CHAPITRE 6
SOMMABILITÉ

6.1 : Borne supérieure

DÉFINITION 6.1 :
Sur $[0;+\infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$*, on prolonge les opérations* $+$ *et* $\times$ *classiques en rajoutant :*
- $a + (+\infty) = (+\infty) + a = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$ *si* $a \in \mathbb{R}_+$,
- $a \times (+\infty) = (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$ *si* $a > 0$ *et* $0 \times (+\infty) = (+\infty) \times 0 = 0$.

On prolonge aussi la relation d'ordre $\leqslant$ *en convenant que* $a \leqslant (+\infty)$ *si* $a \in \mathbb{R}_+$, $(+\infty) \leqslant (+\infty)$.

PROPOSITION 6.1 :
Toute partie A **de** $[0;+\infty]$ **admet une borne supérieure (le plus petit des majorants) :**
- $\mathrm{Sup}(A)$ **est la borne supérieure classique si** $A \subset [0;+\infty[$**.**
- $\mathrm{Sup}(A) = +\infty$ **si** $+\infty \in A$ **et** $\mathrm{Sup}(A) = 0$ **si** $A = \emptyset$**.**

Si A **et** B **sont des parties de** $[0;+\infty]$ **et** $\lambda \in [0;+\infty]$**, on a l'implication** $A \subset B \Longrightarrow \mathrm{Sup}(A) \leqslant \mathrm{Sup}(B)$ **et les deux relations** $\mathrm{Sup}(\lambda A) = \lambda\,\mathrm{Sup}(A)$ **et** $\mathrm{Sup}(A+B) = \mathrm{Sup}(A) + \mathrm{Sup}(B)$**.**

6.2 : Familles de réels positifs

DÉFINITION 6.2 :
Soit I *un ensemble et* $(x_i)_{i\in I}$ *une famille d'éléments de* $[0;+\infty]$ *indexée par* I*, on note* $\mathcal{P}_f(I)$ *l'ensemble des parties finies de* I*. On pose* $A = \left\{ \sum_{i\in J} x_i \mid J \in \mathcal{P}_f(I) \right\} \subset [0;+\infty]$.
On appelle **somme de la famille** $(x_i)_{i\in I}$ *l'élément de* $[0;+\infty]$*, noté* $\sum_{i\in I} x_i$*, tel que* $\sum_{i\in I} x_i = \mathrm{Sup}(A) \in [0;+\infty]$.
Soit I *un ensemble et* $(x_i)_{i\in I}$ *une famille d'éléments de* $[0;+\infty[$ *indexée par* I.
On dit que $(x_i)_{i\in I}$ *est* **sommable** *si* $\sum_{i\in I} x_i < +\infty$.

THÉORÈME 6.2 :
Soit cinq ensembles I**,** J**,** I''**,** $I' \subset I$**,** K **et un recouvrement disjoint** $I = \bigsqcup_{k\in K} I_k$ **de** I**,** $\lambda \in [0;+\infty]$ **et deux familles** $(x_i)_{i\in I}$ **et** $(y_i)_{i\in I}$ **d'éléments de** $[0;+\infty]$**,** σ **une bijection de** I'' **dans** I**, deux familles** $(a_i)_{i\in I}$ **et** $(b_j)_{j\in J}$ **d'éléments de** $[0;+\infty]$ **et une famille** $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ **d'éléments de** $[0;+\infty]$**.**

(i) $\sum_{i\in I'} x_i \leqslant \sum_{i\in I} x_i$ **(restriction).**

(ii) $\sum_{i\in I} (\lambda x_i + y_i) = \lambda \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i$ **(linéarité).**

(iii) **Si** $\forall i \in I,\ x_i \leqslant y_i$**, alors** $\sum_{i\in I} x_i \leqslant \sum_{i\in I} y_i$ **(croissance).**

(iv) $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k\in K} \left(\sum_{j\in I_k} x_j \right)$ **(sommation par paquets).**

(v) $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i''\in I''} x_{\sigma(i'')}$**. En particulier, si** $I'' = I$**,** $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} x_{\sigma(i)}$ **est invariant par permutation des termes, elle ne dépend par de l'ordre de sommation.**

(vi) $\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I} \left(\sum_{j\in J} u_{i,j} \right) = \sum_{j\in J} \left(\sum_{i\in I} u_{i,j} \right)$ **(théorème de** Fubini**).**

(vii) $\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \left(\sum_{i\in I} a_i \right) \times \left(\sum_{j\in J} b_j \right)$ **(familles produits).**

6.3 : Familles complexes

DÉFINITION 6.3 :
Soit I *un ensemble et* $(x_i)_{i\in I}$ *une famille d'éléments de* $\mathbb{K}$ *indexée par* I. *On dit que* $(x_i)_{i\in I}$ *est* **sommable** *si* $\sum\limits_{i\in I}|x_i| < +\infty$. *On note* $\ell^1(\mathbb{K})$ *l'ensemble des familles sommables d'éléments de* $\mathbb{K}$ *indexées par* I.

REMARQUE 6.1 : Si $I = \mathbb{N}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est sommable si et seulement si* $\sum x_n$ *converge absolument.*

PROPOSITION 6.3 :
Soit I **un ensemble,** $(x_i)_{i\in I}$ **une famille d'éléments de** $\mathbb{K}$ **et** $(y_i)_{i\in I}$ **une famille de réels positifs. Si on suppose que** $\forall i\in I,\ |x_i|\leqslant y_i$ **et que** $(y_i)_{i\in I}$ **est sommable, alors** $(x_i)_{i\in I}$ **l'est aussi.**

DÉFINITION 6.4 :
Soit I *un ensemble,* $(x_i)_{i\in i}$ *une famille sommable. On définit la* **somme** S **de cette famille** *par :*
Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ $S = \Big(\sum\limits_{i\in I} x_i^+\Big) - \Big(\sum\limits_{i\in I} x_i^-\Big)$ *si, pour* $i\in I$, *on pose* $x_i^+ = \mathrm{Max}(x_i, 0)$, $x_i^- = \mathrm{Max}(-x_i, 0)$.
Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ $S = \Big(\sum\limits_{i\in I}\mathrm{Re}\,(x_i)\Big) + i\Big(\sum\limits_{i\in I}\mathrm{Im}(x_i)\Big)$.

THÉORÈME 6.4 :
Soit I, I' **et** J **trois ensembles,** $\lambda\in\mathbb{K}$, $(x_i)_{i\in I}$, $(y_i)_{i\in I}$, $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$, $(a_i)_{i\in I}$ **et** $(b_j)_{j\in J}$ **des familles sommables d'éléments de** $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ **ou** $\mathbb{C}$. **Soit aussi** $\sigma : I'\to I$ **une bijection et deux familles** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **et** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **sommables d'éléments de** $\mathbb{K}$. **On a alors les propriétés suivantes :**

(i) **Restriction : si** I' **est une partie de** I, **alors** $(x_i)_{i\in I'}$ **est sommable.**

(ii) **Linéarité : la famille** $(\lambda x_i + y_i)_{i\in I}$ **est sommable et** $\sum\limits_{i\in I}(\lambda x_i + y_i) = \lambda\sum\limits_{i\in I} x_i + \sum\limits_{i\in I} y_i$.

(iii) **Croissance : si** $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ **et si** $\forall i\in I,\ x_i\leqslant y_i$, **alors** $\sum\limits_{i\in I} x_i \leqslant \sum\limits_{i\in I} y_i$.

(iv) **Inégalité triangulaire :** $\Big|\sum\limits_{i\in I} x_i\Big| \leqslant \sum\limits_{i\in I}|x_i|$.

(v) **Sommation par paquets : pour tout recouvrement disjoint** $(I_k)_{k\in K}$ **de** I, **c'est-à-dire que** $I = \bigsqcup\limits_{k\in K} I_k$, **la famille** $\Big(\sum\limits_{j\in I_k} x_j\Big)_{k\in K}$ **est sommable et** $\sum\limits_{i\in I} x_i = \sum\limits_{k\in K}\Big(\sum\limits_{j\in I_k} x_j\Big)$.

(vi) **Changement d'indice :** $(x_{\sigma(i')})_{i'\in I'}$ **est sommable et** $\sum\limits_{i\in I} x_i = \sum\limits_{i'\in I'} x_{\sigma(i')}$.

(vii) **Théorème de Fubini : les familles** $\Big(\sum\limits_{j\in J} u_{i,j}\Big)_{i\in I}$ **et** $\Big(\sum\limits_{j\in J} u_{i,j}\Big)_{i\in I}$ **sont sommables et on a la relation de Fubini** $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum\limits_{i\in I}\Big(\sum\limits_{j\in J} u_{i,j}\Big) = \sum\limits_{j\in J}\Big(\sum\limits_{i\in I} u_{i,j}\Big)$.

(viii) **Familles produit : la famille** $(a_i b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ **est sommable et** $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \Big(\sum\limits_{i\in I} a_i\Big)\Big(\sum\limits_{j\in J} b_j\Big)$.

(ix) **Approximation :** $\forall\varepsilon>0,\ \exists J\in\mathcal{P}_f(I),\ \Big|\sum\limits_{i\in I} x_i - \sum\limits_{j\in J} x_j\Big| \leqslant \varepsilon$.

(x) **Produit de Cauchy : en posant** $p_n = \sum\limits_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant n\\ i+j=n}} u_i v_j = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} u_{n-k}v_k$ **pour tout entier** $n\in\mathbb{N}$. **Alors** $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est aussi sommable et** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = \Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\Big)\times\Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n\Big)$.

REMARQUE 6.2 : • $\ell^1(I,\mathbb{K})$ *est un espace vectoriel et* $S : \ell^1(I,\mathbb{K})\to\mathbb{K}$ *est linéaire si* $S\big((x_i)_{i\in i}\big) = \sum\limits_{i\in I} x_i$.

• *Pour* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *absolument convergente et* σ *est une permutation de* $\mathbb{N}$, *on a* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)}$.