PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 07

PSI 1 2026-2027 **du lundi 09/11 au vendredi 13/11**

1 **Séries numériques, propriétés** : voir programme précédent

2 **Séries à termes positifs** : voir programme précédent

3 **Séries à termes réels ou complexes** : voir programme précédent

4 **Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice** :

- valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme ; spectre ;
- exemples en dimension infinie : spectre vide, spectre infini ;
- les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux sont en somme directe ;
- rapport entre commutation des endomorphismes et stabilité des sous-espaces propres ;
- valeurs propres réelles ou complexes d'une matrice ; relation avec la conjugaison ;
- relation entre spectre d'un endomorphisme et d'une matrice ;

5 **Polynôme caractéristique** :

- définition du polynôme caractéristique ($\chi_u = \det(X\mathrm{id}_E - u)$) d'une matrice ou d'un endomorphisme ;
- expression développée de $\chi_u = X^n - \mathrm{Tr}\,(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u)$;
- les valeurs propres d'un endomorphisme u sont exactement les racines de χ_u ;
- multiplicité algébrique (ordre de multiplicité de la racine dans χ_u) d'une valeur propre ;
- si χ_u est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ relation entre $\dim(E)$, $\mathrm{Tr}\,(u)$, $\det(u)$ et les valeurs propres ;
- polynôme caractéristique de matrices semblables ou de la transposée d'une matrice ;
- si F stable par u alors χ_{u_F} divise χ_u ;
- multiplicité géométrique (dimension du sous-espace propre associé) d'une valeur propre ;
- la multiplicité géométrique est inférieure à la multiplicité algébrique (et $\geqslant 1$) pour une valeur propre ;
- application du polynôme caractéristique pour calculer le déterminant des matrices ;
- théorème de Cayley-Hamilton (preuve non exigible) ;

6 **Diagonalisation en dimension finie** :

- définition d'un endomorphisme diagonalisable, propriétés équivalentes ;
- projecteurs (spectraux) associés à la décomposition de l'espace avec les sous-espaces propres ;

QUESTIONS DE COURS :

1 définir le polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie (déf. 4.3)
2 définir les ordres de multiplicité géométrique et algébrique d'une valeur propre (déf 4.4 et 4.5)
3 énoncer la propriété sur des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes (prop. 4.2)
4 énoncer la propriété sur les valeurs propres et sous-espaces propres de matrices semblables (prop. 4.5)
5 énoncer le théorème concernant certains coefficients de χ_u (th. 4.7)
6 énoncer le résultat sur le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit (rem. 4.9)
7 énoncer le théorème de Cayley-Hamilton (th. 4.12)
8 prouver que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et $\lambda \neq 0$, alors $E_\lambda(u) \subset \mathrm{Im}\,(u)$ (prop. 4.1)
9 prouver que si u et v commutent, les $E_\lambda(u)$ sont stables par v (prop. 4.3)
10 prouver que λ est valeur propre de u si et seulement si $\chi_u(\lambda) = 0$ (th. 4.8)

Prévision pour la prochaine semaine : réduction