PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 08

PSI 1 2026-2027 **du lundi 16/11 au vendredi 20/11**

1 **Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice** : voir programme précédent

2 **Polynôme caractéristique** :

- définition du polynôme caractéristique ($\chi_u = \det(X\mathrm{id}_E - u)$) d'une matrice ou d'un endomorphisme ;
- expression développée de $\chi_u = X^n - \mathrm{Tr}\,(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u)$;
- les valeurs propres d'un endomorphisme u sont exactement les racines de χ_u ;
- multiplicité algébrique (ordre de multiplicité de la racine dans χ_u) d'une valeur propre ;
- si χ_u est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ relation entre $\dim(E)$, $\mathrm{Tr}\,(u)$, $\det(u)$ et les valeurs propres ;
- polynôme caractéristique de matrices semblables ou de la transposée d'une matrice ;
- si F stable par u alors χ_{u_F} divise χ_u ;
- multiplicité géométrique (dimension du sous-espace propre associé) d'une valeur propre ;
- la multiplicité géométrique est inférieure à la multiplicité algébrique (et $\geqslant 1$) pour une valeur propre ;
- application du polynôme caractéristique pour calculer le déterminant des matrices ;
- théorème de Cayley-Hamilton (preuve non exigible) ;

3 **Diagonalisation en dimension finie** :

- définition d'un endomorphisme diagonalisable, propriétés équivalentes ;
- projecteurs (spectraux) associés à la décomposition de l'espace avec les sous-espaces propres ;
- équivalence entre u diagonalisable et χ_u scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ \dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda(u)$;
- cas particulier pratique où il y a $\dim(E)$ racines distinctes de χ_u;
- matrices A diagonalisables et relations avec un endomorphisme de matrice A ;
- polynômes en u et relations avec les valeurs propres de u ; racines des polynômes annulateurs ;
- u diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme annulateur simplement scindé de u ;
- si u diagonalisable, caractérisation de son polynôme minimal (hors programme) ;
- si F stable par u et u diagonalisable alors u_F l'est aussi ;
- trigonalisation : définition et caractérisation par χ_u scindé ;

4 **Codiagonalisation (hors programme mais bon...)** :

- si u diagonalisable, $v \circ u = u \circ v \iff \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ E_\lambda(u)$ stable par v ;
- si u et v diagonalisables et commutent, ils codiagonalisent ;

QUESTIONS DE COURS :

1 définir la diagonalisabilité d'un endomorphisme (déf. 4.6)
2 énoncer le théorème sur $\mathrm{Tr}\,(u)$ et $\det(u)$ en fonction des valeurs propres si χ_u est scindé (th. 4.13)
3 énoncer les inégalités concernant les différents ordre de multiplicité d'une valeur propre (th. 4.14)
4 énoncer quelques propriétés équivalentes au fait que u est diagonalisable (th. 4.17)
5 énoncer des propriétés des projecteurs spectraux si u diagonalisable (prop. 4.18)
6 énoncer la CNS de diagonalisabilité de u par les ordres de multiplicité (th. 4.19)
7 énoncer la CNS de diagonalisabilité par l'existence d'un polynôme annulateur SARS (th. 4.22)
8 énoncer la CNS de diagonalisabilité par le fait que $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ annule u (th. 4.23)
9 énoncer la CNS de trigonalisabilité d'un endomorphisme (th. 4.26)
10 prouver que si A et B sont semblables, alors $\chi_A = \chi_B$ (prop. 4.10)
11 prouver que les valeurs propres sont racines de tout polynôme annulateur de u (prop. 4.21)
12 prouver que si u diagonalisable et F stable par u, alors u_F est diagonalisable (prop. 4.24)

Prévision pour la prochaine semaine : réduction