité, c'est-à-dire s'il existe un réel* λ *tel que* $f = \lambda \mathrm{id}_E$ *(homothétie de rapport* λ*).*

On appelle projecteur un endomorphisme idempotent p *de* E*, c'est-à-dire tel que* $p^2 = p$*.*

On note id_E *l'endomorphisme identité de* E*,* I_n *la matrice identité de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*.*

On note aussi 0_n *la matrice nulle de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et, plus généralement,* $0_{n,p}$ *la matrice nulle de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$*.*

On appelle, pour $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, trace de* A *le nombre réel suivant noté* $\mathrm{Tr}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$*.*

PARTIE 1 : TRACES ET PROJECTEURS

Soit A *et* B *deux matrices de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*.*

1 Montrer que $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$.

2 Montrer que la trace de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(t)$ est indépendante de la base $\mathcal{B}$ choisie dans E.

On appelle trace de t*, notée* $\mathrm{Tr}\,(t)$*, la valeur commune des traces des matrices représentant* t*.*

Soit p *un projecteur de* E*.*

3 Démontrer que $E = \mathrm{Im}\,(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$.

On pose $p' = \mathrm{id}_E - p$*.*

4 Montrer que $\mathrm{Im}\,(p') = \mathrm{Ker}(p)$ et que $\mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Ker}(p')$.

5 Établir que $\mathrm{rang}\,(p) = \mathrm{Tr}\,(p)$.

6 Soit F et G deux sous-espaces vectoriels quelconques de E, établir que $\dim(F+G) \leqslant \dim(F) + \dim(G)$.

7 Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $p_1, \cdots, p_m$ des projecteurs de E et $s = \sum_{i=1}^{m} p_i$, montrer que $\mathrm{Tr}\,(s) \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{Tr}\,(s) \geqslant \mathrm{rang}\,(s)$.

PARTIE 2 : PROJECTEURS DE RANG 1

Soit p *un projecteur de* E *qu'on suppose de rang* 1 *dans cette partie.*

8 Montrer qu'il existe $f_1 \neq 0_E$ dans E et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $p(t(f_1)) = \mu f_1$. En déduire que $p \circ t \circ p = \mu\, p$.

Soit $\mathcal{C} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ *une base de* E *adaptée à la décomposition* $E = \mathrm{Im}\,(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ *; ce qui signifie que* (f_1) *est une base de* $\mathrm{Im}\,(p)$ *(puisque* $\mathrm{Im}\,(p)$ *est une droite) et que* $(f_2, \cdots, f_n)$ *est une base de* $\mathrm{Ker}(p)$.

9 Montrer que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(t) = \begin{pmatrix} \mu & L \\ C & B \end{pmatrix}$ où μ est le réel de la question 8, $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$ une matrice ligne, $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ une matrice colonne et $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

10 Montrer que si $p' \circ t \circ p'$ n'est pas proportionnel à p', alors B n'est pas une matrice d'homothétie.

Indication : on pourra raisonner par contraposition en déterminant $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(p')$ et en calculant par blocs.

PARTIE 3 : ENDOMORPHISMES DIFFÉRENTS D'UNE HOMOTHÉTIE

On suppose dans cette partie que l'endomorphisme t *n'est pas une homothétie.*

11 Démontrer qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que x et $t(x)$ ne soient pas colinéaires.

Indication : on pourra montrer par l'absurde que si $\forall x \in E,\ (x, t(x))$ est liée, alors t est une homothétie.

12 Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A \end{pmatrix}$ avec $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$ une matrice ligne, la matrice colonne $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.

13 En déduire que si $\mathrm{Tr}\,(t) = 0$, il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que la diagonale de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(t)$ est nulle.

Indication : on pourra procéder par récurrence sur la dimension de E.

Soit n *réels* $m_1, \cdots, m_n$ *vérifiant* $\mathrm{Tr}\,(t) = \sum_{i=1}^{n} m_i$.

14 En dimension $n = 2$, démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}''$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}''}(t)$ a pour éléments diagonaux m_1 et m_2 (dans cet ordre).

Soit un réel m*, on admettra qu'en dimension* $n \geqslant 3$*, il existe un projecteur* q *de* E *de rang* 1*, tel que d'une part* $q \circ t \circ q = mq$ *et d'autre part* $q' \circ t \circ q'$ *ne soit pas proportionnel à* $q' = \mathrm{id}_E - q$.

15 En dimension $n \geqslant 3$, à l'aide des questions 9 et 10, démontrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ de E telle que l'on ait $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(t) = \begin{pmatrix} m_1 & L \\ C & B \end{pmatrix}$ avec $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$ une matrice ligne, $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ une matrice colonne et une matrice carrée $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ qui n'est pas une matrice d'homothétie.

16 En dimension $n \geqslant 3$, démontrer par récurrence qu'il existe une base $\mathcal{B}''$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}''}(t)$ a pour éléments diagonaux $m_1, \cdots, m_n$ (dans cet ordre).

PARTIE 4 : DÉCOMPOSITION EN SOMME DE PROJECTEURS

On suppose désormais que t *est un endomorphisme de* E *vérifiant* $\mathrm{Tr}\,(t) \in \mathbb{N}$ *et* $\mathrm{Tr}\,(t) \geqslant \mathrm{rang}\,(t)$.

On pose $r = \mathrm{rang}\,(t)$ *et* $m = \mathrm{Tr}\,(t)$.

17 Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(t) = \begin{pmatrix} B_1 & 0_{r,n-r} \\ B_2 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ où $B_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ et $B_2 \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$.

Supposons tout d'abord que B_1 *n'est pas la matrice d'une homothétie.*

18 À l'aide de la question 16, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(t) = \begin{pmatrix} B'_1 & 0_{r,n-r} \\ B'_2 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ où $B'_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ a comme termes diagonaux des entiers naturels non nuls $m_1, \cdots, m_r$ et $B'_2 \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$.

19 En déduire que t est la somme d'un nombre fini de projecteurs.

On suppose maintenant que B_1 *est la matrice d'une homothétie.*

20 Démontrer, là encore, que t est la somme d'un nombre fini de projecteurs.

DS 2.2 : CŒUR ET NILESPACE

PSI 1 2026/2027 **samedi 03 octobre 2026**

Soit E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel et* $f \in \mathcal{L}(E)$ *fixé pour tout le devoir.*

On pose alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \operatorname{Im} f^n$ *et* $N_n = \operatorname{Ker} f^n$ *et enfin* $I = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ *et* $N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$.

PARTIE 1 : PRISE DE CONTACT

1 Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N},\ N_n \subset N_{n+1}$ et $I_{n+1} \subset I_n$.

2 Justifier que I (appelé **cœur** de f) est un sous-espace vectoriel de E.
Montrer que N (appelé **nilespace** de f) est un sous-espace vectoriel de E.

3 Montrer que I et N sont stables par f.

4 On prend seulement ici $E = \mathbb{R}[X]$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ f(P) = XP$. Déterminer N.
Caractériser, pour un entier $n \in \mathbb{N}$, l'endomorphisme f^n ; en déduire I_n. Que vaut donc I ?

PARTIE 2 : QUAND ÇA S'ARRÊTE !

On suppose maintenant qu'il existe un $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $N_n = N_{n+1}$ *et un* $m \in \mathbb{N}$ *tel que* $I_m = I_{m+1}$.

On pose alors (l'existence est claire) : $s = \operatorname{Min}(k \in \mathbb{N} \mid N_k = N_{k+1})$ *et* $r = \operatorname{Min}(k \in \mathbb{N} \mid I_k = I_{k+1})$.

5 Montrer par récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N},\ N_{s+p} = N_s$. Que vaut donc N ?

6 Justifier que f_N est nilpotente et que f_I est injective.

7 Établir que $N \cap I_s = \{0_E\}$. Indication : on pourra considérer N_{2s}.

8 Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N},\ I_{r+p} = I_r$. Identifier alors I. Prouver que f_I est surjective.

9 En se servant de $I_{2r} = I_r$, montrer que $E = I + N_r$.

10 Montrer que $E = I \oplus N$, que f_N est nilpotente et que f_I est un automorphisme de I. Établir enfin que $r = s$.

PARTIE 3 : EN DIMENSION FINIE

Dans cette partie, on suppose que E *est un espace de dimension* $p \in \mathbb{N}$.

11 Montrer qu'il existe un $n \in [\![0; p]\!]$ tel que $N_n = N_{n+1}$. En déduire que $I_n = I_{n+1}$.

Les entiers r *et* s *(on sait que* $r = s$*) de la partie 2 sont donc définis dans ce cas.*

Soit l'endomorphisme (on l'admet) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *défini par* $f(x, y, z, t) = (2x, z, x + y - t, x - y + z + t)$.

12 Donner la matrice A de f dans la base canonique. Calculer A^2 et A^3. En déduire que $r = s = 2$.

13 Trouver une base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ de $\mathbb{R}^4$ telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.