CHAPITRE 8
ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS ET ESPACES EUCLIDIENS

⊙ À l'origine, chez les babyloniens et les égyptiens, la géométrie est créée suite aux multiples crues du Nil. En effet, ces multiples débordements du fleuve contraignent les arpenteurs égyptiens à retracer régulièrement les limites des propriétés agricoles afin de redistribuer les terrains de façon équitable ; ils déterminaient des longueurs, des surfaces divisées en rectangles, carrés et autres triangles en utilisant la corde à 13 nœuds notamment pour marquer les angles droits. La géométrie s'enrichit des notions de distances, normes, angles, donc d'orthogonalité.

Plus tard, avec les grecs, la géométrie devient plus rigoureuse avec Thales et l'école de Pythagore et celle d'Alexandrie où enseignent Euclide, Archimède et Apollonius. Dans les 13 volumes de ses "Éléments", Euclide pose les premières bases solides de la logique, de l'arithmétique et de la géométrie et donne son nom à la géométrie euclidienne que nous connaissons : une référence encore aujourd'hui.

Après plus d'un millénaire de stagnation scientifique, les mathématiciens arabes comme Al-Biruni, Al-Khwarizmi dont le nom est à l'origine du terme d'algorithme, apportent des progrès substanciels en trigonométrie, algèbre, géométrie.

La Renaissance voit naître la géométrie projective et la perspective avec Brunelleschi à Florence pour des besoins de représentation artistique fidèle à la nature : cette théorie est développée par Piero de la Francesca et plus tard Gérard Désargues. Néanmoins, on lui préfère plus tard la géométrie analytique que développe René Descartes avec l'introduction des repères et des coordonnées.

Le XIX^{e} siècle amène un nouveau tournant avec l'introduction par Gauss des géométries non euclidiennes qui s'affranchissent du cinquième postulat parmi les cinq axiomes d'Euclide : c'est la naissance de la géométrie elliptique de Riemann et de la géométrie hyperbolique de Lobatchevski, Klein ou Poincaré dans lesquelles par exemple la somme des angles des triangles ne fait plus 180°.

La puissance des outils tels que norme, produit scalaire, orthogonalité en dimension finie a conduit à extrapoler ces notions sur des espaces de dimension infinie, par exemple les espaces fonctionnels : on parle alors d'espaces préhilbertiens. Certaines propriétés ne sont plus vérifiées mais on compense cette perte par l'apport de la topologie dans ces espaces vectoriels normés.

TABLE DES MATIÈRES

Programme officiel ..... page 138

Partie 1 : espaces préhilbertiens
- 1 : définitions et premières propriétés ..... page 139
- 2 : produit scalaire ..... page 141
- 3 : orthogonalité ..... page 142

Partie 2 : espaces euclidiens
- 1 : définitions et bases orthonormales ..... page 144
- 2 : projecteurs orthogonaux ..... page 145
- 3 : formes linéaires sur un espace euclidien ..... page 147
- 3 : orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie ..... page 148

PROGRAMME

L'objectif majeur est le théorème de projection orthogonale et l'existence de la meilleure approximation quadratique. On s'appuie sur des exemples de géométrie du plan et de l'espace pour illustrer les différentes notions.

1 : Produit scalaire et norme associée

Contenus	Capacités & Commentaires
Produit scalaire.	*Notations* $\langle x, y\rangle$, $(x|y)$, $x \cdot y$.
Espace préhilbertien réel, espace euclidien.	
Exemples de référence :	
produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^n$, *produit scalaire canonique sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *produit scalaire défini par une intégrale sur* $C^0([a, b], \mathbb{R})$.	*Expression* $X^T Y$. *Expression* $\mathrm{tr}(A^T B)$.
Inégalité de Cauchy-Schwarz, *cas d'égalité.*	
Norme associée au produit scalaire.	*Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire. Les étudiants doivent savoir manipuler les identités remarquables sur les normes (développement de* $||u \pm v||^2$, *identité de polarisation).*

2 : Orthogonalité

Contenus	Capacités & Commentaires
Vecteurs orthogonaux, sous-espaces orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel F, *d'une partie* X.	*Notation* $F^\perp$. *L'orthogonal d'une partie est un sous-espace vectoriel.*
Famille orthogonale, orthonormée (ou orthonormale).	
Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.	
Théorème de Pythagore.	
Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	

3 : Bases orthonormées d'un espace euclidien

Contenus	Capacités & Commentaires
Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormée incomplète.	
Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.	

4 : Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Contenus	Capacités & Commentaires
Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie.	*Dimension de $F^\perp$ en dimension finie.*
Projection orthogonale p_F sur un sous-espace vectoriel F de dimension finie.	*Les étudiants doivent savoir déterminer $p_F(x)$ en calculant son expression dans une base orthonormée de F ou en résolvant un système linéaire traduisant l'orthogonalité de $x - p_F(x)$ aux vecteurs d'une famille génératrice de F.*
Distance d'un vecteur à un sous-espace. Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F.	*Notation $d(x, F)$.*
Projeté orthogonal d'un vecteur sur l'hyperplan $\mathrm{Vect}(u)^\perp$; distance entre x et $\mathrm{Vect}(u)^\perp$.	*Application géométrique à des calculs de distances.*

5 : Formes linéaires sur un espace euclidien

Contenus	Capacités & Commentaires
Représentation d'une forme linéaire à l'aide d'un produit scalaire.	*Vecteur normal à un hyperplan.*

PARTIE 8.1 : ESPACES PRÉHILBERTIENS

8.1.1 : Définitions et premières propriétés

DÉFINITION 8.1 :
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$, on dit que φ est une :

- **forme bilinéaire** *si* $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (u, v, w) \in E^3,\ \begin{cases} \varphi(\alpha u + \beta v, w) = & \alpha\varphi(u, w) + \beta\varphi(v, w) \\ \varphi(u, \alpha v + \beta w) = & \alpha\varphi(u, v) + \beta\varphi(u, w) \end{cases}$.
- **forme symétrique** *si :* $\forall (u, v) \in E^2,\ \varphi(u, v) = \varphi(v, u)$.

REMARQUE 8.1 : Pour montrer que φ est bilinéaire symétrique, il suffit de prouver que φ est symétrique et que $u \mapsto \varphi(u, v)$ est linéaire pour tout v de E (φ est alors dite linéaire en la première variable).

EXEMPLE 8.1 : *Soit $w \in C^0_m([a; b], \mathbb{R}) = E$ et $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f, g) = \int_a^b fgw$.*

REMARQUE 8.2 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et φ une forme bilinéaire symétrique sur E.
On appelle **forme quadratique** *(hors programme) associée à φ l'application $q : E \to \mathbb{R}$ définie par $\forall u \in E,\ q(u) = \varphi(u, u)$. Soit deux vecteurs u et v de E et un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$.*

- *La forme quadratique q n'est pas linéaire : $q(\lambda u) = \lambda^2 q(u)$ si $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.*
- $\varphi(u, v) = \frac{1}{2}\big(q(u + v) - q(u) - q(v)\big) = \frac{1}{2}\big(q(u) + q(v) - q(u - v)\big)$ *(identités de polarisation)*
- $\varphi(u, v) = \frac{1}{4}\big(q(u + v) - q(u - v)\big)$ *(identité de polarisation).*
- $q(u + v) + q(u - v) = 2\big(q(u) + q(v)\big)$ *(identité du parallélogramme).*

DÉFINITION 8.2 :
Soit E *un* $\mathbb{R}$*-espace,* φ *une forme bilinéaire symétrique sur* E *et* q *associée à* φ*, on dit que*

- φ *est* **positive** *si :* $\forall u \in E, \varphi(u,u) = q(u) \geqslant 0$.
- φ *est* **définie positive** *si :* $\forall u \in E, \varphi(u,u) = q(u) \geqslant 0$ et $\varphi(u,u) = q(u) = 0 \Longrightarrow u = 0_E$.

REMARQUE HP 8.3 : On a les mêmes définitions pour la forme quadratique q *associée à* φ.

EXERCICE 8.2 : *Soit* $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle bornée, alors* $\varphi : (u,v) \to \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n v_n$ *est bilinéaire symétrique sur* $\ell^1(\mathbb{R})$.
À quelle condition nécessaire et suffisante sur a *la forme* φ *est-elle positive ? définie positive ?*

REMARQUE HP 8.4 : • $C(\varphi) = \{ u \in E \mid q(u) = 0 \} \subset E$ *est appelé le* **cône isotrope** *de* φ *(ou* q*).*

- $C(\varphi)$ *est bien un* **cône** *car* $0_E \in C(\varphi)$ *et si* $u \in C(\varphi)$*, alors on a :* $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda u \in C(\varphi)$.
- *Une forme bilinéaire telle que* $C(\varphi) = \{0_E\}$ *est qualifiée de* **forme anisotrope**.

PROPOSITION SUR L'INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ 8.1 :
Soit E **un** $\mathbb{R}$**-espace,** φ **une forme bilinéaire symétrique sur** E **et** q **associée à** φ **:**

- **Si** φ **est positive alors :** $\forall (u,v) \in E^2,\ \left|\varphi(u,v)\right| \leqslant \sqrt{q(u)} \times \sqrt{q(v)}$.
- **Si** φ **est définie positive, de plus :** $\left|\varphi(u,v)\right| = \sqrt{q(u)} \times \sqrt{q(v)} \Longleftrightarrow \big((u,v)$ **est liée**$\big)$.

EXEMPLE 8.3 : $\varphi : (x,y) \to \sum_{k=1}^{n} a_k x_k y_k$ *est bilinéaire symétrique sur* $\mathbb{R}^n$ *si* $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

Si $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$*, montrer que :* $\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k} \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{6}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$.

PROPOSITION SUR L'INÉGALITÉ DE MINKOWSKI 8.2 :
Soit E **un** $\mathbb{R}$**-espace,** φ **une forme bilinéaire symétrique sur** E **et** q **associée à** φ **:**

- **Si** q **est positive alors :** $\forall (u,v) \in E^2,\ \sqrt{q(u+v)} \leqslant \sqrt{q(u)} + \sqrt{q(v)}$.
- **Si** q **est définie positive, on a de plus l'équivalence suivante :**
  $\sqrt{q(u+v)} = \sqrt{q(u)} + \sqrt{q(v)} \Longleftrightarrow \big((u,v)$ **positivement liée**$\big)$ **(soit** $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+,\ u = \lambda v$ **ou** $v = \lambda u$**).**

C'est la non moins classique inégalité triangulaire ou inégalité de MINKOWSKI**.**

8.1.2 : Produit scalaire

DÉFINITION 8.3 :

Soit E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel et* $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$*, on dit que* φ *est un* **produit scalaire** *sur* E *si* φ *est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur* E*, c'est-à-dire si :*

- $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (u, v, w) \in E^3,\ \begin{cases} \varphi(\alpha u + \beta v, w) = & \alpha\varphi(u, w) + \beta\varphi(v, w) \\ \varphi(u, \alpha v + \beta w) = & \alpha\varphi(u, v) + \beta\varphi(u, w) \end{cases}$ *(bilinéarité).*
- $\forall (u, v) \in E^2,\ \varphi(u, v) = \varphi(v, u)$ *(symétrie).*
- $\forall u \in E,\ \varphi(u, u) = q(u) \geqslant 0$ *(positivité).*
- $\forall u \in E,\ \varphi(u, u) = q(u) = 0 \Longrightarrow u = 0_E$ *(aspect défini).*

Un **espace préhilbertien réel** *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.*

On appelle **norme euclidienne** *associée à* φ *l'application* $||.|| : E \to \mathbb{R}_+$ *définie par* $||x|| = \sqrt{\varphi(x, x)}$.

REMARQUE 8.5 : On note souvent $(u|v) = \varphi(u, v)$*, ou* $u.v$ *(en géométrie) ou* $\langle u, v\rangle$ *le produit scalaire.*

EXEMPLE 8.4 : $\varphi : (P, Q) \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\,dt$ *est un produit scalaire sur* $\mathbb{R}[X]$*. Ainsi :*

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2,\ \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \big(P(t) + Q(t)\big)^2 e^{-t^2}\,dt} \leqslant \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \big(P(t)\big)^2 e^{-t^2}\,dt} + \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \big(Q(t)\big)^2 e^{-t^2}\,dt}.$$

THÉORÈME SUR LES PROPRIÉTÉS DE LA NORME EUCLIDIENNE 8.3 :

Soit E **un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire noté** $(.|.)$**. Alors** $||.||$ **est une norme, c'est-à-dire :**

(i) $\forall x \in E,\ ||x|| \geqslant 0$ **(positivité),**

(ii) $\forall x \in E,\ ||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0_E$ **(séparation),**

(iii) $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E,\ ||\lambda x|| = |\lambda|\,||x||$ **(homogénéité),**

(iv) $\forall (x, y) \in E^2,\ ||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$ **(inégalité triangulaire ou de** MINKOWSKI**).**

De plus : $||x + y|| = ||x|| + ||y|| \Longleftrightarrow \big(\exists \lambda \in \mathbb{R}^+,\ x = \lambda y$ **ou** $y = \lambda x\big)$ **(**x **et** y **sont positivement liés).**

EXEMPLE 8.5 : *Voici quelques produits scalaires usuels :*

- *Produit scalaire canonique sur* $\mathbb{R}^n$ *:* $(x|y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ *si* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *et* $y = (y_1, \ldots, y_n)$.
- *Produit scalaire canonique sur* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *:* $(A|B) = \mathrm{tr}\,({}^tAB) = \mathrm{tr}(A^TB)$.
- *Produit scalaire canonique sur* $\mathbb{R}_n[X]$ *ou* $\mathbb{R}[X]$ *:* $(P|Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} \times \frac{Q^{(k)}(0)}{k!}$.
- *Sur* $\mathbb{R}[X]$*, on définit un produit scalaire en posant* $(P|Q) = \displaystyle\int_a^b PQ$ *avec* $a < b$.
- *Sur* $C^0([a; b], \mathbb{R})$*, si* $w > 0 \in C^0([a; b], \mathbb{R})$ *:* $(f|g) = \displaystyle\int_a^b fg$ *ou plus généralement* $(f|g) = \displaystyle\int_a^b fgw$.
- *Sur* $\mathbb{R}_n[X]$*, si* $\alpha_0, \cdots, \alpha_n$ *sont distincts deux à deux :* $(P|Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(\alpha_k)Q(\alpha_k)$.
- *Sur* $L^2(I, \mathbb{R}) \cap C^0(I, \mathbb{R})$ *(fonctions de carré intégrable et continues) :* $(f|g) = \displaystyle\int_I fg$.
- *Sur* $\ell^2(\mathbb{R})$*, ensemble des suites réelles de carré sommable :* $\big((u_n)|(v_n)\big) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k v_k$.
- *Sur* $C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *(fonctions continues et* 2π*-périodiques sur* $\mathbb{R}$*) :* $(f|g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$.

REMARQUE 8.6 : Avec ces nouvelles notations, on a donc :

THÉORÈME DES IDENTITÉS DE POLARISATION, DU PARALLÉLOGRAMME ET DE L'INÉGALITE DE CAUCHY-SCHWARZ 8.4 :

Soit E un espace préhilbertien réel et $(u,v) \in E^2$:

- $|(u|v)| \leqslant ||u|| \times ||v||$ **(CAUCHY-SCHWARZ) et** $|(u|v)| = ||u|| \times ||v|| \iff (u,v)$ **est liée.**
- $(u|v) = \frac{1}{2}\left(||u+v||^2 - ||u||^2 - ||v||^2\right) = \frac{1}{2}\left(||u||^2 + ||v||^2 - ||u-v||^2\right)$ **(identités de polarisation).**
- $(u|v) = \frac{1}{4}\left(||u+v||^2 - ||u-v||^2\right)$ **(identité de polarisation).**
- $||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2\left(||u||^2 + ||v||^2\right)$ **(identité du parallélogramme).**

REMARQUE 8.7 :

- *L'inégalité de* CAUCHY-SCHWARZ *nous permet de définir l'angle non orienté* $\theta \in [0;\pi]$ *entre deux vecteurs non nuls* u *et* v *de* E *par :* $\theta = \text{Arccos}\left(\frac{(u|v)}{||u||\,||v||}\right)$.
- *L'ensemble des formes bilinéaires sur* E *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel, celui des formes bilinéaires symétriques en est un sous-espace (mais pas l'ensemble des formes bilinéaires symétriques positives) ; par voie de conséquence, l'ensemble des formes quadratiques est aussi un espace vectoriel.*

8.1.3 : Orthogonalité

DÉFINITION 8.4 :

Soit $(E,(.|.))$ *un espace préhilbertien réel et* $(u,v) \in E^2$*, on dit que :*

- u *est* **unitaire** *(ou normé) si* $||u|| = 1$.
- u *et* v *sont* **orthogonaux** *si* $(u|v) = 0$ *; on le note* $u \perp v$.

REMARQUE 8.8 : • *Si* $x \neq 0_E$ *alors le vecteur* $\frac{x}{||x||}$ *est toujours unitaire.*

- *Dans un espace préhilbertien réel, si* $||x|| = ||y||$ *alors* $(x+y) \perp (x-y)$ *(losange).*

DÉFINITION 8.5 :

Soit $(E,(.|.))$ *un espace préhilbertien réel et* $(x_i)_{i\in I}$ *une famille de vecteurs de* E*, on dit que* $(x_i)_{i\in I}$ *est :*

- **orthogonale** *si* $\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Longrightarrow (x_i|x_j) = 0$.
- **orthonormale** *(ou* **orthonormée***) si* $\forall (i,j) \in I^2,\ (x_i|x_j) = \delta_{i,j}$.

ORAL BLANC 8.6 : *Soit* $\varphi : \mathbb{R}[X]^2 \to \mathbb{R}$ *définie par* $\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$.

a. *Montrer que* φ *est bien défini et que c'est un produit scalaire sur* $\mathbb{R}[X]$.

b. *Montrer que la famille* $(T_n)_{n\geqslant 0}$ *des polynômes de* TCHEBYCHEV *est orthogonale pour* φ.

PROPOSITION SUR LA RELATION DE PYTHAGORE 8.5 :
Soit E un espace préhilbertien réel.

- **Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.**
- **Si $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une famille orthogonale : $\left|\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right|\right|^2 = \sum_{k=1}^{n} ||x_k||^2$.**

REMARQUE 8.9 : En ce qui concerne la réciproque du théorème de PYTHAGORE *:*

- *Pour $(x,y)\in E^2, ||x+y||^2 = ||x||^2+||y||^2 \iff x\perp y$. C'est donc valable quand il y a deux vecteurs.*
- *Si $(x_1,\cdots,x_n)$ vérifie la relation de* PYTHAGORE *avec $n>2$, elle n'est pas forcément orthogonale.*

EXEMPLE 8.7 : *Dans $E=\mathbb{R}^2$, prenons $x_1=(1,1)$, $x_2=(1,-2)$ et $x_3=(2,3)$ pour s'en convaincre.*

DÉFINITION 8.6 :
Soit $\big(E,(.|.)\big)$ un espace préhilbertien réel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont des **sous-espaces orthogonaux** *si $\forall (x,y)\in F\times G, (x|y)=0$; on le note $F\perp G$.*

PROPOSITION SUR LA SOMME DIRECTE DE SOUS-ESPACES ORTHOGONAUX 8.6 :
Soit E un espace préhilbertien réel et $F_1,\cdots,F_n$ des sous-espaces vectoriels de E supposés deux à deux orthogonaux. Alors la somme des F_k est directe : $\sum_{k=1}^{n} F_k = \bigoplus_{k=1}^{n} F_k$.

DÉFINITION 8.7 :
Soit $\big(E,(.|.)\big)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E. On définit **l'orthogonal** *de F, noté $F^\perp$ par : $F^\perp = \big\{x\in E \mid \forall y\in F,\ (x|y)=0\big\}$.*

REMARQUE 8.10 : • *Si $X\subset E$, on appelle $X^\perp = \big\{x\in E \mid \forall y\in X,\ (x|y)=0\big\}$ l'orthogonal de X.*

- *Si $(e_1,\cdots,e_n)$ est une base de F (plus généralement une famille génératrice suffit), alors pour un vecteur x de E, on a l'équivalence : $x\in F^\perp \iff (\forall k\in[\![1;n]\!],\ x\perp e_k)$.*

PROPOSITION SUR LES PROPRIÉTÉS DE L'ORTHOGONAL DE SOUS-ESPACE 8.7 :
Soit $\big(E,(.|.)\big)$ un espace préhilbertien réel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E :

- $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E
- $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$
- $F\subset G \Longrightarrow G^\perp\subset F^\perp$
- $F\perp G \iff F\subset G^\perp \iff G\subset F^\perp$
- $F\cap F^\perp = \{0_E\}$ et $F\subset \big(F^\perp\big)^\perp$
- $(F+G)^\perp = F^\perp\cap G^\perp$
- $F^\perp+G^\perp\subset (F\cap G)^\perp$

REMARQUE 8.11 : On peut avoir $\big(F^\perp\big)^\perp\neq F$ et/ou $F^\perp+G^\perp\neq (F\cap G)^\perp$.

EXEMPLE 8.8 : *Par exemple, si P et Q sont deux polynômes réels qui vérifient la condition : $\forall U\in\mathbb{R}[X],\ \int_{-1}^{1}\frac{P(t)U(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_{-1}^{1}\frac{Q(t)U(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$, alors $P=Q$.*

EXEMPLE 8.9 : *Avec $E=\mathbb{R}[X]$ muni de $(P|Q)=\int_0^1 P(t)Q(t)dt$, si $F=X\mathbb{R}[X]$ est le sous-espace des polynômes de terme constant nul, alors $F^\perp=\{0\}$ donc $(F^\perp)^\perp = E\neq F$.*

PARTIE 8.2 : ESPACES EUCLIDIENS

8.2.1 : Définitions et bases orthonormales

DÉFINITION 8.8 :

- *Un* **espace euclidien** E *est un espace préhilbertien réel de dimension finie.*
- *Dans un tel espace* E*, une famille* $\mathcal{B}$ *de vecteurs de* E *est dite une* **base orthonormale** *(ou* **orthonormée***) de* E *si* $\mathcal{B}$ *est base de* E *et une famille orthonormale de* E*.*

REMARQUE 8.12 : Pour montrer que $\mathcal{B}$ *est une base orthonormée de* E *:*

- *il suffit de prouver que* $\mathcal{B}$ *est une famille orthonormale et génératrice.*
- *il suffit, si on sait que* $\dim E = n$ *et si* $\mathcal{B}$ *comporte* n *vecteurs, de prouver que* $\mathcal{B}$ *est orthonormale.*

THÉORÈME SUR LE PROCÉDÉ D'ORTHONORMALISATION DE GRAM-SCHMIDT (ÉNORME) 8.8 :
Soit E **un espace préhilbertien réel et** $\mathcal{B} = (x_1, \cdots, x_n)$ **une famille libre de** E**, alors il existe une famille** $(e_1, \cdots, e_n)$ **de vecteurs de** E **qui vérifie les conditions suivantes :**

- $\forall p \in [\![1; n]\!]$, $\text{Vect}(x_1, \cdots, x_p) = \text{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$**.**
- $\mathcal{B}' = (e_1, \cdots, e_n)$ **est une famille orthonormale de** E**.**
- $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $(x_k|e_k) > 0$ **(ceci amène aussi l'unicité).**

REMARQUE 8.13 : Première méthode : on orthogonalise la base $(x_1, \cdots, x_n)$ *en* $(f_1, \cdots, f_n)$ *(avant de normer les vecteurs) avec les formules :*

- $f_1 = x_1$ *(et on a bien* $(f_1|x_1) = ||x_1||^2 > 0$*).*
- $\forall p \in [\![2; n]\!]$, $f_p = x_p - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(f_k|x_p)}{||f_k||^2} f_k$ *(avec* $(f_p|x_p) = ||f_p||^2 > 0$ *car* $f_p \neq 0_E$*).*

On enlève à x_p *son projeté orthogonal sur* $\text{Vect}(f_1, \cdots, f_{p-1})$ *pour que l'on ait* $f_p \in \text{Vect}(f_1, \cdots, f_{p-1})^\perp$*.*

Seconde méthode : on orthonormalise directement $(x_1, \cdots, x_n)$ *en* $(e_1, \cdots, e_n)$ *avec les formules :*

- $e_1 = \frac{x_1}{||x_1||}$ *(et on a bien* $(e_1|x_1) = ||x_1|| > 0$*).*
- $\forall p \in [\![2; n]\!]$, $e_p = \frac{g_p}{||g_p||}$ *en notant* $g_p = x_p - \sum_{k=1}^{p-1} (e_k|x_p) e_k$ *(avec* $(e_p|x_p) = ||g_p|| > 0$ *car* $g_p \neq 0_E$*).*

EXEMPLE 8.10 : *Dans l'espace euclidien canonique* $\mathbb{R}^3$*, orthonormaliser la base* (x_1, x_2, x_3) *(c'est clair) si ces vecteurs sont définis par* $x_1 = (1, 0, 1)$*,* $x_2 = (1, 1, 0)$ *et* $x_3 = (1, 1, 1)$*.*

PROPOSITION DE LA BASE ORTHONORMALE INCOMPLÈTE 8.9 :
Soit E **un espace euclidien, alors** E **possède au moins une base orthonormale. Plus précisément, toute famille orthonormale de** E **peut être complétée en une base orthonormale.**

REMARQUE 8.14 : Si $E = \overset{\perp}{\bigoplus_{1 \leqslant k \leqslant p}} F_k$ *et si* $\mathcal{B}_k$ *est une base orthonormale de* F_k *(pour tout indice* $k \in [\![1; p]\!]$*) alors* $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \amalg \cdots \amalg \mathcal{B}_p$ *est une base orthonormale de* E *dite adaptée à cette décomposition.*

THÉORÈME SUR LES RELATIONS ENTRE COORDONNÉES DANS UNE BASE ORTHONORMALE, PRODUIT SCALAIRE ET NORME 8.10 :
Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E, $(x, y) \in E^2$ qui se décomposent $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$ dans la base $\mathcal{B}$:

- $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $x_k = (e_k|x)$, **($x = \sum_{k=1}^{n} (e_k|x) e_k$: coordonnées en fonction des produits scalaires).**
- $(x|y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ **(produit scalaire en fonction des coordonnées).**
- $||x|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$ **(norme en fonction des coordonnées).**

REMARQUE HP 8.15 : Distance et "base duale", si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E :

- *On a donc* $d(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$ *(distance entre x et y).*
- *Si on pose* $\varphi_k(x) = (e_k|x)$ *alors* $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ *est une base de* $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ *qui est appelée la base duale de* $(e_1, \cdots, e_n)$ *car elle vérifie la propriété :* $\forall (i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, $\varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$ *(symbole de* KRONECKER*).*

PROPOSITION DE TRADUCTION MATRICIELLE DU PRODUIT SCALAIRE 8.11 :
Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de E, on associe à des vecteurs x et y de E les vecteurs colonnes X et Y de leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

Alors on a $(x|y) = {}^tXY = X^TY$ (en identifiant réel et matrice de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$).

REMARQUE FONDAMENTALE 8.16 : Soit E euclidien, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de E :

- *Si* $f \in \mathcal{L}(E)$ *et* $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, *alors on a* $A = \Big((e_i|f(e_j))\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. *Ainsi* $\mathrm{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} (e_k|f(e_k))$.
- *Si $\mathcal{B}'$ est une autre base orthonormée et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$:* $P^T = P^{-1}$.

8.2.2 : Projecteurs orthogonaux

THÉORÈME SUR LE SUPPLÉMENTAIRE ORTHOGONAL 8.12 :
Soit E un espace préhilbertien réel (pas forcément de dimension finie) et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Alors $F^\perp$ et F sont supplémentaires dans E. Et $(F^\perp)^\perp = F$.

En particulier, si E est de dimension finie alors $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$.

DÉFINITION 8.9 :
Dans les conditions du théorème précédent, $F^\perp$ est appelé **le supplémentaire orthogonal** *de F.*

PROPOSITION SUR L'ORTHOGONAL EN DIMENSION FINIE 8.13 :
Soit E un espace euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On savait $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

On a maintenant les égalités : $\left(F^\perp\right)^\perp = F$ et $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

DÉFINITION 8.10 :
Soit E *un espace préhilbertien réel et* F *un sous-espace vectoriel de* E *de dimension finie.*
La **projection orthogonale** *sur* F *est la projection* p_F *sur* F *parallèlement à* $F^\perp$.

ORAL BLANC 8.11 : *Soit* E *un espace euclidien et* p *un projecteur de* E.
Montrer que : p *orthogonal* $\iff \forall x \in E,\ ||p(x)|| \leqslant ||x||$.

PROPOSITION SUR L'EXPRESSION D'UNE PROJECTION ORTHOGONALE 8.14 :
Soit $\big(E,(.|.)\big)$ **un espace préhilbertien réel,** F **un sous-espace de** E **de dimension finie,** $(e_1,\cdots,e_n)$ **une base orthonormale de** F**. Pour** $x \in E$**, le projeté orthogonal de** x **sur** F **est** $p_F(x) = \sum_{k=1}^{n} (e_k|x)e_k$.

REMARQUE 8.17 : Si p_D *est la projection orthogonale sur une droite* $D = \text{Vect}(a)$ *(*$a \neq 0_E$*) et* p_H *celle sur l'hyperplan* H *normal à* D*, alors on a* $p_D(x) = \dfrac{(a|x)}{||a||^2}a$ *et* $p_H(x) = x - p_D(x) = x - \dfrac{(a|x)}{||a||^2}a$.

DÉFINITION 8.11 :
Soit E *un espace préhilbertien réel,* F *un sous-espace de* E*, la* **distance de** $x \in E$ **à** F *est* $d(x,F) = \inf_{y\in F} ||x-y||$.

THÉORÈME DE DISTANCE VECTEUR/SOUS-ESPACE (ÉNORME) 8.15 :
Soit E **un espace préhilbertien réel,** F **un sous-espace de** E **de dimension finie et** $x \in E$**. Alors** $d(x,F) = ||x-p_F(x)|| = ||p_F^\perp(x)|| = \sqrt{||x||^2 - ||p_F(x)||^2} = \min_{y\in F} ||x-y||$ **est atteinte seulement en** $y = p_F(x)$.

EXERCICE CLASSIQUE 8.12 : *Déterminer* $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} \left(x^2 - ax - b\right)^2 dx$.

PROPOSITION DE DISTANCE D'UN VECTEUR À DROITE OU HYPERPLAN 8.16 :
Soit E **un espace euclidien,** $H = \text{Vect}(a)^\perp$ **un hyperplan de** E **(donc** $a \neq 0_E$**), la droite associée** $D = H^\perp = \text{Vect}(a)$ **et** $x \in E$ **:** $d(x,H) = \dfrac{|(x|a)|}{||a||}$ **et** $d(x,D) = \left|\left|x - \dfrac{(a|x)}{||a||^2}a\right|\right| = \sqrt{||x||^2 - \dfrac{(x|a)^2}{||a||^2}}$.

ORAL BLANC 8.13 : *Centrale PSI 2013 Marine Luby*
Soit $(M|N) = \text{tr}(M^TN)$ *défini sur les matrices de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et* G *l'ensemble des matrices scalaires.*

a. *Montrer que c'est un produit scalaire sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. *Montrer que :* $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \text{tr}(M)^2 \leqslant n\,\text{tr}(M^TM)$.

c. *Caractériser* $G^\perp$*. Soit* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, calculer* $\min_{\text{tr}(M')=0} (||M - M'||)$.

REMARQUE HP 8.18 : Soit $\big(E,(.|.)\big)$ *un espace préhilbertien réel,* $(e_1,\cdots,e_p)$ *une famille orthonormée de vecteurs de* E*,* $F = \text{Vect}(e_1,\cdots,e_p)$*, alors* $\forall x \in E,\ \sum_{k=1}^{p} (e_k|x)^2 = ||p_F(x)||^2 \leqslant ||x||^2$ *(inégalité de* Bessel*).*

REMARQUE 8.19 : Polynômes orthogonaux (HP) : Soit I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *non réduit à un point,* $w \in C^0(I, \mathbb{R}_+^*)$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}, t \mapsto t^{2n}w(t)$ *est intégrable sur* I*. Ainsi, en notant* E *l'ensemble des fonctions polynomiales sur* I*,* E *un espace préhilbertien réel en le munissant du produit scalaire* $(f|g) = \int_I fgw$*. En appliquant le procédé de* GRAM-SCHMIDT *à la base canonique* $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(on identifie les polynômes aux fonctions polynomiales), on a l'existence (et même l'unicité) de* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que :*

- $\forall n \in \mathbb{N},\ \deg(P_n) = n$ *(pour qu'on ait* $\forall n \in \mathbb{N},\ \text{Vect}(1, \cdots, X^n) = \mathbb{R}_n[X] = \text{Vect}(P_0, \cdots, P_n)$*).*
- $\forall n \in \mathbb{N},\ ||P_n|| = 1$ *(on peut aussi imposer* P_n *unitaire par exemple).*
- $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2,\ n \neq m \Longrightarrow P_n \perp P_m$.

EXEMPLE 8.14 : *Quelques suites de polynômes orthogonaux classiques :*

- $I = [-1; 1]$ *et* $w(t) = 1$ *: ce sont les polynômes de* LEGENDRE.
- $I =]-1; 1[$ *et* $w(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ *: ce sont les polynômes de* TCHEBYCHEV.
- $I = \mathbb{R}_+$ *et* $w(t) = e^{-t}$ *: ce sont les polynômes de* LAGUERRE.
- $I = \mathbb{R}$ *et* $w(t) = e^{-t^2}$ *: ce sont les polynômes de* HERMITTE.

8.2.3 : Formes linéaires sur un espace euclidien

THÉORÈME DE REPRÉSENTATION (ÉNORME) 8.17 :
Soit $(E, (.|.))$ **un espace euclidien et** φ **une forme linéaire (élément de** E^***) alors il existe un unique vecteur** a **de** E **tel que** $\forall x \in E,\ \varphi(x) = (a|x)$**.**

REMARQUE 8.20 : On pose, pour $a \in E$, $\varphi_a : x \in E \mapsto (a|x)$ *alors l'application* $\theta : E \to E^*$ *définie par* $\theta(a) = \varphi_a$ *est un isomorphisme de* E *sur* E^*.

EXERCICE 8.15 : *Soit* $E = \mathbb{R}_1[X]$ *muni du produit scalaire* $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

Trouver l'unique polynôme $Q_0 \in \mathbb{R}_1[X]$ *tel que* $\forall P \in E,\ P(0) = (P|Q_0)$.

REMARQUE 8.21 : En dimension infinie, si φ *est une forme linéaire sur un espace préhilbertien réel* E*, l'existence d'un vecteur* $a \in E$ *tel que* $\forall x \in E,\ \varphi(x) = (a|x)$ *n'est pas assurée.*

EXEMPLE 8.16 : *Si* $E = \mathbb{R}[X]$ *muni du produit scalaire canonique, on définit la forme linéaire* $\varphi : P \mapsto \int_0^1 P(t)dt$*, alors il n'existe aucun polynôme* $Q \in E$ *tel que* $\forall P \in E,\ \varphi(P) = (Q|P)$.

REMARQUE 8.22 : Soit H *un hyperplan de* E *euclidien, il existe donc un vecteur non nul* $a \in E$ *tel que* $H = \text{Ker}(\varphi)$ *et* $\forall x \in E,\ \varphi(x) = (a|x)$*. Le vecteur* a *est alors un vecteur normal à l'hyperplan* H *car* $x \in H \Longleftrightarrow \varphi(x) = 0 \Longleftrightarrow a \perp x$ *d'où* $H = \text{Vect}(a)^\perp$*. Les vecteurs* αa *avec* $\alpha \neq 0$ *sont aussi normaux à* H.

8.2.4 : Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie

REMARQUE 8.23 : Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ deux bases d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On a deux possibilités : $\det_{\mathcal{B}}(e'_1, \cdots, e'_n) > 0$ *ou* $\det_{\mathcal{B}}(e'_1, \cdots, e'_n) < 0$.

DÉFINITION 8.12 :

• *Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. On dit que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont* **la même orientation** *si* $\det_{\mathcal{B}}(e'_1, \cdots, e'_n) > 0$ *(c'est-à-dire* $\det(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}) > 0$*).*

• *Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$. On dit que $\mathcal{B}$ est une* **base directe** *si $\mathcal{B}$ a la même orientation que la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Dans le cas contraire, on dit que $\mathcal{B}$ est une* **base indirecte**.

REMARQUE 8.24 :

• *Le relation "être de même orientation" est une relation d'équivalence sur les bases de E.*

• *Si le $\mathbb{R}$-espace E ne possède pas de base canonique (la plupart des espaces) alors orienter E consiste à choisir une base $\mathcal{B}_0$ de référence qui sera imposée directe, ensuite on appellera directes les bases $\mathcal{B}$ de E qui ont la même orientation que $\mathcal{B}_0$, les autres seront dites indirectes.*

• *La notion de base directe n'a aucun sens dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.*

COMPÉTENCES

- *Montrer rigoureusement qu'une application est un produit scalaire.*
- *Reconnaître un cadre préhilbertien pour appliquer l'inégalité de* Cauchy-Schwarz.
- *Avoir à disposition plusieurs exemples sur les polynômes, les fonctions, la géométrie....*
- *Savoir appliquer les identités de polarisation pour passer de la norme au produit scalaire.*
- *Interpréter un sous-espace vectoriel comme l'orthogonal d'un autre sous-espace.*
- *Maîtriser la pratique et la théorie de l'orthogonalisation de* Gram-Schmidt.
- *Utiliser efficacement les relations avec les coordonnées dans une base orthonormale.*
- *Se servir des projecteurs orthogonaux pour simplifier les problèmes.*
- *Reconnaître dans une recherche de minimum la distance d'un vecteur à un sous-espace.*
- *Passer des hyperplans aux formes linéaires et aux vecteurs par le théorème de représentation.*
- *Connaître les formules particulières de distance d'un vecteur à une droite ou un hyperplan.*