BAREME DS2
130 points

Sujet 1 (75 points)

Partie I (20 points)

1	2	expression du terme (AB)(i,i) ou (BA)(j,j) (1) + tr(AB)=tr(BA) (1)
2	3	formule A=PA'P^(-1) (1) + égalité des traces avec question 1 (2)
3	2	ker(p) inter im(p)={0} (1) + E=im(p) + ker(p) (1)
4	3	im(p')=ker(p) par double inclusion (2) + im(p)=ker(p') (1)
5	3	base adaptée (1) + matrice de p dans cette base (1) + trace = rang (1)
6	2	famille génératrice avec p+q vecteurs ou Grassmann
7	2	linéarité de la trace (1) + trace est un entier (1)
	3	initialisation (1) + récurrence (2)

Partie II (11 points)

8	2	Im(p) est une droite donc existence f1<>0 (1) + p(t(f1))=mu f1 (1)
	2	p(x)=a f1 et ptp=mu p
9	3	p(f1)=f1 (1) + t(f1)-mu f1 est dans ker(p) donc matrice (2)
10	2	matrice de p' dans la base adaptée (1) + passage à la contraposée (1)
	2	calcul matriciel par blocs pour montrer que p'tp'=alpha p' si B=alpha I(n-1)

Partie III (25 points)

11	3	a_x=a_y si (x,y) liée (1) + a_x=a_y si (x,y) libre
12	2	choix avec Q11 de e1 tel que (e1,t(e1)) libre (1) + construction base (1)
	2	par le TBI (1) + matrice dans cette nouvelle base (1)
13	3	cas où on a une homothétie (1) + cas n=2 avec Q12 et trace nulle (2)
	3	hérédité en posant un sous-espace et et un endomorphisme s' de trace nulle
14	2	poser t'=t-m_1id_E (1) + t' n'est pas une homothétie (1)
	2	Q12 appliquée à t' et bonne diagonale
15	3	poser q et q' associés à m=m_1 (1) + questions 9 et 10 appliquées à t (2)
16	5	initialisation avec Q14 (1) + hérédité (4)

Partie IV (19 points)

17	1	dim(ker(t)=n-r avec formule du rang
	2	base de ker(t) et théorème de la base incomplète et matrice dans cette base
18	3	t1 associé à B1 (1) + construction de m1,...,mr (2)
	2	construction d'une base B' et matrice associée
19	4	écriture de t comme somme de projecteurs de rang 1
20	3	cas tr(t)=rg(t) (1) où t projecteur (1) + cas rg(t)=1 (2)
	4	autres cas en se ramenant la question 19

Sujet 2 (55 points)

Partie I (13 points)

1	2	inclusion de N(n) dans N(n+1) (1) + inclusion de I(n+1) dans I(n) (1)
2	1	I sous-espace en tant qu'intersection de sous-espaces
	3	N contient 0 donc no vide (1) + stable par combinaison linéaire (2)
3	2	I est stable par f car si x est dans I, f(x) aussi (1 pour le cas n=0)
	1	N est stable par f
4	2	f^n:P → X^nP (1) + N(n)={0} car intégrité donc N={0}
	2	I(n)=X^nR[X] (1) et I={0} (1)

Partie II (27 points)

5	4	initialisation pour p=0 et p=1 (1) + hérédité (2) + conclusion (1)
	1	N=N(s) en détaillant ou par la double inclusion
6	1	pour justifier qu'on peut induit f_I et f_N car I et N stables par f
	4	f_n est nilpotente car f_N^s=0 (1) + f_I injective (3)
7	2	N inter I(s)={0}
8	3	initialisation + hérédité + conclusion
	2	I=I(r) sans trop de justification (1) + f_I surjective (1)
9	2	E=I(r)+N(r)=I+N(r)
10	2	I dans I(s) donc I inter N={0} (1) + N(r) dans N donc E=I+N (1)
	6	r<s impossible (3) + r>s impossible (3)

Partie III (15 points)

11	2	par l'absurde dim(N(n))>=n (1) si n<=p+1 + contradiction (1)
	2	formules du rang pour f^n et f^(n+1) (1) + inclusion et égalité dimension (1)
12	3	détermination de A (1) + calcul de A^2 (1) + calcul de A^3 (1)
	2	rang de A^2 et A^3 détaillé donc r=s=2
13	1	quatre conditions imposéees à v_1, v_2, v_3, v_4
	4	détermination de v_1 (1) + v_2 (1) + v_3 (1) + v_4 (1)
	1	vérification que (v_1,v_2,v_3,v_4) est une base de R^4 et matrice