CHAPITRE 7
INTÉGRALES À PARAMÈTRE

THÉORÈME ÉNORME 7.1 :
Continuité "sous le signe somme" : soit $f : I \times J \to \mathbb{K}$, on suppose que :

- (H_1) **pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I,**
- (H_2) **pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J,**
- (H_3) **$\exists \varphi : J \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux, intégrable sur J avec $\forall (x,t) \in I \times J,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$.**

Alors la fonction $g : I \to \mathbb{K}$ telle que $g(x) = \int_J f(x,t)dt$ est continue sur I.

THÉORÈME ÉNORME 7.2 :
Continuité "sous le signe somme" : soit $f : I \times J \to \mathbb{K}$, on suppose que :

- (H_1) **pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I,**
- (H_2) **pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J,**
- (H_3) **pour tout segment $[a;b] \subset I$, il existe une fonction $\varphi_{a,b} : J \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur J telle que $\forall (x,t) \in [a;b] \times J,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi_{a,b}(t)$.**

Alors la fonction $g : I \to \mathbb{K}$ telle que $g(x) = \int_J f(x,t)dt$ est continue sur I.

THÉORÈME ÉNORME 7.3 :
Soit $f : I \times J \to \mathbb{K}$ et a une borne de I ($a = \pm\infty$ est possible) telles que :

- (H_1) **il existe $h : J \to \mathbb{K}$ telle que pour tout $t \in J$, $\lim\limits_{x \to a} f(x,t) = h(t)$,**
- (H_2) **pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ et h sont continues par morceaux sur J,**
- (H_3) **$\exists \varphi : J \to \mathbb{R}^+$ cont. par morceaux, intégrable sur J et $\forall (x,t) \in I \times J,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$.**

Alors h est intégrable sur J et la fonction $g : I \to \mathbb{K}$ définie par $g(x) = \int_J f(x,t)dt$ admet une limite en a qui est donnée par la relation $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \int_J h$ (TCD à paramètre continu).

THÉORÈME ÉNORME 7.4 :
Dérivation "sous le signe somme" : soit I et J des intervalles et $f : I \times J \to \mathbb{K}$ telle que :

- (H_1) **pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur I,**
- (H_2) **$\forall x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sont continues par morc. sur J et $t \mapsto f(x,t)$ y est intégrable,**
- (H_3) **$\exists \varphi : J \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux, intégrable sur J et $\forall (x,t) \in I \times J,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$.**

Alors $g : I \to \mathbb{K}$ définie par $g(x) = \int_J f(x,t)dt$ est C^1 sur I et $\forall x \in I,\ g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ (LEIBNIZ).

THÉORÈME ÉNORME 7.5 :
Dérivation "sous le signe somme" : soit $f : I \times J \to \mathbb{K}$, on suppose que :

(H_1) $\forall t \in J$, **la fonction** $x \mapsto f(x,t)$ **est de classe** C^1 **sur** I,

(H_2) $\forall x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ **sont continues par morc. sur** J **et** $t \mapsto f(x,t)$ **y est intégrable,**

(H_3) **pour tout segment** $[a;b] \subset I$, **il existe une fonction** $\varphi_{a,b} : J \to \mathbb{R}^+$ **continue par morceaux et intégrable sur** J **telle que** $\forall (x,t) \in [a;b] \times J$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi_{a,b}(t)$.

Alors $g : I \to \mathbb{K}$ **définie par** $g(x) = \displaystyle\int_J f(x,t)dt$ **est** C^1 **sur** I **et** $\forall x \in I$, $g'(x) = \displaystyle\int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ **(LEIBNIZ).**

PROPOSITION 7.6 :
Soit $f : I \times J \to \mathbb{K}$ **et** $n \in \mathbb{N}^*$ **tels que :**

- $\forall t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ **est de classe** C^n **sur** I.
- $\forall k \in [\![0; n-1]\!]$, $\forall x \in I$, $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ **est continue par morceaux et intégrable sur** J.
- $\forall [a;b] \subset I$, **il existe une fonction** $\exists \varphi_{a,b,n} : J \to \mathbb{R}^+$ **continue par morceaux et intégrable sur** J **telle que** $\forall (x,t) \in [a;b] \times J$, $\left|\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant \varphi_{a,b,n}(t)$.

Alors $g : I \to \mathbb{K}$ **telle que** $g(x) = \displaystyle\int_J f(x,t)dt$ **est** C^n **sur** I **et** $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $\forall x \in I$, $g^{(k)}(x) = \displaystyle\int_J \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)dt$.

PROPOSITION 7.7 :
Soit $f : I \times J \to \mathbb{K}$, **on suppose que :**

(H_1) $\forall t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ **est de classe** C^∞ **sur** I,

(H_2) $\forall x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ **est continue par morceaux et intégrable sur** J,

(H_3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in I$, $t \mapsto \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$ **est continue par morceaux sur** J,

(H_4) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall [a;b] \subset I$, **il existe une fonction** $\exists \varphi_{a,b,n} : J \to \mathbb{R}^+$ **continue par morceaux et intégrable sur** J **telle que** $\forall (x,t) \in [a;b] \times J$, $\left|\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant \varphi_{a,b,n}(t)$.

Alors $g : I \to \mathbb{K}$ **telle que** $g(x) = \displaystyle\int_J f(x,t)dt$ **est** C^∞ **sur** I **et** $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in I$, $g^{(n)}(x) = \displaystyle\int_J \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)dt$.

EXEMPLE FONDAMENTAL 7.1 : Soit Γ définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$:

- Γ (fonction "Gamma" d'EULER) est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, et de classe C^∞ sur son ensemble de définition.
- $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Comme $\Gamma(1) = 1$, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.
- $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ donc par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma\left(n + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$.

EN PRATIQUE : Pour étudier une fonction définie par $g(x) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)dt$ *:*

- *On identifie l'intervalle* J *(on inclut ou pas les bornes* a *ou* b*).*
- *On vérifie que* $t \mapsto f(x,t)$ *est bien continue par morceaux et on détermine l'ensemble de définition de* g *qu'on décompose en intervalles* I*.*
- *On traite si possible élémentairement la parité, monotonie, limite aux bornes....*
- *On montre l'aspect* C^0 *de* g *avec le théorème ad hoc éventuellement sur tout segment .*
- *On montre l'aspect* C^1 *de* g *avec le théorème ad hoc éventuellement sur tout segment.*
- *Pour obtenir une nouvelle expression de* $g(x)$ *(sans intégrale), on peut utiliser la formule de* LEIBNIZ *pour établir une équation différentielle vérifiée par* g *qu'on intègre.*