CHAPITRE 8
ALGÈBRE BILINÉAIRE

PARTIE 8.1 : ESPACES PRÉHILBERTIENS

DÉFINITION 8.1 :
Soit E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel et* $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$*, on dit que* φ *est un* **produit scalaire** *sur* E *si* φ *est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur* E*, c'est-à-dire si :*

- $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (u, v, w) \in E^3,\ \begin{cases} \varphi(\alpha u + \beta v, w) = & \alpha\varphi(u, w) + \beta\varphi(v, w) \\ \varphi(u, \alpha v + \beta w) = & \alpha\varphi(u, v) + \beta\varphi(u, w) \end{cases}$ *(bilinéarité).*
- $\forall (u, v) \in E^2,\ \varphi(u, v) = \varphi(v, u)$ *(symétrie).*
- $\forall u \in E, \varphi(u, u) = q(u) \geqslant 0$ *(positivité).*
- $\forall u \in E, \varphi(u, u) = q(u) \geqslant 0$ et $\varphi(u, u) = q(u) = 0 \Longrightarrow u = 0_E$ *(aspect défini).*

Un **espace préhilbertien réel** *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.*

REMARQUE 8.1 : On note souvent $(u|v) = \varphi(u, v)$*, ou* $u.v$ *(en géométrie) ou* $\langle u, v\rangle$ *le produit scalaire.*

THÉORÈME 8.1 :
Soit E **un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire noté** $(.|.)$**. Alors l'application** $x \in E \mapsto ||x|| = \sqrt{(x|x)}$ **est une norme sur** E **appelée norme euclidienne associée à** $(.|.)$ **:**

(i) $\forall x \in E,\ ||x|| \geqslant 0$ **(positivité),**

(ii) $\forall x \in E,\ ||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0_E$ **(séparation),**

(iii) $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E,\ ||\lambda x|| = |\lambda|\,||x||$ **(homogénéité),**

(iv) $\forall (x, y) \in E^2,\ ||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$ **(inégalité triangulaire ou de** Minkowski**).**

De plus : $||x + y|| = ||x|| + ||y|| \Longleftrightarrow \big(\exists \lambda \in \mathbb{R}^+,\ x = \lambda y$ **ou** $y = \lambda x\big)$ **(**x **et** y **sont positivement liés).**

THÉORÈME 8.2 :
Soit E **un espace préhilbertien réel et** $(u, v) \in E^2$ **:**

- $|(u|v)| \leqslant ||u|| \times ||v||$ **(**Cauchy-Schwarz**) et** $|(u|v)| = ||u|| \times ||v|| \Longleftrightarrow (u, v)$ **est liée.**
- $(u|v) = \dfrac{1}{2}\big(||u + v||^2 - ||u||^2 - ||v||^2\big) = \dfrac{1}{2}\big(||u||^2 + ||v||^2 - ||u - v||^2\big)$ **(identités de polarisation).**
- $(u|v) = \dfrac{1}{4}\big(||u + v||^2 - ||u - v||^2\big)$ **(identité de polarisation).**
- $||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2\big(||u||^2 + ||v||^2\big)$ **(identité du parallélogramme).**

REMARQUE 8.2 : L'inégalité de Cauchy-Schwarz *nous permet de définir l'angle non orienté* $\theta \in [0; \pi]$ *entre deux vecteurs non nuls* u *et* v *de* E *par :* $\theta = \text{Arccos}\left(\dfrac{(u|v)}{||u||\,||v||}\right)$.

DÉFINITION 8.2 :
Soit $\big(E,(.|.)\big)$ *un espace préhilbertien réel et* $(u,v)\in E^2$*, on dit que :*

- u *est* **unitaire** *(ou normé) si* $||u||=1$.
- u *et* v *sont* **orthogonaux** *si* $(u|v)=0$ *; on le note* $u\perp v$.

REMARQUE 8.3 : Si $x\neq 0_E$ *alors le vecteur* $\dfrac{x}{||x||}$ *est toujours unitaire.*

DÉFINITION 8.3 :
Soit $\big(E,(.|.)\big)$ *un espace préhilbertien réel et* $(x_i)_{i\in I}$ *une famille de vecteurs de* E*, on dit que* $(x_i)_{i\in I}$ *est :*

- **orthogonale** *si* $\forall (i,j)\in I^2,\ i\neq j\Longrightarrow (x_i|x_j)=0$.
- **orthonormale** *(ou* **orthonormée***) si* $\forall (i,j)\in I^2,\ (x_i|x_j)=\delta_{i,j}$.

PROPOSITION 8.3 :
Soit E **un espace préhilbertien réel.**

- **Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.**
- **Si** $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ **est une famille orthogonale :** $\left|\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right|\right|^2=\sum_{k=1}^{n}||x_k||^2$ **(Pythagore).**

REMARQUE 8.4 : • *Pour* $(x,y)\in E^2, ||x+y||^2=||x||^2+||y||^2\Longleftrightarrow x\perp y$. *Par contre :*
• *Si* $n>2$ *et si* $(x_1,\cdots,x_n)$ *vérifie la relation de* Pythagore*, elle n'est pas forcément orthogonale.*

DÉFINITION 8.4 :
Soit $\big(E,(.|.)\big)$ *un espace préhilbertien réel,* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E*. On dit que* F *et* G *sont des* **sous-espaces orthogonaux** *si* $\forall (x,y)\in F\times G,(x|y)=0$ *; on le note* $F\perp G$.

PROPOSITION 8.4 :
Soit E **un espace préhilbertien réel et** $F_1,\cdots,F_n$ **des sous-espaces vectoriels de** E **supposés deux à deux orthogonaux. Alors la somme des** F_k **est directe :** $\sum_{k=1}^{n}F_k=\bigoplus_{k=1}^{n}F_k$.

DÉFINITION 8.5 :
Soit $\big(E,(.|.)\big)$ *un espace préhilbertien réel et* F *un sous-espace vectoriel de* E *(et même si* F *n'est qu'une partie* E*). On définit* **l'orthogonal** *de* F*, noté* $F^\perp$ *par :* $F^\perp=\big\{x\in E\mid \forall y\in F,\ (x|y)=0\big\}$.

REMARQUE 8.5 : Avec cette définition, on a toujours $\{0_E\}^\perp=E$ *et* $E^\perp=\{0_E\}$.

PROPOSITION 8.5 :
Soit $\big(E,(.|.)\big)$ **un espace préhilbertien réel,** F **et** G **deux sous-espaces vectoriels de** E **:**

- $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E
- $F\subset G\Longrightarrow G^\perp\subset F^\perp$
- $F\perp G\Longleftrightarrow F\subset G^\perp\Longleftrightarrow G\subset F^\perp$
- $F\cap F^\perp=\{0_E\}$ et $F\subset\big(F^\perp\big)^\perp$
- $F^\perp+G^\perp\subset(F\cap G)^\perp$
- $(F+G)^\perp=F^\perp\cap G^\perp$

REMARQUE 8.6 : On peut avoir $\big(F^\perp\big)^\perp\neq F$ *et/ou* $F^\perp+G^\perp\neq(F\cap G)^\perp$.

PARTIE 8.2 : ESPACES EUCLIDIENS

DÉFINITION 8.6 :

- *Un* **espace euclidien** E *est un espace préhilbertien réel de dimension finie.*
- *Dans un tel espace* E*, une famille* $\mathcal{B}$ *de vecteurs de* E *est dite une* **base orthonormale** *(ou* **orthonormée***) de* E *si* $\mathcal{B}$ *est base de* E *et une famille orthonormale de* E*.*

THÉORÈME ÉNORME 8.6 :
Soit E un espace préhilbertien réel et $\mathcal{B} = (x_1, \cdots, x_n)$ une famille libre de E, alors il existe une famille $(e_1, \cdots, e_n)$ de vecteurs de E qui vérifie les conditions suivantes :

- $\forall p \in [\![1; n]\!]$, $Vect(x_1, \cdots, x_p) = Vect(e_1, \cdots, e_p)$**.**
- $\mathcal{B}' = (e_1, \cdots, e_n)$ **est une famille orthonormale de E.**
- $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $(x_k|e_k) > 0$ **(ceci amène aussi l'unicité).**

C'est le procédé d'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT**.**

REMARQUE 8.7 : On orthonormalise directement $(x_1, \cdots, x_n)$ en $(f_1, \cdots, f_n)$ avec les formules :

- $e_1 = \dfrac{x_1}{||x_1||}$ *(et on a bien $(e_1|x_1) = ||x_1|| > 0$).*
- $\forall p \in [\![2; n]\!]$, $e_p = \dfrac{g_p}{||g_p||}$ *en notant* $g_p = x_p - \sum_{k=1}^{p-1} (e_k|x_p)e_k$ *(avec $(e_p|x_p) = ||g_p|| > 0$ car $g_p \neq 0_E$).*

PROPOSITION 8.7 :
Soit E un espace euclidien.

- **E possède au moins une base orthonormale.**
- **Toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale.**

REMARQUE 8.8 : Si $E = \overset{\perp}{\bigoplus_{1 \leqslant k \leqslant p}} F_k$ *et si $\mathcal{B}_k$ est une base orthonormale de F_k (pour tout indice $k \in [\![1; p]\!]$) alors $(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p)$ est une base orthonormale de E dite adaptée à cette décomposition.*

THÉORÈME 8.8 :
Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E, $(x, y) \in E^2$ qui se décomposent $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$ dans la base $\mathcal{B}$:

- $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $x_k = (e_k|x)$**,** $(x = \sum_{k=1}^{n} (e_k|x)e_k$ **: coordonnées en fonction des produits scalaires).**
- $(x|y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ **(produit scalaire en fonction des coordonnées).**
- $||x|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$ **(norme en fonction des coordonnées).**

PROPOSITION 8.9 :
Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de E, on associe à des vecteurs x et y de E les vecteurs colonnes X et Y de leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.
Alors on a $(x|y) = {}^tXY = X^TY$ (en identifiant réel et matrice de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$).

REMARQUE FONDAMENTALE 8.9 : Soit E *euclidien,* $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ *une base orthonormée de* E *:*

- *Si* $f \in \mathcal{L}(E)$ *et* $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$*, alors on a* $A = \Big((e_i|f(e_j))\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
- *Si* $\mathcal{B}'$ *est une autre base orthonormée et* P *la matrice de passage de* $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}'$ *:* ${}^tP = P^{-1}$.

THÉORÈME 8.10 :
Soit E **un espace préhilbertien réel (pas forcément de dimension finie) et** F **un sous-espace vectoriel de** E **de dimension finie. Alors** $F^\perp$ **et** F **sont supplémentaires dans** E**. Et** $(F^\perp)^\perp = F$**.**
En particulier, si E **est de dimension finie alors** $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$**.**

DÉFINITION 8.7 :
Soit E *un espace préhilbertien réel et* F *un sous-espace vectoriel de* E *de dimension finie, alors le sous-espace* $F^\perp$ *est appelé* **le supplémentaire orthogonal** *de* F*.*
La **projection orthogonale** *sur* F *est la projection* p_F *sur* F *parallèlement à* $F^\perp$*.*

PROPOSITION 8.11 :
Soit E **un espace euclidien,** F **et** G **deux sous-espaces vectoriels de** E**.**
Nous avons maintenant les égalités : $\left(F^\perp\right)^\perp = F$ **et** $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$**.**

PROPOSITION 8.12 :
Soit $\big(E, (.|.)\big)$ **un espace préhilbertien réel,** F **un sous-espace de** E **de dimension finie,** $(e_1, \cdots, e_n)$ **une base orthonormale de** F**. Pour** $x \in E$**, le projeté orthogonal de** x **sur** F **est** $p_F(x) = \sum_{k=1}^{n} (e_k|x)e_k$**.**

REMARQUE 8.10 : Si $a \neq 0_E$*,* $D = Vect(a)$*,* $H = D^\perp$ *:* $p_D(x) = \dfrac{(a|x)}{||a||^2}a$*,* $p_H(x) = x - p_D(x) = x - \dfrac{(a|x)}{||a||^2}a$.

DÉFINITION 8.8 :
Soit E *un espace préhilbertien réel,* F *un sous-espace de* E*, la* **distance de** $x \in E$ **à** F *est* $d(x, F) = \inf_{y \in F} ||x - y||$.

THÉORÈME ÉNORME 8.13 :
Soit E **un espace préhilbertien réel,** F **un sous-espace de** E **de dimension finie et** $x \in E$**. Alors la distance** $d(x, F) = ||x - p_F(x)|| = \sqrt{||x||^2 - ||p_F(x)||^2} = \min_{y \in F} ||x - y||$ **est atteinte seulement en** $y = p_F(x)$**.**

REMARQUE HP 8.11 : Soit $\big(E, (.|.)\big)$ *un espace préhilbertien réel,* $(e_1, \cdots, e_p)$ *une famille orthonormée de vecteurs de* E*,* $F = Vect(e_1, \cdots, e_p)$*, alors* $\forall x \in E$*,* $\sum_{k=1}^{p} (e_k|x)^2 = ||p_F(x)||^2 \leqslant ||x||^2$ *(inégalité de* BESSEL*).*

THÉORÈME ÉNORME 8.14 :
Soit $\big(E, (.|.)\big)$ **un espace euclidien et** φ **une forme linéaire (element de** E^***) alors il existe un unique vecteur** a **de** E **tel que** $\forall x \in E$*,* $\varphi(x) = (a|x)$ **(théorème de représentation).**

PROPOSITION 8.15 :
Soit E **un espace euclidien,** $H = Vect(a)^\perp$ **un hyperplan de** E **(donc** $a \neq 0_E$**), la droite associée** $D = H^\perp = Vect(a)$ **et** $x \in E$ **:** $d(x, H) = \dfrac{|(x|a)|}{||a||}$ **et** $d(x, D)^2 = \left|\left|x - \dfrac{(a|x)}{||a||^2}a\right|\right|^2 = ||x||^2 - \dfrac{(x|a)^2}{||a||^2}$**.**