# ÉNONCÉS EXERCICES CORRIGÉS 4
# RÉDUCTION

## 4.1 Éléments propres

**4.1** Soit $u$ un automorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ . Établir : $Sp(u^{-1}) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in Sp(u)\}$.

**4.2** *Centrale PSI 2012* Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A_a = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5+2a & 3+a & 18+3a \\ 3-2a & 5-a & -18-3a \\ 9+2a & 3+a & 14+3a \end{pmatrix}$. Déterminer en fonction de $a$ les sous-espaces $F$ de $\mathbb{R}^3$ qui sont stables par l'application linéaire $u_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à $A_a$.

**4.3** *Centrale PSI 2012* Montrer que, pour tout triplet $(A, B, C) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^3$, il existe $(a, b, c) \neq (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $aA + bB + cC$ admette une valeur propre double (commencer par le cas où $(A, B, C)$ est liée).

**4.4** *Centrale PSI 2012* Soit $E$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, pour $f \in E$ on définit la fonction $g$ par $g(0) = f(0)$ et $\forall x > 0,\ g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$. On pose alors $u(f) = g$.

**a.** Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$ et déterminer ses vecteurs propres et valeurs propres.
**b.** La restriction de $u$ au sous-espace des fonctions polynomiales de degré au plus $n$ est-elle diagonalisable ?

**4.5** Soit $E$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ ayant une limite finie en $+\infty$.
Soit $T$ l'endomorphisme de $E$ donné par $\forall x \in [0; +\infty[,\ T(f)(x) = f(x+1)$.
Déterminer les valeurs propres de $T$ et les vecteurs propres associés.

**4.6** *Mines MP 2007* Soit $E = \{ f \in C^1([0; +\infty[, \mathbb{R}) \mid f(0) = 0 \}$ ; pour un élément $f$ de $E$ on pose $T(f)$ la fonction définie par $T(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{t}dt$. Montrer que $T$ est un endomorphisme de $E$ et trouver ses valeurs propres.

**4.7** *Centrale PSI 2012* Soit l'espace $E = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les réels $p \in ]-1; 1[$ et $q = 1 - p$ et, pour $f \in E$, $u(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $u(f)(x) = f(px + q)$.
**a.** Montrer que $u$ est un automorphisme de $E$ et que ses valeurs propres sont dans $]-1; 1]$.
**b.** Soit $f$ un vecteur propre de $u$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(k)} = 0$.
**c.** Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés de $u$.

**4.8** *Centrale PSI 2012* Soit $a_1, \cdots, a_p$ des réels, déterminer le polynôme caractéristique de la matrice $A \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{R})$ dont le coefficient en position $(i, j)$ est $a_{i,j} = \alpha_{Min(i,j)}$ si $i + j = 2p + 1$ et $0$ sinon.

**4.9** Soit $(a_1, \cdots, a_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$ distincts 2 à 2. On pose $P(x) = \det(A + xI_n)$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_n \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$.

**a.** Calculer $P(a_k)$ et justifier que $P$ est un polynôme unitaire de degré $n$.
**b.** Former la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{P(X)}{\prod_{k=1}^{n}(X - a_k)}$.
**c.** En déduire le déterminant de $A + I_n$. Que vaut celui de $A$ ?

**4.10** Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$ ; c'est-à-dire trouver une matrice $P$ inversible dans $GL_3(\mathbb{R})$ et une matrice $D$ diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

**4.11** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ et $H$ un hyperplan de $E$.

**a.** Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel $\{u \in E^* \mid u(H) = \{0\}\}$ ?

**b.** Montrer que si $H$ a pour équation $u(x) = 0$ ($u \in E^*$) : $\big(H \text{ stable par } f\big) \iff \big(u \circ f \text{ et } u \text{ colinéaires}\big)$.

**c.** Soit $A$ et $L$ les matrices dans $\mathcal{B}$ de $f$ et $u$. Montrer : $\big(H \text{ stable par } f\big) \iff \big({}^tL \text{ vecteur propre de } {}^tA\big)$.

**d.** Déterminer les plans stables par $u$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

**4.12** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ; pour $A \in E$, on introduit $u : E \to E$ défini par : $u(M) = AM$. Montrer que $A$ et $u$ ont les mêmes valeurs propres et préciser les sous-espaces propres de $u$ en fonction de ceux de $A$.

**4.13** *CCP PSI 2007 d'après RMS* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geqslant 3$.

On suppose que : $\operatorname{rang} A = 2$, $\operatorname{Tr} A = 0$ et $A^n \neq 0$. Montrer que $A$ est diagonalisable.

**4.14** *Centrale PSI 2012* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. On pose $A = \begin{pmatrix} B & B^2 \\ B^2 & -B \end{pmatrix}$.

**a.** $A$ est-elle nécessairement diagonalisable ?

**b.** On suppose ici $B$ diagonale, donner une CNS pour que $A$ soit diagonalisable (commencer par $n = 1$).

**c.** On revient au cas général, donner une CNS sur le spectre de $B$ pour que $A$ soit diagonalisable.

**4.15** *Matrices circulantes* Soit pour $n \geqslant 2$ la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

**a.** Montrer que la matrice $J$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**b.** Application : calculer $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$.

**4.16** *Compléments OdlT 2016/2017 Mines-Télécom PSI planche 566I*

Montrer que les valeurs propres possibles de $A$ réelle, carrée de taille $n$, vérifiant $A^3 = A^2 + 4A - 4I_n$ sont $-2$, $1$ et $2$. En déduire que $A$ est inversible et donner $A^{-1}$ en fonction de $A$.

## 4.2 Diagonalisation

**4.17** *Centrale PSI 2012* Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel dimension 3, $\mathcal{B}$ une base de $E$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A$ la matrice de $u$ dans la base $\mathcal{B}$ notée $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. On suppose que les 9 coefficients de $A$ sont des entiers relatifs (soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$). On suppose enfin qu'il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $u^p = \mathrm{id}_E$.

**a.** Montrer que $u \in GL(E)$. À quelle condition nécessaire et suffisante $u$ est-il diagonalisable ?
Comment appelle-t-on ces endomorphismes $u$ diagonalisables ?
On suppose dans toute la suite que $u$ n'est pas diagonalisable.

**c.** Montrer qu'il existe $a \in [\![-2; 2]\!]$ et $b \in \{-1, 1\}$ tels que $\chi_u(X) = (\varepsilon - X)(X^2 + aX + b)$ avec $\varepsilon = \pm 1$.

**d.** En déduire les valeurs possibles de $\chi_u(X)$ et justifier que $u^{12} = \mathrm{id}_E$.

**4.18** *Centrale PSI 2012* Soit $n \geqslant 2$ et $J_n$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenant des 1 dans toutes ses cases.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ; pour $i \in [\![1;n]\!]$, on note $l_i(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$ la somme des coefficients de la ligne $i$ et, pour $j \in [\![1;n]\!]$, $c_j(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$ la somme des coefficients sur la colonne $j$.

On note $X_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices magiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ : ce sont les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ l_i(A) = c_j(A)$ ; on note alors $s_n(A)$ la valeur commune de toutes ces sommes.

**a.** Donner un élément non élémentaire de $X_3(\mathbb{R})$ (autre que $I_3$, $J_3$, etc...).

**b.** Montrer que $X_n(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A\,J_n = J_n\,A\right\}$.

**c.** En déduire que $X_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par multiplication. Montrer que $s_n : X_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que : $\forall (A,B) \in X_n(\mathbb{R})^2,\ s_n(AB) = s_n(A)s_n(B)$.

**d.** Diagonaliser $J_n$ et en déduire $\dim\left(X_n(\mathbb{R})\right)$. Trouver $\dim\left(X_n^0(\mathbb{R})\right)$ où $X_n^0(\mathbb{R})$ est le sous-espace vectoriel de $X_n(\mathbb{R})$ formé des matrices magiques $A$ telles que $s_n(A) = 0$.

**4.19** *Centrale PSI 2012* Soit $m \in \mathbb{R}$ et la matrice $A_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -m & -m+1 & m \\ -m-1 & -m & m+1 \end{pmatrix}$.

**a.** Déterminer l'unique valeur $m_0$ telle que $A_{m_0}$ soit diagonalisable.

**b.** Caractériser géométriquement l'endomorphisme $u_0$ de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A_{m_0}$.

**4.20** *Centrale PSI 2012* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant 3$ et $A_n$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui contient des 1 dans la première ligne et la première colonne et des 0 partout ailleurs. Par exemple $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**a.** Montrer que $(A_n, A_n^2, A_n^3)$ est une famille liée. Justifier que $A_n$ est diagonalisable.

**b.** Déterminer les valeurs propres de $A_n$ et son polynôme caractéristique $\chi_{A_n}$. Calculer $\det(I_n + A_n)$.

**c.** On prend dans cette question $n = 7$. Pour $p \geqslant 1$, trouver $(a_p, b_p) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A_7^p = a_p A_7^2 + b_p A_7$.

**4.21** *Centrale PSI 2012* Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a^2 \neq b^2$, on pose $M = \begin{pmatrix} a & b & a & \cdots & a & b \\ b & a & b & \cdots & b & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & b & a & \cdots & a & b \\ b & a & b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

**a.** Que vaut $\operatorname{rang}(M)$ ? Diagonaliser $M$.

**b.** Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_M$. Pour un complexe $c$, en déduire $\det(A)$ où la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2n} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ vérifie : $\forall k \in [\![1;2n]\!],\ a_{k,k} = c$, $\forall (i,j) \in [\![1;2n]\!]^2,\ a_{i,j} = b$ si $i+j$ est impair et $\forall (i,j) \in [\![1;2n]\!]^2,\ a_{i,j} = a$ si $i+j$ est pair et $i \neq j$.

**4.22** *Centrale PSI 2012* Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$, une famille libre $(B_1, \cdots, B_p)$ de matrices de $\mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ et des scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ qui vérifient : $\forall n \in [\![0;p]\!],\ A^n = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^n B_k$.

**a.** Montrer que si les complexes $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont distincts 2 à 2 on a $p \leqslant q$.

**b.** Montrer que si les complexes $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont distincts 2 à 2 $A$ est diagonalisable.

**c.** Expliquer pourquoi $A$ est diagonalisable même si $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ ne sont pas supposés distincts 2 à 2.

**d.** Établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^n B_k$.

**e.** Réciproquement, si $A$ est diagonalisable, justifier que $A$ satisfait aux hypothèses de cet exercice.

**4.23** Déterminer les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**4.24** Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f$ un endomorphisme de $E$ ayant $n$ valeurs propres distinctes deux à deux. Soit $g$ un autre endomorphisme de $E$ tel que $f \circ g = g \circ f$.

**a.** Montrer qu'un vecteur propre de $f$ est aussi un vecteur propre de $g$.

**b.** En déduire qu'il existe un unique $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $g = P(f)$.

**c.** Que peut-on en déduire à propos de $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\}$ ?

**4.25** Soit $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}$ une base de $E$, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\exists p \geqslant 1,\ u^p = \mathrm{id}_E$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$.

**a.** Montrer que $u \in GL(E)$. À quelle condition nécessaire et suffisante $u$ est-il diagonalisable ?
Comment appelle-t-on ces endomorphismes $u$ diagonalisables ?
On suppose dans toute la suite que $u$ n'est pas diagonalisable.

**b.** Montrer qu'il existe deux entiers $a \in [\![-2;2]\!]$ et $b \in \{-1,1\}$ tels que $\chi_u(X) = (\varepsilon - X)(X^2 + aX + b)$ avec $\varepsilon = \pm 1$. En déduire les valeurs possibles de $\chi_u(X)$ et justifier que $u^{12} = \mathrm{id}_E$.

**4.26** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [\![0;n]\!]$ et une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang $r$.

**a.** Montrer que $M$ est semblable à une matrice du type $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$.

**b.** En déduire qu'il existe un polynôme $P$ de degré inférieur ou égal à $r+1$ tel que $P(M) = 0$.

**c.** Montrer par un exemple où vous choisirez $n$, $r$ et $M$ qu'il n'existe pas toujours de polynôme $Q$ de degré inférieur ou égal à $r$ qui vérifie $Q(M) = 0$.

**d.** On suppose que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires, établir que $M$ est alors semblable à une matrice du type $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$. Quel est le polynôme minimal de $M$ en fonction de celui de $A$ ?

**e.** Si $M$ est diagonalisable, à quelle condition nécessaire et suffisante $M$ admet-elle un polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à $r$ ?

**4.27** *Centrale PSI 2012*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit $u : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $u(M) = \alpha M + \mathrm{Tr}\,(M)\,A$.

**a.** Montrer que $u$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**b.** $u$ est-elle diagonalisable ? Si $\mathrm{Tr}\,(A) = 0$, déterminer $\mathrm{Tr}\,(u)$.

**4.28** *Centrale PSI 2012* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A^5) = A$.

Est-ce toujours vrai si on suppose $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable ?

**4.29** *Centrale PSI 2012* On considère la matrice $A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la colonne $j$ est composée de nombres tous égaux à $j$, sauf le coefficient sur la diagonale valant $0$.

**a.** Montrer que $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de $A$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda + k} = 1$.

**b.** En déduire que la matrice $A$ est diagonalisable et déterminer un équivalent de la plus grande valeur propre $\lambda_n$ de $A$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**4.30** *Centrale PSI 2012* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & -A \\ 2A & 4A \end{pmatrix}$.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $A$ pour que $B$ soit diagonalisable.

**4.31** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 2A & -2A \\ A & 5A \end{pmatrix}$.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $A$ pour que $B$ soit diagonalisable.

**4.32** *Centrale PSI 2012* Soit $n \geqslant 2$ et $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On définit la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la façon suivante :

$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$. $M$ est-elle diagonalisable ? Dans ce cas, la diagonaliser.

**4.33** *Centrale PSI 2012* Soit $E$ de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. On note $\varphi$ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall g \in \mathcal{L}(E),\ \varphi(g) = \frac{1}{2}\Big(g \circ p + p \circ g\Big)$. On considère également les ensembles suivants : $A = \big\{g \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Ker}(p) \text{ et } \mathrm{Im}\,(p) \subset \mathrm{Ker}(g)\big\}$, $B = \big\{g \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Im}\,(p) \text{ et } \mathrm{Im}\,(p) \subset \mathrm{Ker}(g)\big\}$, $C = \big\{g \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Ker}(p) \text{ et } \mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(g)\big\}$, $D = \big\{g \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Im}\,(p) \text{ et } \mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(g)\big\}$.
**a.** Montrer que $B$ et $C$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$.
On montre de la même façon que $A$ et $D$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$.
**b.** Déterminer les dimensions de ces quatre sous-espaces vectoriels. On fera intervenir $r$, le rang de $p$.
**c.** Déduire de ce qui précède que $\varphi$ est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

**4.34** *Centrale PSI 2012* Soit $n \geqslant 2$, trouver une condition nécessaire et suffisante sur $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall z \in \mathbb{C},\ P - zM \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Commencer par examiner le cas où $M$ est inversible.

**4.35** *Centrale PSI 2012* Soit $n \in \mathbb{N}^*$, deux matrices $A$ et $B$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour une matrice $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit l'équation $(E_Y)$ : $AX - XB = Y$ où l'on cherche les solutions $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit qu'un couple $(A, B)$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si l'équation $(E_Y)$ possède au moins une solution quelle que soit la matrice $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
**a.** Traduire le fait que $(A, B)$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ sur $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\varphi(X) = AX - XB$.
**b.** Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AX = XB$, justifier qu'alors $\chi_A(B)$ n'est pas inversible.
En déduire que si $(A, B)$ ne vérifie par $\mathcal{P}$, alors $A$ et $B$ ont au moins une valeur propre commune.
**c.** Étudier la réciproque.

**4.36** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 + {}^tM = 2I_n$. Montrer que cette matrice $M$ est diagonalisable.

**4.37** *Mines PC 2006* Soit $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3$ tel que $C = A + B$, $C^2 = 2A + 3B$ et $C^3 = 5A + 6B$.
Les matrices $A$ et $B$ sont-elles diagonalisables ?

**4.38** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension 3 et $f$ un endomorphisme de $E$ vérifiant $f^4 = f^2$.
On suppose que $1$ et $-1$ sont valeurs propres de $f$. Montrer que $f$ est diagonalisable.

**4.39** Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de projection et $\varphi$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = PM + MP$.
Montrer que l'endomorphisme $\varphi$ est diagonalisable.

**4.40** *Mines MP 2004* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $f_A \in \mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)$ par $f_A(M) = AM$.
**a.** Montrer que si $A^2 = A$ alors $f_A$ est diagonalisable.
**b.** Montrer que $f_A$ est diagonalisable si et seulement si $A$ est diagonalisable.

**4.41** Trouver les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M^5 = M^2$ et $\mathrm{Tr}\,(M) = n$.

**4.42** Soit $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
**a.** Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$.
**b.** Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que $M$ soit diagonalisable.

**4.43** *Centrale PSI 2013* Soit $n \in \mathbb{N}^*$, deux matrices $A$ et $B$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \varphi(M) = AM - MB$.
**a.** Montrer que si $(a, b) \in \mathrm{Sp}(A) \times \mathrm{Sp}(B)$ alors $a - b \in \mathrm{Sp}(\varphi)$. On pourra d'abord justifier qu'il existe deux vecteurs colonnes non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tels que $AU = aU$ et ${}^tBV = bV$.
**b.** Justifier que $\varphi$ est diagonalisable si on suppose que $A$ et $B$ le sont.
**c.** Pour $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, établir que $\chi_A(C)$ est inversible si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(C) = \emptyset$.
**d.** En déduire que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi)$, alors $\exists (a, b) \in \mathrm{Sp}(A) \times \mathrm{Sp}(B)$ tel que $\lambda = a - b$.

**4.44** *X MP 2005* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**a.** On suppose $A^3 = A^2$. Montrer que $A^2$ est diagonalisable et que $A^2 - A$ est nilpotente.
**b.** Plus généralement on suppose $A^{k+1} = A^k$ pour un certain entier $k \in \mathbb{N}^*$, établir l'existence d'un entier $p > 0$ tel que $A^p$ est diagonalisable et $A^p - A$ nilpotente.

## 4.3 Trigonalisation et diagonalisation simultanée

**4.45** Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables.

**4.46** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\rho(A) = \max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|$ (**rayon spectral de** $A$).

On va montrer que pour toute norme de $E$, on a $\lim_{k\to+\infty} ||A^k||^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$.

**a.** Montrer que si le résultat est vrai pour une norme, alors il est vrai pour toute norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
**b.** Montrer que si le résultat est vrai pour une matrice $A$ alors il est vrai pour toute matrice semblable à $A$.
Dans la suite, on considère la norme $||A||_\infty = \max_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} |a_{i,j}|$.

**c.** Montrer que si $T$ est triangulaire et que ses coefficients diagonaux valent $1$ alors $\lim_{k\to+\infty} ||T^k||_\infty^{\frac{1}{k}} = 1$. (indication : écrire $T = I_n + N$ avec $N = T - I_n$ (nilpotente) et utiliser la formule du binôme)
**d.** Montrer que si $B$ est telle que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ |a_{i,j}| \leqslant b_{i,j}$ alors $||A^k||_\infty \leqslant ||B^k||_\infty$.
Conclure en trigonalisant $\frac{A}{\rho(A)}$.

**4.47** *Centrale PC 2008* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, à valeurs propres strictement positives.

**a.** Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $X_0 = I_n$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = \frac{1}{2}\left(X_n + AX_n^{-1}\right)$ est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n$ est diagonalisable (on pourra utiliser une base de vecteurs propres de $A$).
**b.** Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite $X$ vérifie $X^2 = A$. On la note $\sqrt{A}$.
**c.** Montrer que si $A$ est symétrique alors $\sqrt{A}$ est symétrique.

**4.48** *Mines PSI 2010 d'après RMS* On munit $E = C^0\big([0;1], \mathbb{R}\big)$ de la norme de la convergence uniforme $||\,.\,||_\infty$.

Soit $T$ l'application qui à $f \in E$ associe $T(f) : x \mapsto f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

**a.** Montrer que $T$ est un endomorphisme continu de $E$. Déterminer sa norme subordonnée.
**b.** Soit $f \in E$ non nulle telle que $f(0) = 0$. Montrer que : $\exists x_0 \in ]0;1],\ \forall x \in [0;x_0[,\ |f(x)| < |f(x_0)| = ||f||_\infty$.
En déduire que l'espace propre de $T$ associé à la valeur propre $2$ est de dimension $1$.

**4.49** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$. Exprimer le polynôme caractéristique de $P(A)$ en fonction de $Sp(A)$.

**4.50** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $\chi_A$ et trigonaliser $A$.

## 4.4 Exercices posés aux étudiants de PSI1

**4.51** *Centrale PSI 2013* Thomas M.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_n \\ a_1 & \cdots & a_n & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A$ est diagonalisable si et seulement si tous les $a_k$ et les $b_k$ sont nuls ou si $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k > 0$. Indication : on pourra raisonner sur $A^2$.

**4.52** *CCP PSI 2013* Romain

Soit $M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**a.** Diagonaliser $K$.

**b.** Exprimer $M$ en fonction de puissances de $K$.

**c.** Diagonaliser $M$ et calculer $M^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

**4.53** *CCP PSI 2013* Adrien

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A$ inversible, $\mathrm{Tr}\,(A) = 5$ et $A^3 - 4A^2 + 3A = 0$. Donner $\chi_A$.

**4.54** *Petites Mines PSI 2013* Camille

Soit $A$ et $B$ des matrices carrées réelles, montrer que $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$.

**4.55** *Centrale PSI 2014* Mathias

On pose $E$ l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à $n$.

**a.** Montrer que $\forall P \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{x} P(t)e^t dt$ converge.

**b.** On définit $L$ l'application sur $E$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ L(P)(x) = e^{-x}\int_{-\infty}^{x} P(t)e^t dt$.

Montrer que $L$ est un endomorphisme de E. Est-il diagonalisable ?

**4.56** *Mines PSI 2014* Lucie

Soit $M$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec des $a$ sur la diagonale et des $b$ partout ailleurs ($b \neq 0$ et $n \geqslant 2$).

**a.** Donner les valeurs propres de $M$ et dire si elle est diagonalisable.

**b.** Dans le cas où $M$ est inversible trouver $M^{-1}$.

**c.** Trouver $M^p$ avec $p$ un entier naturel (sans passer par la matrice diagonale).

**4.57** *Mines PSI 2014* Valentine

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $m$ canoniquement associé à $M$.

**a.** En effectuant un produit par blocs, déterminer le plus petit entier $p \geqslant 1$ tel que $M^p = I_5$.

**b.** En déduire que $M$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_5(\mathbb{C})$.

**c.** Trouver un vecteur $x \in \mathbb{R}^5$ tel que $\left(x, m(x), m^2(x), m^3(x), m^4(x)\right)$ soit une base de $\mathbb{R}^5$.

**d.** Donner alors la matrice de $m$ dans cette base, puis les valeurs propres de $M$.

**4.58** *Mines PSI 2014* Mathias

**a.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \notin Sp(A)$. Montrer que $(A - \lambda I_n)^{-1}$ est un polynôme en $A$.

**b.** Soit $k \in \mathbb{N}^*$ le degré d'un polynôme annulateur de $A$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ des complexes qui ne sont pas dans le spectre de $A$. Montrer qu'il existe une famille de complexes $(c_1, \cdots, c_k)$ telle que $\sum_{i=1}^{k} c_i (A - \lambda_i I_n)^{-1} = I_n$.

**4.59** *CCP PSI 2014* Mohammed

Dans $E = \mathbb{R}_n[X]$, on considère $f : P \mapsto X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$. Montrer que $f$ est un endomorphisme de E, que $f$ est diagonalisable et trouver une base de $E$ constituée de vecteurs propres de $f$.

**4.60** *Centrale Maths1 PSI 2015* Vincent Barrère et Adrien Gruson

Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $u$ et $v$ deux endomorphismes de $E$.

**a.** On suppose que $u \circ v = 0$. Montrer que $u$ et $v$ ont un vecteur propre commun.

**b.** On suppose que $u \circ v \in Vect(u, v)$, montrer que $u$ et $v$ ont un vecteur propre en commun.

**c.** On suppose que $u \circ v \in Vect(u, v)$, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle les matrices de $u$ et $v$ sont triangulaires supérieures. Indication : raisonner par récurrence sur la dimension de $E$.

**4.61** *Centrale Maths1 PSI 2015* Térence Burcelin

Soit $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2 \to \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par $F(A, B) = \begin{pmatrix} aB & bB \\ cB & dB \end{pmatrix}$ si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

**a.** Montrer que $F(A_1, B_1)F(A_2, B_2) = F(A_1A_2, B_1B_2)$.

**b.** Calculer $Tr\,(F(A, B))$, $rang\,(F(A, B))$ et $det(F(A, B))$.

**c.** À quelles conditions $F(A, B)$ est-elle diagonalisable ?

**4.62** *Centrale Maths1 PSI 2015* Margaux Ledieu

Soit $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on définit $D : E \to E$ par $\forall f \in E,\ D(f)(x) = xf'(x)$.

**a.** Montrer que $D$ est un endomorphisme de $E$.

**b.** Déterminer $Ker(D)$.

**c.** Trouver les éléments propres de $D$.

**d.** Déterminer $Im\,(D)$.

**4.63** *Mines PSI 2015* Jean-Raphaël Biehler

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $Sp(P(M)) = \{P(\lambda) \mid \lambda \in Sp(M)\}$.

**4.64** *Mines PSI 2015* Bastien Chevallier

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n$. Soit $f$ un endomorphisme de $E$ tel que $f^3 + f^2 - id_E = 0$ et $Tr\,(f) \in \mathbb{Q}$. Montrer que $n$ est un multiple de 3.

**4.65** *Mines PSI 2015* Arthur Lacombe

Soit $B$ une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$. On pose $M = \lambda I_n + B$.

Montrer que $P(M)$ est diagonalisable si et seulement s'il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $P(M) = \mu I_n$.

**4.66** *Mines PSI 2015* Édouard Le Goas

On pose $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $p$ un réel non nul de valeur absolue strictement inférieure à 1 et $q = 1 - p$. Soit $u$ l'application qui pour tout $f$ de $E$ associe $u(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $u(f)(x) = f(px + q)$.

**a.** Montrer que $u$ est un automorphisme.

**b.** Montrer que les valeurs propres de $u$ appartiennent à $]-1; 1]$.

**c.** Montrer que si $f$ est un vecteur propre, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(k)} = 0$.

**d.** Trouver les valeurs propres de $u$ et les vecteurs propres associés.

**4.67** *Mines PSI 2015* Ludovic Péron

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

**a.** $u$ admet-il toujours une droite stable ?

**b.** $u$ admet-il toujours un plan stable ?

**4.68** *Mines PSI 2015* Julien Venne

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ avec $A - A^{-1}$ diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et toutes ses valeurs propres distinctes.

**a.** Montrer que $A$ est diagonalisable. Idem pour $A^{-1}$.

**b.** Qu'en est-il si les valeurs propres de $A - A^{-1}$ ne sont pas toutes distinctes ?

**c.** Reprendre les questions en supposant que c'est $A + A^{-1}$ qui est diagonalisable.

**4.69** *CCP PSI 2015* Clément Suberchicot

**a.** Soit $M \in GL_k(\mathbb{C})$, on suppose $M^2$ diagonalisable, montrer que $M$ est diagonalisable.

**b.** Soit $(A, B) \in GL_n(\mathbb{C})^2$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$, montrer que $N$ est inversible et calculer $N^{-1}$. Calculer $N^2$.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, calculer $P(N^2)$. Si $N$ est diagonalisable, montrer que $AB$ est diagonalisable. Réciproque ?

**4.70** *Petites Mines PSI 2015* Marin de Bonnières

Soit $E$ un espace de dimension $n \geqslant 1$, $(u, v) \in \mathcal{L}(E)$, $u$ avec $n$ valeurs propres distinctes et $v \circ u = u \circ v$.

**a.** Montrer que $v$ est diagonalisable.

**b.** Montrer que $v \in Vect(id_E, u, \cdots, u^{n-1})$.

**c.** En déduire $\dim(C_u)$ où $C_u$ est le commutant de $u$ : $C_u = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ u = u \circ f\}$.

**4.71** *Cachan PSI 2016* Alexandre Janot

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

**a.** Montrer que $C(A)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**b.** Montrer que si $M \in C(A) \cap GL_n(\mathbb{R})$, alors $M^{-1} \in C(A)$.

**c.** Soit $D$ un matrice diagonale réelle dont tous les coefficients sont distincts deux à deux. Déterminer $C(D)$. Montrer que $(I_n, D, \cdots, D^{n-1})$ est une base de $C(D)$.

On suppose dorénavant que $n = 2$.

**d.** Quelles sont les matrices $A$ telles que $\dim(C(A)) = 4$ ?

**e.** Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a $\dim(C(A)) \geqslant 2$.

**f.** Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\dim(C(A)) \geqslant 3$.

En utilisant $F = Vect(E_{1,1}, E_{1,2})$ et $G = Vect(E_{2,1}, E_{2,2})$, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_2$.

**g.** Trouver une base de $C(A)$.

**4.72** *Centrale Maths1 PSI 2016* Sylvin Bielle

**a.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $A$ soit trigonalisable. Donner $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui soit non diagonalisable.

**b.** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure et semblable à $M$ telle que $\forall i \neq j,\ |a_{i,j}| \leqslant \varepsilon$.

Questions : pouvez-vous me donner toutes les CNS de diagonalisabilité que vous connaissez dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ?

**4.73** *Centrale Maths1 PSI 2016* Elliott Jean-François

Soit $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3$, $a \in \mathbb{R}^*$ tels que pour $p \in \{1, 2, 3\}$, on ait $A^p = a^p(B + pC)$ (1).

**a.** Montrer que la proposition (1) est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

**b.** Montrer que tout vecteur propre de $A$ appartient au noyau de $C$.

**c.** Déterminer une condition pour que $A$ soit diagonalisable.

**4.74** *Mines PSI 2016* Erwann Alric II

Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$.

Soit $u$ un endomorphisme de $E$ tel que $u^2 = \mathrm{id}_E$. On dit que $u$ est une involution.

**a.** Étudier la diagonalisabilité de $u$.

**b.** On suppose que $E_1(u)$ est de dimension 1. Montrer qu'il existe un vecteur $a \in E$ et $\theta$ une forme linéaire sur $E$ tels que $\forall x \in E,\ u(x) = -x + \theta(x)a$.

**4.75** *Mines PSI 2016* Thomas Corbères II

Déterminer les différentes classes de similitude des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Indication : la classe de similitude d'une matrice $A$ est l'ensemble des matrices semblables à $A$.

**4.76** *Mines PSI 2016* Samy Essabar I

**a.** Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $A$ diagonalisable $\iff A^3$ diagonalisable.

**b.** Donner une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^3$ est diagonalisable alors que $A$ ne l'est pas.

**c.** Que se passe-t-il dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ?

**4.77** *Mines PSI 2016* Jean Migliorini I

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & n-1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver les valeurs propres de $A$ en considérant son endomorphisme associé dans un espace $E$ judicieusement choisi.

**4.78** *Mines PSI 2016* Paul Mondou II

Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et son polynôme caractéristique $\chi_M(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Montrer que $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(M),\ |\lambda| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k|$.

**4.79** *Mines PSI 2016* Hugo Tarlé II

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, $v_1, \cdots, v_p$ des endomorphismes non nuls de $E$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ u^n = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^n v_k$ avec $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ des réels distincts deux à deux.

**a.** Montrer que $u$ est diagonalisable. Indication : on pourra montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ P(u) = \sum_{k=1}^{p} P(\lambda_k) v_k$.

**b.** Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$, notée $(L_1, \cdots, L_p)$ tel que $\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2,\ L_i(\lambda_j) = \delta_{i,j}$.

**c.** Montrer que $Sp(u) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\}$.

**4.80** *Mines PSI 2016* Théo Taupiac I

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nilpotente.

**a.** Montrer que l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $M$ et $\lambda M$ soient semblables est fini.

**b.** Qu'en est-il pour $M$ nilpotente ?

**4.81** *Mines PSI 2016* Arthur Robbe II

Soit $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ et $a_{i,j} = a$ si $i = j$, $a_{i,j} = b$ si $|i-j| = 1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.
Quel est le spectre de $A_n$ ?

**4.82** *Mines PSI 2016* Hugo Saint-Vignes I

Soit $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $M = \begin{pmatrix} (0) & & a_n \\ & \ddots & \\ a_1 & & (0) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**a.** Trouver une CNS pour que $M$ soit diagonalisable.

**b.** Trouver les sous-espaces propres de $M$.

**4.83** *CCP PSI 2016* Adrien Boudy II

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

**a.** Calculer $A^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

**b.** Montrer que $A$ est inversible et donner son inverse.

**c.** Donner les éléments propres de $A$. Caractère diagonalisable de $A$ ?

**d.** Donner une autre façon de prouver que $A$ est inversible, diagonalisable.

**4.84** *CCP PSI 2016* Matthieu Cadiot I

Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ défini par $f(P) = R$ reste de la division euclidienne de $X^2P$ par $D = X^4 - 1$.

**a.** Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

**b.** $f$ est-elle diagonalisable ?

**c.** $f$ est-elle injective ?

**4.85** *CCP PSI 2016* David Espert II

Soit $a \in \mathbb{C}$ et $M = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & -1 \\ 2-a & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une CNS pour que $M$ soit diagonalisable.

**4.86** *CCP PSI 2016* Sam Pérochon II

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $H$ un hyperplan de $E$ et $u$ un endomorphisme de $E$.

**a.** Montrer que : $H$ stable par $u \iff \exists \lambda \in \mathbb{K},\ \mathrm{Im}\,(u - \lambda \mathrm{id}_E) \subset H$.

**b.** Trouver les sous-espaces stables de $A = \begin{pmatrix} 10 & -6 & -4 \\ 18 & -10 & -8 \\ -7 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

**4.87** *CCP PSI 2016* Marie Rebière II

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

**a.** Donner deux conditions suffisantes mais non nécessaires pour qu'une matrice soit diagonalisable.

**b.** Montrer que $A$ est diagonalisable et donner $P$ et $D$ telles que $A = PDP^{-1}$.

On définit $B$ par blocs par $B = \begin{pmatrix} 2A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$.

**c.** $B$ est-elle diagonalisable ? Donner ses valeurs propres.

**4.88** *CCP PSI 2016* Arthur Robbe II

Soit $E = \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u^3 + u^2 + u = 0$.

**a.** Déterminer $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{id}_E)$.

**b.** Montrer que $\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{id}_E)$. En déduire que $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}\,(u)$.

**c.** Soit $v$ la restriction de $u$ à $\mathrm{Im}\,(u)$. Quel lien entre $\deg(\chi_v)$ et $u$ ?

**d.** Montrer que $0 \notin \mathrm{Sp}(v)$. En déduire que $\mathrm{rang}\,(u)$ est pair.

**4.89** *E3A PSI 2016* Clément Suberchicot II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $U : E \to E$ défini par $U(P)(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t} P(t)\,dt$.

**a.** Montrer que $U$ est un endomorphisme de $E$.

**b.** $U$ est-il diagonalisable ? Inversible ? Si oui, déterminer $U^{-1}$.

**4.90** *Petites Mines PSI 2016* Rogelio Escalona I

Soit $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver les éléments propres de $N$.

**4.91** *ENS Cachan PSI 2017* Valentin Gorce et Iñigo Saez-Casares

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont réelles (éventuellement répétées), $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On considère la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $x^{(0)}$ donné, $\forall k \geqslant 0,\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha r_k$ où $r_k = Ax^{(k)} - b$ (I).

**a.** Trouver $B_\alpha \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}^n$ tels que $x^{(k+1)} = B_\alpha x^{(k)} + c$.

**b.** Trouver une CNS sur $\alpha$ en fonction des $\lambda_i$ pour que la méthode (I) converge : cela signifie que $\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, la suite $(x^{(k)})_{k \geqslant 0}$ converge vers le vecteur $v$ : l'unique solution de $Au = b$.

**c.** Montrer que si tous les $\lambda_i$ ne sont pas de même signe, la méthode (I) ne converge pas.

**d.** On suppose $\forall k \in [\![1; n]\!],\ \lambda_k > 0$ et que la méthode (I) converge. Montrer qu'il existe $C$, à exprimer en fonction des $\lambda_i$, tel que $0 < \alpha < C$. Soit $f_i : \alpha \mapsto |1 - \lambda_i \alpha|$. Tracer les fonctions $f_i$.

Trouver $\alpha_{opt}$ tel que la méthode (I) converge le plus rapidement.

**4.92** *Centrale Maths1 PSI 2017* Aloïs Blarre

Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**a.** $AB$ est-elle inversible ? Quelles valeurs peut prendre $x$ ?

**b.** La matrice $BA$ est-elle diagonalisable ?

**c.** Montrer que $\mathrm{Ker}(B) \oplus \mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^3$.

**4.93** *Centrale Maths1 PSI 2017* Manon Bové

**a.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^2 = A$. Quel peut être le rang de $A$ ?

**b.** Soit $P = \{U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid U^2 = U\}$. Combien existe-t-il de classes de similitude dans $P$ ?

**c.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n$ pair et $A^2 = 0$. Quel peut être le rang de $A$ ? Soit $m$ le rang maximal possible. Trouver un endomorphisme $u$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $u^2 = 0$ et $\mathrm{rang}(u) = m$.

**4.94** *Centrale Maths1 PSI 2017* Adrien Cassagne

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E$ l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont la somme des coefficients de chaque colonne vaut 1 : $\forall j \in [\![1; n]\!],\ \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

**a.** Soit $A \in E$, montrer que 1 est valeur propre de $A$.

**b.** Montrer que $E$ est stable par produit.

**c.** Montrer que si $\forall j \in [\![1; n]\!],\ \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \leqslant 1$, alors $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ |\lambda| \leqslant 1$.

**4.95** *Mines PSI 2017* Manon Bové II

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. La matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & b \\ b & a & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ b & 0 & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

**4.96** *Mines PSI 2017* Adrien Cassagne II et Elliott Jean-François II

Soit $E = \{f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ admet une limite finie en } +\infty\}$. Soit $T : f \mapsto g$ tel que $g(x) = f(x+1)$.

**a.** Montrer que $E$ est un espace vectoriel et que $T \in \mathcal{L}(E)$.

**b.** Trouver les valeurs propres de $T$.

**4.97** *Mines PSI 2017* Alexandre Chamley I Soit $n \geqslant 2$, $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \\ a_1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$.

**a.** Étudier la diagonalisabilité de $A$ en fonction de $a_1, \cdots, a_n$.

**b.** Lorsque $A$ est diagonalisable, déterminer une base de vecteurs propres de $A$.

**4.98** *Mines PSI 2017* Célia Detrez I Soit $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**a.** Déterminer le polynôme caractéristique de $A$. À quelles conditions $A$ est-elle diagonalisable ?

**b.** Déterminer si $A$ est diagonalisable des conditions de convergence de la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$.

**4.99** *Mines PSI 2017* Joseph Dumoulin I

**a.** Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet un polynôme annulateur de degré minimal dont on note $k$ le degré.

**b.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \notin Sp(A)$. Montrer que $(A - \lambda I_n)^{-1}$ est un polynôme en $A$.

Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ des complexes qui ne sont pas dans le spectre de $A$.

**c.** Montrer qu'il existe une famille de complexes $(c_1, \cdots, c_k)$ telle que $\sum_{i=1}^{k} c_i(A - \lambda_i I_n)^{-1} = I_n$.

**4.100** *Mines PSI 2017* Valentin Gorce I

Soit un entier $n \geqslant 2$.

**a.** Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$, montrer que $A$ diagonalisable $\iff A^3$ diagonalisable

**b.** Trouver des contre-exemples dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**c.** Trouver des contre-exemples dans $GL_n(\mathbb{R})$.

**4.101** *Mines PSI 2017* Thomas Laborde I

Soit $E$ un espace de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. On note $\varphi$ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall g \in \mathcal{L}(E),\ \varphi(g) = \frac{1}{2}\Big(g \circ p + p \circ g\Big)$. On considère également les ensembles suivants : $A = \big\{g \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Ker}(p) \text{ et } \mathrm{Im}\,(p) \subset \mathrm{Ker}(g)\big\}$, $B = \big\{g \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Im}\,(p) \text{ et } \mathrm{Im}\,(p) \subset \mathrm{Ker}(g)\big\}$, $C = \big\{g \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Ker}(p) \text{ et } \mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(g)\big\}$, $D = \big\{g \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Im}\,(p) \text{ et } \mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(g)\big\}$.

**a.** Donner une condition sur $p$ pour que $\varphi$ soit un projecteur.

**b.** Montrer que $A$, $B$, $C$ et $D$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$.

**c.** Montrer $\varphi$ est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

**4.102** *Mines PSI 2017* Bastien Lamagnère I

**a.** Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = BA$, et toutes les valeurs propres de $A$ sont de multiplicité 1. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et deux matrices diagonales $D$ et $D'$ telles que $A = PDP^{-1}$ et $B = PD'P^{-1}$.

Soit $D = \mathrm{diag}(d_1 \cdots, d_n)$ et $D' = \mathrm{diag}(d'_1, \cdots, d'_n)$. On pose $f : P \in \mathbb{C}_{n-1}[X] \mapsto (P(d_1), \cdots, P(d_n))$.

**b.** Montrer que $f$ est linéaire et injective.

**c.** Montrer qu'il existe un polynôme $L \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $\forall k \in [\![1; n]\!],\ L(d_k) = d'_k$.

**d.** Montrer qu'il existe des complexes $a_0, \cdots, a_{n-1}$ tels que $B = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_{n-1}A^{n-1}$. Que peut-on en déduire sur le commutant de $A$ défini par $\{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid AB = BA\}$ ?

**e.** Est-ce toujours vrai si les valeurs propres de $A$ ne sont plus de multiplicité 1 ?

**4.103** *Mines PSI 2017* Antoine Romero-Romero I

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A + A^{-1} = I_n$.

**a.** Calculer, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la valeur de $A^k + A^{-k}$.

**b.** Calculer $\det(A)$. Que peut-on dire de $n$ ?

**4.104** *Mines PSI 2017* Grégoire Verdès I Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**a.** Que dire des valeurs propres de $A$ ?

Soit $\lambda$ la valeur propre de $A$ de module maximal. On pose $u_n = \sin\left(2\pi \operatorname{Tr}\left(A^n\right)\right)$ et $v_n = \sin\left(2\pi\lambda^n\right)$.

**b.** Déterminer les natures des séries $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} v_n$.

**4.105** *CCP PSI 2017* Manon Bové II et Alexis Trubert II Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

**a.** Montrer qu'il n'existe pas de polynôme annulateur non nul de $A$ de degré inférieur ou égal à 2.

**b.** Trouver un polynôme annulateur de $A$ et en déduire $A^{-1}$.

**c.** Quels sont tous les polynômes qui annulent $A$ ?

**4.106** *CCP PSI 2017* Adrien Cassagne I

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On définit l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(M) = 2\operatorname{Tr}(M)A$.

**a.** Montrer que $f$ est un endomorphisme.

**b.** $f$ est-il diagonalisable ?

**4.107** *CCP PSI 2017* Alexandre Chamley I et Elliott Jean-François I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**a.** Montrer que $A$ diagonalisable $\Longrightarrow A^2$ diagonalisable.

**b.** Est-il vrai que $A^2$ diagonalisable $\Longrightarrow A$ diagonalisable ?

**c.** Montrer que $A^2$ diagonalisable et $A$ inversible $\Longrightarrow A$ diagonalisable.

**4.108** *CCP PSI 2017* Maxime Lacourcelle I

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 2A^2 - 3A$. La matrice $A$ est-elle inversible ?

**4.109** *CCP PSI 2017* Cléa Maricourt I

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

**a.** Déterminer le polynôme caractéristique de $A$.

**b.** Discuter de la diagonalisabilité de $A$ selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}$.

**4.110** *CCP PSI 2017* Louise Piton II

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = 0$ si $i = j$ et $a_{i,j} = 1$ sinon.

**a.** La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?

**b.** Soit $P$ un polynôme annulateur de $A$, montrer que les valeurs propres de $A$ sont des racines de $P$.

**c.** Calculer $(A + I_n)^2$. En déduire les valeurs propres possibles de $A$.

**d.** Le sont-elles effectivement ?

**4.111** *CCP PSI 2017* Antoine Romero-Romero II

On considère l'application $f : M \mapsto M + \operatorname{Tr}(M)I_n$.

**a.** Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer la dimension de $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$.

**b.** Déterminer un polynôme annulateur de $f$ de degré 2.

**c.** $f$ est-elle diagonalisable ? $f$ est-elle bijective ? Si oui, calculer $f^{-1}$.

**4.112** *CCP PSI 2017* Roland Tournade II

Soit $n \geqslant 2$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(A)$ soit triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux distincts deux à deux. Montrer que $A$ est diagonalisable.

**4.113** *E3A PSI 2017* Vincent Meslier

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On veut résoudre l'équation $M^2 = A$.

**a.** Montrer que $A$ n'est pas diagonalisable mais seulement trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

**b.** Trigonaliser $A$.

**c.** Montrer que le spectre de $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$ est inclus dans $\{-1, 0, 1\}$.

Estimer la dimension des sous-espaces propres correspondants.

**d.** Montrer que $0$ est valeur propre de $M$ si $M^2 = A$.

**e.** Trouver toutes les matrices $M$ solution de $M^2 = A$.

**4.114** *E3A PSI 2017* Grégoire Verdès

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}$ euclidien canonique associé à $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ -6 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

**a.** Calculer $A^2$. Interpréter $f$. Donner ses éléments caractéristiques.

**b.** Déterminer l'image par $f$ du plan $P$ d'équation $x - y - z - 5 = 0$.

**4.115** *TPE, EIVP PSI 2017* Manon Bové I

Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $3A^3 = A^2 + A + I_n$.

Montrer que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice $B$ de projecteur.

**4.116** *ENS Ulm/Cachan PSI 2018* Thomas Gerbeaud

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. On dit que le système stationnaire discrétisé $X' = AX + BU$ est contrôlable pour un entier $N \in \mathbb{N}^*$ si pour tout $(\widetilde{X_0}, \cdots, \widetilde{X_N}) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^{N+1}$, il existe $(U_0, \cdots, U_N) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^{N+1}$ tel que si on pose $X_0 = \widetilde{X_0}$ et $\forall k \in [\![1; N-1]\!]$, $X_{k+1} = AX_k + BU_k$, alors $\forall k \in [\![0; N]\!]$, $X_k = \widetilde{X_k}$.

**a.** Déterminer le terme $X_k$ ainsi défini en fonction de $k$.

**b.** Soit $C = \begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$ (matrice définie par bandes).

Si $\operatorname{rang}(C) < n$, montrer qu'il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\forall j \in \mathbb{N}$, ${}^tXA^jB = 0$. Indication : on admettra avant le chapitre sur la réduction qu'il existe un polynôme unitaire de degré $n$ qui annule $A$.

**c.** Montrer qu'alors le système n'est contrôlable pour aucune valeur $N \in \mathbb{N}^*$.

**d.** Si le système n'est pas contrôlable pour un certain entier $N \in \mathbb{N}$, montrer alors que l'application $F : (U_0, \cdots, U_{N-1}) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^N \mapsto \sum_{k=0}^{N-1} A^kBU_{N-k-1}$ est linéaire, non surjective.

En déduire qu'il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\forall (U_0, \cdots, U_{N-1}) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^N$, ${}^tX\Big(\sum_{k=0}^{N-1} A^kBU_{N-k-1}\Big) = 0$.

**4.117** *Centrale Maths1 PSI 2018* Peio Betbeder

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $X \in \mathbb{R}^n$ non nul et $E_X$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui ont $X$ comme vecteur propre.

**a.** Montrer que $E_X$ est un espace vectoriel.

**b.** Déterminer $E_X$. Quelle est sa dimension ?

Question de cours : montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda \in \operatorname{Sp}(u) \iff \chi_u(\lambda) = 0$.

**4.118** *Centrale Maths1 PSI 2018* Anaïs Chaumeil et Amélie Guyot

**a.** Trouver $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A \neq I_3$ et $A^3 = I_3$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = I_n$.

**b.** On suppose que $1$ n'est pas valeur propre de $A$. Montrer que $n$ est pair. Exprimer $A^2$ en fonction de $A$ et $I_n$. Soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, résoudre l'équation $AX = X - B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

**c.** On suppose que $1 \in \mathrm{Sp}(A)$. Soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, résoudre l'équation $AX = X - B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

**4.119** *Centrale Maths1 PSI 2018* Thibaud Vendrely

Soit $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^2 \to \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ définie par $F(A,B) = \begin{pmatrix} aB & bB \\ cB & dB \end{pmatrix}$ (par blocs) si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

**a.** Montrer que $F(A_1A_2, B_1B_2) = F(A_1,B_1)F(A_2,B_2)$.

**b.** Donner $\mathrm{Tr}\,(F(A,B))$, $\det(F(A,B))$, $\mathrm{rang}\,(F(A,B))$ grâce à $\mathrm{Tr}\,(A)$, $\mathrm{Tr}\,(B)$, $\det(A)$, $\det(B)$, $\mathrm{rang}\,(A)$, $\mathrm{rang}\,(B)$.

**c.** Déterminer une condition suffisante sur $A$ et $B$ pour que $F(A,B)$ soit diagonalisable.

**4.120** *Mines PSI 2018* Charlotte Beaune et Santiago Monteagudo II

Déterminer toutes les classes de similitude de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

**4.121** *Mines PSI 2018* Elisabeth Carreau-Gaschereau II

**a.** Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = BA$. Montrer que $B$ est un polynôme en $A$ ou $A$ un polynôme en $B$.
**b.** Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = BA$. Est-ce que $B$ est un polynôme en $A$ ou $A$ un polynôme en $B$ ?
**c.** Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2$ tel que $AB = BA$. Est-ce que $B$ est un polynôme en $A$ ou $A$ un polynôme en $B$ ?

**4.122** *Mines PSI 2018* Anaïs Chaumeil II et Adrien Sarrade II

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $v_1, \cdots, v_n$ des endomorphismes non nuls et $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ des réels tous distincts. On suppose que $\forall k \in [\![0;n]\!],\ u^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k v_i$.

**a.** Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(u) = \sum_{i=1}^{n} P(\lambda_i) v_i$ ; puis que $u$ est diagonalisable.

**b.** Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ u^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k v_i$.

**c.** Trouver des polynômes $(L_1, \cdots, L_n) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^n$ tels que $\forall i \in [\![1;n]\!],\ \forall k \in [\![1;n]\!],\ L_i(\lambda_k) = \delta_{i,k}$.

**d.** Montrer que $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$.

**e.** Que peut-on dire des dimensions des sous-espaces propres de $u$ si $\dim(E) = n$ ?

**4.123** *Mines PSI 2018* Gauthier Crosio II

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, u, v$ trois endomorphismes de $E$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que l'on ait $\begin{cases} f = & \lambda u + \mu v \\ f^2 = & \lambda^2 u + \mu^2 v \\ f^3 = & \lambda^3 u + \mu^3 v \end{cases}$. Montrer que $f$ est diagonalisable.

**4.124** *Mines PSI 2018* Mathilde Dutreuilh II

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = u$.

**a.** Montrer que $u^2$ est un projecteur.

**b.** Que peut-on dire de $u$ si $\mathrm{Tr}\,(u) = \mathrm{rang}\,(u)$ ?

**4.125** *Mines PSI 2018* Elio Garnaoui II

**a.** Trouver un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ dont $a = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est racine.

Déterminer une expression de $a$ et $b = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ avec des racines.

**b.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 + A^3 + A^2 + A + I_n = 0$.
Montrer que si $\mathrm{Tr}\,(A) \in \mathbb{Q}$, alors $n$ est un multiple de 4.
**c.** Réciproquement, si $n \in \mathbb{N}^*$ est un multiple de 4, montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que l'on ait à la fois $A^4 + A^3 + A^2 + A + I_n = 0$ et $\mathrm{Tr}\,(A) \in \mathbb{Q}$.

**4.126** *Mines PSI 2018* Martin Gros I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B$ deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**a.** Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, déterminer l'inverse de $P = \begin{pmatrix} I_n & D \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.

**b.** On suppose $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$. Montrer que toute matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ s'écrit $C = DB - AD$ avec une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En déduire que $N = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ pour toute $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**c.** Réciproquement, montrer que $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ C = DB - AD \Longrightarrow \mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$.

**4.127** *Mines PSI 2018* Lucie Jandet III

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $A^n = I_2$. Montrer que $A^{12} = I_2$.

**4.128** *Mines PSI 2018* Pauline Lamaignère I

Soit $E$ un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $C(f) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ f = f \circ u\}$.

**a.** Montrer que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ qui est stable par composition.

**b.** On suppose dans cette question que $E$ est de dimension finie et que $f$ est diagonalisable.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $u \in C(f) \iff (\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(f),\ E_\lambda(f)$ est stable par $u)$. En déduire $\dim(C(f))$.

**c.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : M \mapsto {}^tM$. Déterminer $\dim(C(f))$.

**4.129** *Mines PSI 2018* Pierre Le Bouille II

Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ des symétries telles que $f \circ g + g \circ f = 0$.

**a.** Montrer que $\dim(E)$ est pair.

**b.** Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

**4.130** *Mines PSI 2018* Claire Raulin II

Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

**4.131** *Mines PSI 2018* Titouan Sancier II

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 + f^2 - \mathrm{id}_E = 0$ et $\mathrm{Tr}\,(f) \in \mathbb{Q}$.

Montrer que $n$ est un multiple de 3.

**4.132** *Mines PSI 2018* Benoit Souillard II

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $A^2 \neq 0$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists B_n \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ A = B_n^n$.

**4.133** *Mines PSI 2018* Thibaud Vendrely II

Soit $P = X^5 - 2X^4 - 2X^3 + X^2 + 4X + 4$.

**a.** Trouver quelles valeurs parmi $-2, -1, 0, 1, 2$ sont racines de $P$.

**b.** Factoriser $P$ dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.

**c.** Trouver les $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}\,(M^3) = 0$, $\det(M) = \pm 1$ et $P(M) = 0$.

**4.134** *Mines PSI 2018* Nicolas Ziegler I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$.

**a.** Montrer que $\chi_A(B)$ est inversible.

**b.** Montrer que $\forall Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ AX - XB = Y$.

**4.135** *CCP PSI 2018* Charlotte Beaune et Florian Gaboriaud II

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ et $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tels que $AB - BA = \alpha A$.

**a.** Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k B - BA^k = k\alpha A^k$.

**b.** Montrer que $A$ est nilpotente. Indication : s'intéresser à $L : M \mapsto MB - BM$.

**4.136** *CCP PSI 2018* Peio Betbeder et Paul Simon I

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

**a.** Déterminer le polynôme caractéristique de $A$.

**b.** Discuter de la diagonalisabilité de $A$ selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}$.

**4.137** *CCP PSI 2018* Elisabeth Carreau-Gaschereau II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \neq 0$ et $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M + \mathrm{Tr}\,(M)A$.

**a.** Montrer que $\mathrm{Tr}\,(A) \neq -1 \Longrightarrow f$ bijective.

**b.** On suppose maintenant $\mathrm{Tr}\,(A) = -1$. Donner $\mathrm{Ker}(f)$. Montrer que $\mathrm{Im}\,(f) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}\,(M) = 0\}$.

**c.** On revient au cas général, soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre $M + \mathrm{Tr}\,(M)A = B$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**4.138** *CCP PSI 2018* Mathilde Dutreuilh II

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

**a.** Montrer que si $E$ est de dimension finie et $f$ est diagonalisable, alors $f^2$ l'est aussi.

**b.** On suppose que $f^3 = f$. Montrer que si $f$ est injective alors $f$ est surjective.

**b.** On suppose que $f^3 = f$. Montrer que si $f$ est surjective alors $f$ est injective.

Question de cours : donner une CNS de diagonalisabilité d'une matrice carrée.

**4.139** *CCP PSI 2018* Santiago Monteagudo II

Soit $n \geqslant 2$ et $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $a_n \neq 0$ et $a_1 \cdots a_{n-1} \neq 0$.

On définit la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la façon suivante : $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$.

**a.** Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors $M$ est diagonalisable. Trouver ses valeurs propres.

**b.** Trouver un exemple avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ où $M$ n'est pas diagonalisable.

**c.** Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, donner une condition nécessaire et suffisante pour que $M$ soit diagonalisable.

**4.140** *CCP PSI 2018* Claire Raulin I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $P = \chi_A = \chi_B$.

**a.** Montrer que si $P$ possède $n$ racines distinctes alors les $A$ et $B$ sont semblables.

**b.** Trouver deux telles matrices carrées telles que $A$ et $B$ ne sont pas semblables.

**4.141** *CCP PSI 2018* Adrien Sarrade I Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

**a.** $A$ est-elle diagonalisable ? Inversible ? Donner ses éléments propres.

**b.** Soit $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$. Donner les éléments propres de $B$.

**4.142** *E3A PSI 2018* Vincent Barreau

On se donne quatre points $A_0$, $B_0$, $C_0$ et $D_0$ dans le plan qui forment un parallélogramme $A_0B_0C_0D_0$. On construit ensuite par récurrence quatre suites de points par $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1}$ (resp. $B_{n+1}$, $C_{n+1}$, $D_{n+1}$) est le milieu du segment $[A_nB_n]$ (resp. $[B_nC_n]$, $[C_nD_n]$, $[D_nA_n]$).

**a.** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_nB_nC_nD_n$ est un parallélogramme.

**b.** Calculer les affixes des points $A_{n+1}$, $B_{n+1}$, $C_{n+1}$, $D_{n+1}$ en fonction de celles de $A_n$, $B_n$, $C_n$, $D_n$.

**c.** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n$.

**4.143** *E3A PSI 2018* Anaïs Chaumeil

Soit $E = C^2([0;1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$ et $x \in [0;1]$, on pose $T(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{Min}(x,t)f(t)\mathrm{d}t$.

**a.** Montrer que $T$ ainsi définie est un endomorphisme de $E$.

**b.** Soit $f$ un vecteur propre de $T$. Montrer que $f$ satisfait une équation différentielle de la forme $y'' = \beta y$ avec $\beta$ à déterminer en fonction de la valeur propre associée à $f$.

**c.** Réciproquement, si $f$ est solution non nulle de $y'' = \beta y$, à quelle(s) condition(s) $f$ est vecteur propre de $T$.

**d.** Déterminer le spectre de $T$.

**4.144** *Petites Mines PSI 2018* Baptiste Egreteau II

**a.** Soit $B$ et $C$ deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(A)$.

Les matrices $xI_n - B$ et $xI_n - C$ sont-elles semblables ? Et $(xI_n - B)^{-1}$ et $(xI_n - C)^{-1}$ ?

**b.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(A)$. Montrer que $\mathrm{Tr}\left((xI_n - A)^{-1}\right) = \dfrac{\chi_A'(x)}{\chi_A(x)}$.

**4.145** *Centrale Maths1 PSI 2019* Elaia Mugica

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. On pose $M = \begin{pmatrix} 0_n & A \\ B & 0_n \end{pmatrix}$.

**a.** On suppose $M$ diagonalisable. Montrer que $AB$ est diagonalisable.
On suppose dorénavant $AB$ diagonalisable et inversible.

**b.** Montrer que $M$ est diagonalisable.

**c.** Montrer que $M$ est inversible de deux manières différentes.

**4.146** *Mines PSI 2019* Tom Boileau II

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $A^n = I_2$. Montrer que $A^{12} = I_2$.

**4.147** *Mines PSI 2019* Thomas Brémond II

Pour $f \in E = C^0([0;1], \mathbb{R})$, on définit $T(f) : [0;1] \to \mathbb{R}$ par $T(f)(x) = (1-x)\int_0^x tf(t)dt + x\int_x^1 (1-t)f(t)dt$.

**a.** Montrer que $T$ est un endomorphisme injectif de $E$.

**b.** Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de $T$.

**4.148** *Mines PSI 2019* Charles Broquet II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ défini par $f(P) = nXP(X) - (X^2-1)P'(X)$.

**a.** Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

**b.** Trouver les solutions polynomiales sur $]-1;1[$ de l'équation $(E)$ : $nxy - (x^2-1)y' = \lambda y$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

**c.** Quels sont les valeurs propres et sous-espaces propres de $f$ ? Est-il diagonalisable ?

**d.** Déterminer $\mathrm{Tr}\,(f)$, $\det(f)$, $\mathrm{rang}\,(f)$.

**4.149** *Mines PSI 2019* Mathis Chénet I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Soit $A$ et $B$ deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $Sp(A) \cap Sp(B) = \emptyset$.

**a.** Donner l'inverse de $\begin{pmatrix} I_n & D \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$.

**b.** Montrer que $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ DB - AD = C$.

**c.** Montrer que $N = \begin{pmatrix} A & C \\ 0_n & B \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & B \end{pmatrix}$ sont semblables.

**d.** $N$ est-elle diagonalisable ? Commenter le cas $n = 1$.

**e.** Montrer que $N$ est diagonalisable d'une autre manière.

**4.150** *Mines PSI 2019* Carla Chevillard II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - A + I_n = 0$.

**a.** Calculer $\det(A)$.

**b.** Montrer que $n$ est pair et que $\mathrm{Tr}\,(A) \in \mathbb{N}$.

Question de cours : montrer que si $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$, alors $\overline{\lambda} \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$ et que $m_\lambda(A) = m_{\overline{\lambda}}(A)$.

**4.151** *Mines PSI 2019* Kévin Dufrechou II

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

**a.** La matrice $J$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ? Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ ?

**b.** La matrice $M$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ? Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ ?

**4.152** *Mines PSI 2019* Fabien Dupuis II

Soit $k \in \mathbb{C}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**a.** Si $k \in \mathbb{R}$, la matrice $A$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ ? Si oui, la diagonaliser.

**b.** Si $k \in \mathbb{C}$, pour quelles valeurs de $k$ la matrice $A$ est-elle diagonalisable ?

**4.153** *Mines PSI 2019* Mathis Girard II

**a.** Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Tr}\,(A) = 0$. Montrer que $A$ est soit diagonalisable, soit nilpotente.

**b.** Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et $\mathrm{Tr}\,(A) = 0$, $A$ est-elle forcément diagonalisable ou nilpotente ?

**4.154** *Mines PSI 2019* Lola Josseran II

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $M$.

**a.** Caractériser l'endomorphisme $f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

**b.** Donner les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par $f$.

**4.155** *Mines PSI 2019* Benoît Le Morvan II

**a.** Trouver un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ dont $a = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est racine.

Déterminer une expression de $a$ et $b = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ avec des racines.

**b.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 + A^3 + A^2 + A + I_n = 0$.

Montrer que si $\mathrm{Tr}\,(A) \in \mathbb{Q}$, alors $n$ est un multiple de 4.

**c.** Réciproquement, si $n \in \mathbb{N}^*$ est un multiple de 4, montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que l'on ait à la fois $A^4 + A^3 + A^2 + A + I_n = 0$ et $\mathrm{Tr}\,(A) \in \mathbb{Q}$.

**4.156** *Mines PSI 2019* Enola Soenen II

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

**a.** Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $a, b, c$ pour que $A$ soit diagonalisable.

**b.** Si $A$ est diagonalisable, déterminer $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \alpha_n A + \beta_n I_4$.

**4.157** *Mines PSI 2019* Tanguy Sommet I

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que : $A$ diagonalisable $\iff (\forall Q \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}_0[X],\ \exists M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ Q(M) = A)$.

Questions de cours : conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité.

**4.158** *CCP PSI 2019* Augustin Aumont et Enola Soenen II

Soit $E = C^0([0;1], \mathbb{R})$ et $\varphi : f \mapsto g$ où $g$ est défini par $g(0) = f(0)$ et $g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ si $x \in ]0;1]$.

**a.** Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $E$.

**b.** $\varphi$ est-il surjectif ? Montrer que $0$ n'est pas valeur propre de $\varphi$.

**c.** Montrer que $1$ est valeur propre de $\varphi$. Déterminer $E_1(\varphi)$.

**d.** Déterminer les autres valeurs propres de $\varphi$ et leurs espaces propres associés.

**4.159** *CCP PSI 2019* Réjane Bastien-Amaré et Fabien Dupuis I

On donne $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & A \end{pmatrix}$ où $A$ et $B$ sont deux matrices complexes, carrées de taille $n$, qui commutent.

**a.** Montrer que si $U$ est semblable à $V$, pour tout polynôme $R$, $R(U)$ est semblable à $R(V)$.

**b.** Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A)$, $P'(A)$ et $B$.

**c.** Montrer que si $A$ est diagonalisable et $B$ nulle, alors $M$ est diagonalisable.

**d.** Démontrer la réciproque.

**4.160** *CCP PSI 2019* Tom Boileau et Charles Broquet II

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 1$. On définit $M_n(x) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $M_n(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & x \end{pmatrix}$.

**a.** Pour $n \geqslant 3$, trouver $a$ et $b$ en fonction de $x$ tels que $\det(M_n(x)) = a \det(M_{n-1}(x)) + b \det(M_{n-2}(x))$.

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on pose $\Delta_n = \det(M_n(2\cos(\theta)))$.

**b.** Pour $n \geqslant 3$, donner $\Delta_n$ en fonction de $\Delta_{n-1}$, $\Delta_{n-2}$ et $\theta$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_n = \dfrac{\sin\left((n+1)\theta\right)}{\sin(\theta)}$.

**c.** La matrice $M_n(x)$ est-elle diagonalisable ?

**d.** Trouver les valeurs propres de $M_n(x)$.

**4.161** *CCP PSI 2019* Axel Brulavoine II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$.

**a.** Montrer que si $u$ est diagonalisable alors $u^2$ est diagonalisable.

**b.** Montrer que la réciproque de la question précédente est fausse.

**c.** Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$, montrer que $\mathrm{Ker}(u^2 - \lambda^2 \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) \oplus \mathrm{Ker}(u + \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})$.

**d.** Montrer que la réciproque de la question **a.** est vraie si $u$ est bijective.

**4.162** *CCP PSI 2019* Mathis Chénet II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in [\![1;n]\!],\ a_{i,j} > 0$ et $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

**a.** Montrer que $1$ est valeur propre de $A$.

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que ${}^tX = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à $\lambda$.

Soit $k \in [\![1;n]\!]$ l'un des indices tel que $|x_k| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$.

**b.** Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$ et que $|a_{k,k} - \lambda| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{k,j}|$.

**c.** On suppose que $|\lambda| = 1$. Montrer que $\lambda = 1$.

**4.163** *CCP PSI 2019* Thomas Crété et Léo Simplet II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + M^T = I_n$.

**a.** Montrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$ annule $M$, les valeurs propres de $M$ sont des racines de $P$.

**b.** On suppose que $M$ est symétrique. Montrer que $M$ est diagonalisable et que $\mathrm{Tr}\,(M) \times \det(M) \neq 0$.

**c.** On ne suppose plus $M$ symétrique. Montrer que $M$ est toujours diagonalisable.

**d.** Montrer que $M$ est inversible si et seulement si $1$ n'est pas valeur propre de $M$.

**4.164** *CCP PSI 2019* Louis Destarac et Victor Margueritte II

Soit $f$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^3 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ et $f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

**a.** Montrer que $1$ est valeur propre de $f$.

**b.** Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.

**c.** Trouver une base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**4.165** *CCP PSI 2019* Romain Galea II

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \mathrm{Tr}\,(A^n)$.

**a.** En utilisant un polynôme annulateur de $A$, établir une relation entre $u_{n+3}$, $u_{n+2}$, $u_{n+1}$ et $u_n$.

**b.** En déduire que $\forall n \geqslant 2,\ u_n \in \mathbb{N}^*$.

**c.** Étudier la convergence de $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{u_n}$.

**4.166** *CCP PSI 2019* Lola Josseran II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi : P \mapsto P(1 - iX)$.

**a.** Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $E = \mathbb{C}_n[X]$.

**b.** Montrer que si $Q \in \mathbb{C}[X]$ est annulateur de $\varphi$, les valeurs propres complexes de $\varphi$ sont des racines de $Q$.

**c.** Calculer $\varphi^4$. En déduire que $\varphi$ est bijective et diagonalisable.

**d.** Quelles sont les valeurs propres possibles de $\varphi$ ? Montrer que $1 \in \mathrm{Sp}(\varphi)$.

**e.** Trouver un vecteur propre de degré 1 associé à la valeur propre $-i$.

**f.** Retrouver les résultats de la question **c.** avec une autre méthode et en déduire le spectre de $\varphi$.

Donner aussi la dimension des différents sous-espaces propres.

**4.167** *CCP PSI 2019* Thomas Méot I

**a.** Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton.

Soit pour les deux prochaines questions $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^3$ tel que $C \neq 0_n$ et $AC = CB$.

**b.** Montrer que $\forall P \in \mathbb{C}[X],\ P(A)C = CP(B)$.

**c.** En déduire que $A$ et $B$ ont au moins une valeur propre commune.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^3$ tel que $A$ et $B$ ont une valeur propre commune.

**d.** Existe-t-il une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AC = CB$ ?

**4.168** *CCP PSI 2019* Tanguy Sommet I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $f_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f_A(M) = AM$.

**a.** Montrer que $f_A$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**b.** Montrer que $A^2 = A$ si et seulement si $f_A$ est un projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**c.** Montrer que $A$ est diagonalisable si et seulement si $f_A$ est diagonalisable.

**d.** Construire un vecteur propre de $f_A$ (resp. $A$) via un vecteur propre de $A$ (resp. $f_A$).

**e.** Montrer que $A$ et $f_A$ ont le même spectre.

**4.169** *CCP PSI 2019* Julien Tissot II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A^2 + A - I_n = 0$.

**a.** Montrer que les valeurs propres de $A$ sont racines de $P = X^3 - X^2 + X - 1$.

**b.** En déduire le déterminant de $A$.

**c.** Montrer que $\mathrm{Tr}\,(A)$ est un entier.

**4.170** *CCP PSI 2019* Quentin Vacher II

Soit $n \geqslant 2$ et $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n$.

Soit $\ell : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire, $a \in E$ et $f : E \to E$ défini par $f(x) = \ell(a)x - \ell(x)a$.

**a.** Montrer que $f$ est un endomorphisme de $E$. Calculer $f(a)$.

On suppose pour les trois prochaines questions que $\ell(a) \neq 0$.

**b.** Soit $x \in E$ tel que $f(x) = 0_E$. Montrer que $x \in \mathrm{Vect}(a)$. En déduire $\mathrm{Ker}(f)$.

**c.** Si $x \in \mathrm{Ker}(\ell)$, calculer $f(x)$. En déduire le spectre de $f$ et les sous-espaces propres associés.

**d.** L'endomorphisme $f$ est-il diagonalisable ?

On suppose pour les deux prochaines questions que $\ell(a) = 0$.

**e.** Calculer $f(\mathrm{Ker}(\ell))$. Déterminer $f^2$ et en déduire un polynôme annulateur de $f$.

**f.** L'endomorphisme $f$ est-il diagonalisable ?

**4.171** *Petites Mines PSI 2019* Réjane Bastien-Amaré II

On définit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n}{4} + \frac{y_n}{2} + \frac{z_n}{2} \\ y_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{y_n}{4} + \frac{z_n}{2} \\ z_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{y_n}{2} + \frac{z_n}{4} \end{cases}$.

Montrer que ces trois suites convergent et donner leurs limites en fonction de $x_0$, $y_0$ et $z_0$.

**4.172** *ICNA PSI 2019* Léa Deveyneix II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I_n$.

Que pouvez-vous dire de la matrice $A$ ?

**4.173** *X PSI 2020* Matthieu Darius II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{Z}^n$ et la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

**a.** Déterminer le polynôme caractéristique $P$ de $C$.

On note $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ les racines complexes de $P$.

**b.** Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, le polynôme $P_k = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i^k)$ est à coefficients entiers.

**4.174** *X PSI 2021* Arthur Riché I

Soit $n \geqslant 1$ et $E$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $E \setminus \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \{0\}$.

Quelles sont les dimensions possibles pour $E$ ? Indication : tester pour les petites valeurs de $d = \dim(E)$.

**4.175** *ENS Cachan PSI 2021* Antoine Greil

Soit un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$.

**a.** Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $P$ soit surjectif de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

**b.** Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $P$ soit injectif sur $\mathbb{R}$.

**c.** Supposons $\deg(P) \geqslant 2$. Montrer que $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = P(M)$ n'est pas injective.

**d.** Supposons que la fonction polynomiale $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective. Montrer que la restriction de la fonction $f$ de la question précédente est injective sur l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**4.176** *Centrale Maths1 PSI 2021* Tinaël Gelpe

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres distinctes sont $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ avec $p \geqslant 2$.

On suppose de plus que $\forall i \in [\![2; p]\!],\ |\lambda_i| < |\lambda_1|$ $(*)$.

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Tr}\,(A^k) \neq 0$, on pose $t_k = \dfrac{\mathrm{Tr}\,(A^{k+1})}{\mathrm{Tr}\,(A^k)}$.

**a.** Montrer que les $t_k$ sont définis à partir d'un rang $k_0$ et que $(t_k)_{k \geqslant k_0}$ converge vers une limite à déterminer.

**b.** Les résultats de la question **a.** sont-ils encore vérifiés si $(*)$ ne l'est plus ?

**c.** Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**d.** Déterminer $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{A^k}{k}$.

**4.177** *Centrale Maths1 PSI 2021* Clément Lérou

Soit $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = P(X+1)$.

**a.** Justifier que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

**b.** Déterminer $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}\,(g)$ si $g : P \mapsto P(X+1) - P(X)$.

**c.** Déterminer, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Ker}(g^k)$ et $\mathrm{Im}\,(g^k)$.

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice de la restriction de $f$ à $\mathbb{R}_n[X]$ dans la base canonique.

On pose aussi la matrice $B = A^t A$.

**d.** Déterminer $A$ et $\det(A)$. $A$ est-elle diagonalisable ?

**e.** Trouver l'inverse de $B$.

Questions de cours :

- Donner l'inégalité de Markov.
- Donner l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Énoncer le théorème spectral version vectorielle.

**4.178** *Mines PSI 2021* Mathilde Arnaud I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $C = \left\{ f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \mid \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f(M^T) = f(M)^T \right\}$. On note traditionnellement $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ celui des matrices antisymétriques.

**a.** Montrer que $C$ est un sous-espace vectoriels de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

**b.** Montrer que $f \in C$ si et seulement si $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont stables par $f$.

**c.** En déduire la dimension de $C$.

**d.** Exhiber un endomorphisme non diagonalisable de $C$.

**4.179** *Mines PSI 2021* Thomas Boudaud II

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

**a.** Donner tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par $A$.

**b.** Quelle est la structure de $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$ ? Déterminer sa dimension.

**c.** Quelles sont les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (resp. $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$) telles que $M^2 = A$ ?

**4.180** *Mines PSI 2021* Aloïs Doucet I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $B = A^3 + A + I_n$.

**a.** Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, exprimer $A$ comme un polynôme en $B$.

**b.** Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, peut-on exprimer $A$ comme un polynôme en $B$ ?

**4.181** *Mines PSI 2021* Tinaël Gelpe I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que $A \neq 0$ et $B \neq 0$ et $ABAB = 0$. A-t-on $BABA = 0$ ?

Indication : on pourra commencer par les petites valeurs de $n$.

**4.182** *Mines PSI 2021* Pierre-Issa Lacourte II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice d'un projecteur.

Soit $u, v, w : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définis par $u(M) = MA$, $v(M) = AM$ et $w(M) = AM - MA$.

**a.** $u$, $v$ sont-ils diagonalisables ?

**b.** Quelles peuvent-être les valeurs propres de $w$ ?

**c.** $w$ est-il diagonalisable ?

**4.183** *Mines PSI 2021* Clément Lopez I

Soit $E = C^\infty([0;1], \mathbb{R})$ et $T$ définie sur $E$ par $T(f)(x) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$.

**a.** Montrer que $f$ est un endomorphisme de $E$.

**b.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0;1]$ et $f \in E$, donner une expression de $T^n(f)(x)$ sous forme de somme.

**c.** Déterminer la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} T^n(f)(0)$.

**d.** Trouver de même, pour $x \in [0;1]$, la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} T^n(f)(x)$.

**e.** Montrer que $1$ est valeur propre de $T$ et déterminer $E_1(T)$.

**f.** Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $|k| > 1$, est-ce que $k$ peut être valeur propre de $T$ ?

**g.** Pour $f \in E$, calculer $\big(T(f)\big)'$. Déterminer $E_{1/2}(T)$.

**4.184** *Mines PSI 2021* Baptiste Pozzobon I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f$ un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ et $H$ un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$. On pose $r = \mathrm{rang}\,(f)$.

**a.** Montrer que $g : H \to \mathrm{Im}\,(f)$ définie par $g(x) = f(x)$ est un isomorphisme.

**b.** Montrer qu'il existe deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ et $\mathbb{C}^n$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J_r$.

**c.** Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{rang}\,(C) = r$. Montrer qu'il existe $(P, Q) \in (GL_n(\mathbb{C})^2$ tel que $C = PJ_rQ$.

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel qu'il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang $r$ telle que $AC = CB$.

**d.** Montrer que les matrices $A$ et $B$ admettent au moins $r$ valeurs propres en commun (comptées avec leurs ordres de multiplicité).

**e.** Donner un argument plus rapide pour montrer que si $C$ est inversible, alors $A$ et $B$ admettent au moins $n$ valeurs propres en commun (comptées avec leurs ordres de multiplicité).

**4.185** *Mines PSI 2021* Arthur Riché II

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

**a.** Trouver le spectre de $A$. La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?

**b.** Justifier l'existence de $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et de $T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$.

**c.** Donner une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**d.** Déterminer l'ensemble des matrices $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $TN = NT$.

**e.** En déduire l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.

**4.186** *Mines PSI 2021* Arthur Sureau I

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$, on définit $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ par $\varphi(P) = \big((\alpha X + \beta)P\big)'$.

**a.** Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

**b.** Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de $\varphi$.

**c.** Soit $n \in \mathbb{N}$, diagonaliser l'application $\varphi_n$ induite par $\varphi$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

**4.187** *Mines PSI 2021* Guillaume Touly II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \chi_M$ son polynôme caractéristique.

Montrer que $\forall \lambda \in Sp(M),\ |\lambda| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k|$.

**4.188** *CCINP PSI 2021* Mathilde Arnaud II

Soit $v = (v_1, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} v_k = 1$. Pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $f(x) = x - \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big)v$.

**a.** Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

**b.** Pour $y \in \mathbb{R}^n$, montrer que $y \in \mathrm{Im}\,(f) \iff f(y) = y$.

**c.** Justifier que $\mathrm{Im}\,(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}^n$. Qu'en déduire ?

**d.** Expliciter les sous-espaces propres de $f$.

**4.189** *CCINP PSI 2021* Maëva Berland II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + M^T = I_n$.

**a.** Montrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$ annule $M$, les valeurs propres de $M$ sont des racines de $P$.

**b.** On suppose que $M$ est symétrique. Montrer que $M$ est diagonalisable et que $\mathrm{Tr}\,(M) \times \det(M) \neq 0$.

**c.** On ne suppose plus $M$ symétrique. Montrer que $M$ est toujours diagonalisable.

**d.** Montrer que $M$ est inversible si et seulement si $1$ n'est pas valeur propre de $M$.

**4.190** *CCINP PSI 2021* Julie Coheleach II

Soit $E$ un espace de dimension finie $n$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ des valeurs propres distinctes de $f$.

**a.** Montrer que $\varphi : P \mapsto (P(\lambda_1), \cdots, P(\lambda_n))$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{K}^n$.

Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = f \circ g$.

**b.** Montrer que tout vecteur propre de $f$ est un vecteur propre de $g$.

**c.** Montrer qu'il existe une base de $E$ composée de vecteurs propres communs à $f$ et $g$.

**d.** Montrer l'existence et l'unicité de $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $g = P(f)$.

**e.** En déduire la dimension de $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$.

**4.191** *CCINP PSI 2021* Johan Haramboure II

**a.** Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton pour une matrice carrée.

**b.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B$ deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que, quel que soit le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, les matrices $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables.

Soit, dans la suite de cet exercice, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

**c.** Calculer $M^k$ pour $k \in \mathbb{N}$. En déduire une expression par blocs de $P(M)$ si $P \in \mathbb{R}[X]$.

**d.** Montrer que si $M$ est diagonalisable alors $A$ l'est aussi.

**e.** Montrer que si $M$ est diagonalisable alors $A = 0$.

**4.192** *CCINP PSI 2021* Antonio Treilhou II

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $R(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \mathrm{Tr}\,(M^n)$ et $v_n = \mathrm{Tr}\,\left(R(a, b)^n\right)$.

**a.** Montrer que $M$ est diagonalisable.

**b.** Exprimer $R(a, b)$ en fonction de $M$ et $I_3$.

**c.** Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite divergente à valeurs entières.

**d.** Montrer qu'on peut choisir $a$ et $b$ de sorte que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

**4.193** *CCINP PSI 2021* Adeline Vaudrey II

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f$ a la même matrice $A$ dans toutes les bases de $E$.

**a.** Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, montrer que $PA = AP$.

**b.** Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $B - \lambda I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. En déduire que $BA = AB$.

**c.** En déduire la forme de la matrice $A$. Comment appelle-t-on l'endomorphisme $f$ ?

**4.194** *Mines-Télécom PSI 2021* Juliette Maricourt II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, une matrice $A = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par ses colonnes et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

**a.** Que dire de $X$ si $\sum_{j=1}^{n} x_j C_j = 0$ ?

**b.** Diagonaliser $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sans calculer son polynôme caractéristique.

**4.195** *X PSI 2022* Olivier Courmont IV

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$.

**a.** Calculer $\chi_{A_m}$.

**b.** Les matrices $A_1$ et $A_2$ sont-elles diagonalisables ?

**c.** Traiter la diagonalisabilité de $A_m$ dans le cas général.

**4.196** *X PSI 2022* Lucas Lacampagne II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $u(e_i) = e_{i+1}$ si $i \in [\![1; n-1]\!]$ et $u(e_n) = 0$.
Trouver les sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ stables par $u$.

**4.197** *X PSI 2022* Lucas Lacampagne III

Soit un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant.
**a.** Soit $n = 2p \in \mathbb{N}^*$ un entier pair, montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$.
Indication : considérer les petites valeurs de $\deg(P)$.
**b.** Que se passe-t-il si on suppose $n = 2p + 1$ impair ?

**4.198** *ENS Cachan PSI 2022* Jimmy Guertin II

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ avec $A^n = I_2$. Montrer que $A^{12} = I_2$.

**4.199** *ENS Cachan PSI 2022* Maxence Rossignol I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques.
**a.** Montrer que $AB$ est symétrique si et seulement si $AB = BA$.
**b.** Trouver $A$ et $B$ symétriques telles que $AB$ n'est pas symétrique.
**c.** Montrer que s'il existe une base de vecteurs propres communs à $A$ et à $B$, alors $AB$ est symétrique.

**4.200** *Centrale Maths1 PSI 2022* Louis Bardinet

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $E$ un $\mathbb{R}$-espace de dimension $n$ et $f$ un endomorphisme de $E$ tel que $f^2 + 2f + \alpha \, \mathrm{id}_E = 0$.
**a.** Si $n = 2$ et $\alpha = 1$, que dire de $f$ ?

On suppose dans la suite que $\alpha > 1$.

**b.** Montrer que $n$ est pair.

**c.** Si $n = 2$, construire une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & -2 \end{pmatrix}$.

**d.** Si $n = 2p > 2$, construire une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale par blocs.

**4.201** *Mines PSI 2022* Amandine Darrigade I

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**a.** La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?
**b.** Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $AM = MA$, montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $M = P(A)$.
**c.** Résoudre l'équation $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

**4.202** *Mines PSI 2022* Lucas Lacampagne II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que $A \neq 0$ et $B \neq 0$ et $ABAB = 0$. A-t-on $BABA = 0$ ?
Indication : on pourra commencer par les petites valeurs de $n$.

**4.203** *Mines PSI 2022* Peio Lanot I Soit $n \geqslant 2$, $C \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $L \neq 0 \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et $A = CL - I_n$.

**a.** Peut-on avoir $A = -I_n$ ?
**b.** Montrer que $A^2 + (2 - LC)A + (1 - LC)I_n = 0$.
**c.** Dans quel cas $A$ est une matrice de symétrie ?
**d.** Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, montrer que $\lambda$ est racine d'un polynôme de degré 2.
**e.** $A$ est-elle diagonalisable ? Donner ses sous-espaces propres.

**4.204** *Mines PSI 2022* Margaux Millaret I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

**a.** Calculer $\chi_A$.

**b.** Montrer que $A$ est diagonalisable si et seulement si $\chi_A$ est scindé à racines simples.

**4.205** *Mines PSI 2022* Florian Picq I

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_k : x \mapsto \operatorname{ch}(kx)$ et $g_k : x \mapsto \operatorname{sh}(kx)$ définies sur $\mathbb{R}$ des vecteurs de $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On pose $F = \operatorname{Vect}(f_1, \cdots, f_n, g_1, \cdots, g_n)$ et $\Phi$ définie sur $E$ par $\Phi(f) = f'' - 3f' + 2f$.

**a.** Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, \cdots, f_n, g_1, \cdots, g_n)$ est une base de $F$.

**b.** Montrer que la restriction de $\Phi$ à $F$ est un endomorphisme qu'on note $\Psi$.

**c.** L'endomorphisme $\Phi$ est-il diagonalisable ?

**4.206** *Mines PSI 2022* Élouan Princelle II

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que : $A$ diagonalisable $\iff (\forall Q \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}_0[X],\ \exists M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ Q(M) = A)$.

**4.207** *Mines PSI 2022* Maxence Rossignol II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et deux matrices $A, B$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA = B$.

**b.** Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ AB^k - B^kA = kB^k$.

**c.** En déduire que $B$ est nilpotente.

**4.208** *Mines PSI 2022* Alban Soyez II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

**a.** Calculer $\chi_A$.

**b.** Trouver une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité.

**4.209** *CCINP PSI 2022* Naïs Baubry II

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $a$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A$.

**a.** Montrer que $A$ n'est pas diagonalisable mais trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

**b.** Trouver toutes les droites de $\mathbb{R}^3$ stables par $a$.

Soit dans les questions suivantes un plan $P$ de $\mathbb{R}^3$ stable par $a$. On définit alors l'endomorphisme $a'$ de $P$ induit par $a$ dans $P$, qu'on note $a' = a_P$.

**c.** Montrer que $\chi_{a'}$ divise $\chi_a$.

**d.** En déduire que $P \subset \operatorname{Ker}\left((a - 3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2\right)$.

**e.** Que vaut donc $P$ ?

**4.210** *CCINP PSI 2022* Anna Decrock II

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A$.

**a.** Trouver les valeurs propres de $A$.

**b.** Est-ce que la matrice $A$ est diagonalisable ?

**c.** Donner des vecteurs propres $u$ et $v$ de $A$ et un vecteur $w$ tels que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ soit une base de de $\mathbb{R}^3$.

**d.** Montrer que $A$ est trigonalisable et la trigonaliser.

**4.211** *CCINP PSI 2022* Léo Ducos-Tourenne II et Anatole Rousset II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $f_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f_A(M) = AM$.

**a.** Montrer que $f_A$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**b.** Montrer que $A^2 = A$ si et seulement si $f_A$ est un projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**c.** Montrer que $A$ est diagonalisable si et seulement si $f_A$ est diagonalisable.

**d.** Construire un vecteur propre de $f_A$ via un vecteur propre de $A$.

**e.** Construire un vecteur propre de $A$ via un vecteur propre de $f_A$.

**f.** Montrer que $A$ et $f_A$ ont le même spectre.

**4.212** *CCINP PSI 2022* Colin Herviou-Laborde et Élouan Princelle II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + M^T = I_n$.

**a.** Montrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$ annule $M$, les valeurs propres de $M$ sont des racines de $P$.

**b.** On suppose que $M$ est symétrique. Montrer que $M$ est diagonalisable et que $\mathrm{Tr}\,(M) \times \det(M) \neq 0$.

**c.** On ne suppose plus $M$ symétrique. Montrer que $M$ est toujours diagonalisable.

**d.** Montrer que $M$ est inversible si et seulement si $1$ n'est pas valeur propre de $M$.

**4.213** *CCINP PSI 2022* Fares Kerautret I et Louis Lacarrieu I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ avec $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$.

**a.** Montrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme annulateur de $A$, les valeurs propres de $A$ sont racines de $P$.

**b.** Montrer que $\chi_A(B)$ est inversible.

**c.** Montrer que si $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $AX = XB$, alors $X = 0$.

**d.** Montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ AX - XB = M$.

**4.214** *CCINP PSI 2022* Paul Lafon II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $AB - BA = A$ et $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = MB - BM$.

**a.** Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**b.** Calculer $\mathrm{Tr}\,(A)$. Généraliser en calculant, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Tr}\,(A^k)$.

**c.** Montrer que $A$ est nilpotente.

**4.215** *CCINP PSI 2022* Joël Lascoumes et Jade Mirassou II

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

**a.** La matrice $A$ est-elle diagonalisable ? Quels sont ses éléments propres ?

**b.** Montrer qu'il existe une matrice $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$.

**c.** Montrer que toute matrice $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $R^2 = A$ est diagonalisable.

**d.** Combien y a-t-il de matrices $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $R^2 = A$ ?

**4.216** *CCINP PSI 2022* Paul Mayé II

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \mathrm{Tr}\,(A^n)$.

**a.** En utilisant un polynôme annulateur de $A$, établir une relation entre $u_{n+3}$, $u_{n+2}$, $u_{n+1}$ et $u_n$.

**b.** En déduire que $\forall n \geqslant 2,\ u_n \in \mathbb{N}^*$.

**c.** Montrer que $A$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Exprimer $u_n$ en fonction des valeurs propres de $A$.

**d.** En déduire que $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{u_n}$ converge.

**4.217** *CCINP PSI 2022* Manon Odelot II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} O_n & A \\ I_n & O_n \end{pmatrix}$.

**a.** Déterminer $\chi_B$ en fonction de $\chi_A$. En déduire le spectre de $B$ en fonction de celui de $A$.

**b.** Si $A$ est inversible et a $n$ valeurs propres distinctes, montrer que $B$ est diagonalisable.

**c.** Montrer que si $B$ est diagonalisable, alors $A$ l'est aussi.

**d.** Donner un exemple où $A$ est diagonalisable et $B$ ne l'est pas.

**e.** Montrer que si $A$ est inversible et diagonalisable, alors $B$ est aussi diagonalisable.

**4.218** *CCINP PSI 2022* Ewan Sarrazin I

On définit sur l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'application $\phi$ qui à tout polynôme $P \in E$ associe le reste de la division euclidienne du polynôme $X^2P$ par $D = X^4 - 1$.

**a.** Montrer que $\phi$ définit un endomorphisme de $E$.

**b.** Montrer que $\phi$ est diagonalisable, donner ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

**c.** Est-ce que $\phi$ est inversible ? Si oui, donner $\phi^{-1}$.

**4.219** *CCINP PSI 2022* Baptiste Savarit II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. On note $\mathrm{Id}$ l'application identité de $\mathbb{C}^n$.

**a.** Montrer que si $u$ est diagonalisable alors $u^2$ est diagonalisable.

**b.** Montrer que la réciproque de la question précédente est fausse.

**c.** Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$, montrer que $\mathrm{Ker}(u^2 - \lambda^2 \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u + \lambda \mathrm{Id})$.

**d.** Montrer que la réciproque de la question **a.** est vraie si $u$ est bijective.

**4.220** *CCINP PSI 2022* Guillaume Tran-Ruesche II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E$ un $\mathbb{R}$-espace de dimension finie $n$, $f$ un endomorphisme de $E$ qui admet $n$ valeurs propres distinctes $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

**a.** Montrer que $\varphi : P \mapsto (P(\lambda_1), \cdots, P(\lambda_n))$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$.

Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = f \circ g$.

**b.** Montrer que les sous-espaces propres de $f$ sont stables par $g$, puis que tout vecteur propre de $f$ est un vecteur propre de $g$.

**c.** En déduire qu'il existe une base de $E$ composée de vecteurs propres communs à $f$ et $g$.

**d.** Montrer l'existence et l'unicité de $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $g = P(f)$.

**e.** En déduire la dimension de $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$.

**4.221** *Mines-Télécom PSI 2022* Jade Mirassou I

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

**a.** Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{Ker}(u^k) \subset_k \mathrm{er}(u^{k+1})$.

**b.** Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(u^p) = \mathrm{Ker}(u^{p+1})$, montrer que $\forall \ell \in \mathbb{N},\ \mathrm{Ker}(u^{p+\ell}) = \mathrm{Ker}(u^p)$.

Supposons $u$ nilpotent et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^q = 0$ et $u^{q-1} \neq 0$.

**c.** Déterminer le polynôme caractéristique de $u$.

**d.** En déduire que $q \leqslant n$.

**4.222** *Mines-Télécom PSI 2022* Manon Odelot I

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a+1 & a & a \\ a & a+1 & a \\ a & a & a+1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**a.** Calculer $B^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

**b.** Calculer $A^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

**c.** Comment aurait-on pu faire autrement pour **b.** ?

**4.223** *Mines-Télécom PSI 2022* Paul Sterlin I

Soit l'application $\Phi$ définie sur $\mathbb{R}[X]$ définie par $\Phi(P) = \displaystyle\int_X^{X+1} P(t)dt$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $\Phi_n$ l'application induite par $\Phi$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

**a.** Montrer que $\Phi_2$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

**b.** $\Phi_2$ est-il diagonalisable ?

**c.** Montrer que $\Phi_n$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Est-il diagonalisable ?

**4.224** *Navale PSI 2022* Naïs Baubry II

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

**a.** La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?

**b.** Trouver une base de $\mathrm{Ker}(A - 2I_3)$.

**c.** Trouver les plans stables par $A$.

**4.225** *ENS Cachan PSI 2023* Alban Dujardin I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - a_{i,i}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}| \right\}$.

Indication : écrire le système $Au = \lambda u$ en une ligne $i$ quelconque.

**4.226** *Centrale Maths1 PSI 2023* Antoine Campos

Soit $S = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$. On note, pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $D(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

**a.** Montrer que $S$ est semblable à une matrice $D(a,b)$ que vous déterminerez.

**b.** Montrer que $S$ est semblable à une matrice à diagonale nulle que vous déterminerez.

**c.** En étudiant l'application $\phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $\phi(M) = D(1,2)M - MD(1,2)$, montrer qu'il existe un couple $(C,D) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ tel que $S = CD - DC$.

**4.227** *Centrale Maths1 PSI 2023* Marius Desvalois

Soit $E = \mathbb{C}^4$, $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $u^2 = v^2 = \mathrm{id}_E$ et $u \circ v = -v \circ u$.

**a.** Montrer que $\mathrm{Tr}\,(u) = \mathrm{Tr}\,(v) = 0$.

**b.** Montrer que $u$ est diagonalisable et que $-1$ et $1$ sont valeurs propres doubles de $u$.

**c.** Soit $(x, y)$ une base de $E_1(u)$. Montrer que la famille $(v(x), v(y))$ est une base de $E_{-1}(u)$ et que la famille $(x, y, v(x), v(y))$ est une base de $E$.

**d.** Montrer que $u \circ v$ est diagonalisable et donner les éléments propres de $u \circ v$.

**4.228** *Centrale Maths1 PSI 2023* Clément Gallice

Soit $E$ l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $P \in E$, on pose $L(P) : x \mapsto e^{-x} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} P(t)e^t dt$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f$ est intégrable en $-\infty$.

**a.** Montrer que $F : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$ pour tout réel $x$.

**b.** Montrer que $L$ est un endomorphisme de $E$.

**c.** Déterminer les éléments propres de $L$.

**4.229** *Centrale Maths1 PSI 2023* Sacha Meslier

Soit un entier $q \geqslant 2$ et deux familles $(a_1, \cdots, a_q)$ et $(b_1, \cdots, b_{q-1})$ de réels strictement positifs. On définit alors la matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_q \\ b_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{q-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.

**a.** Justifier que $0$ n'est pas valeur propre de $A$.

**b.** Montrer que $A^q$ a tous ses coefficients strictement positifs.

**c.** Donner la dimension des sous-espaces propres associés aux valeurs propres complexes de $A$.

**d.** Montrer que $A$ admet une unique valeur propre strictement positive.

**4.230** *Mines PSI 2023* Bader Ben Amira I

Soit un entier $n \geqslant 2$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in E$, on pose $T(P) = P(1)(X^2 - X) + P(-1)(X^2 + X)$.

**a.** Montrer que $T$ est un endomorphisme de $E$ et donner sa matrice dans la base canonique de $E$.

**b.** Déterminer $\mathrm{Ker}(T)$ et $\mathrm{Im}\,(T)$.

**c.** En déduire les sous-espaces propres de $T$. $T$ est-il diagonalisable ?

**4.231** *Mines PSI 2023* Arthur Biot III

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$.

**a.** La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?

**b.** Déterminer une matrice triangulaire $T$ semblable à $A$.

**c.** Quelle est la dimension du commutant $C(A) = \{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \mid AB = BA\}$ ?

**4.232** *Mines PSI 2023* Rebecca Blé III

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + M^T = I_n$.

**a.** Montrer que $M$ est diagonalisable. Donner les valeurs propres possibles de $M$.

**b.** La matrice $M$ est-elle forcément symétrique ?

**4.233** *Mines PSI 2023* Mathys Bureau I

Soit $E = C^\infty([0;1], \mathbb{R})$ et $T$ définie sur $E$ par $T(f)(x) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$.

**a.** Montrer que $f$ est un endomorphisme de $E$.

**b.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0;1]$ et $f \in E$, donner une expression de $T^n(f)(x)$ sous forme de somme.

**c.** Déterminer la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} T^n(f)(0)$.

**d.** Trouver de même, pour $x \in [0;1]$, la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} T^n(f)(x)$.

**e.** Montrer que $1$ est valeur propre de $T$ et déterminer $E_1(T)$.

**f.** Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $|k| > 1$, est-ce que $k$ peut être valeur propre de $T$ ?

**g.** Pour $f \in E$, calculer $\big(T(f)\big)'$. Déterminer $E_{1/2}(T)$.

**4.234** *Mines PSI 2023* Hugo Delval I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$, on pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -a/n \\ a/n & 1 \end{pmatrix}$.

**a.** Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{i\alpha}{n}\right)^n$.

**b.** Diagonaliser $A_n$.

**c.** En déduire la convergence et la limite de la suite $(A_n^n)_{n\geqslant 1}$.

**4.235** *Mines PSI 2023* Raphaël Déniel II et Tom Graciet I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ AX - XB = Y$.

(ii) $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ AX = XB \Longrightarrow X = 0$.

(iii) $\chi_B(A)$ est une matrice inversible.

(iv) $A$ et $B$ n'ont aucune valeur propre commune.

**4.236** *Mines PSI 2023* Esteban Maurer II

**a.** Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = BA$. Montrer que $B$ est un polynôme en $A$ ou $A$ un polynôme en $B$.

**b.** Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = BA$. Est-ce que $B$ est un polynôme en $A$ ou $A$ un polynôme en $B$ ?

**c.** Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2$ tel que $AB = BA$. Est-ce que $B$ est un polynôme en $A$ ou $A$ un polynôme en $B$ ?

**4.237** *Mines PSI 2023* Arthur Melnitchenko I

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\det(A) = 32$ et $A^2 - 6A + 8I_3 = 0$.

On définit $\varphi_A : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par la relation $\varphi_A(B) = AB$. Déterminer $\mathrm{Tr}\,(\varphi_A)$.

**4.238** *Mines PSI 2023* Sacha Meslier II

Soit $k \in \mathbb{C}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**a.** Si $k \in \mathbb{R}$, la matrice $A$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ ? Si oui, la diagonaliser.

**b.** Si $k \in \mathbb{C}$, pour quelles valeurs de $k$ la matrice $A$ est-elle diagonalisable ?

**4.239** *Mines PSI 2023* Antoine Notelle-Maire II

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \sin(2\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(2\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & 0 & \sin(2\alpha) \end{pmatrix}$. Étudier la diagonalisabilité de $A(\alpha)$ en fonction de $\alpha$.

**4.240** *Mines PSI 2023* Marie-Lys Ruzic II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et un ensemble $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ tel que :

- $\forall A \in G,\ A^{-1} \in G$.
- $\exists p \in \mathbb{N}^*,\ \forall A \in G,\ A^p = I_n$.
- $\forall (A, B) \in G^2,\ AB \in G$.

On note $F$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par les matrices de $G$, $r = \dim(F)$ et $(M_1, \cdots, M_r)$ une base de $F$. On définit $\varphi : G \to \mathbb{C}^r$ par $\varphi(A) = \big(\mathrm{Tr}\,(AM_1), \cdots, \mathrm{Tr}\,(AM_r)\big)$.

**a.** Montrer que $\varphi$ est injective.

**b.** Montrer que $\mathrm{Im}\,(\varphi)$ est fini.

**c.** En déduire que $G$ est fini.

**4.241** *CCINP PSI 2023* Paul Bats I

Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

**a.** Montrer que si $f$ est diagonalisable alors $f^2$ est diagonalisable.

**b.** Si $f^2$ est diagonalisable, $f$ l'est-elle forcément ?

**c.** Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $\mu^2 = \lambda$, montrer que $\mathrm{Ker}(f^2 - \lambda \mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(f - \mu \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mu \mathrm{id}_E)$.

**d.** Montrer que si $f^2$ est diagonalisable et inversible, alors $f$ est diagonalisable.

**4.242** *CCINP PSI 2023* Bader Ben Amira II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire classique telle que $\mathcal{B} = (E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ forme la base canonique de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**a.** Donner la définition d'un projecteur.

**b.** Pour $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, est-ce que $E_{i,j}$ est une matrice de projecteur ?

**c.** Montrer que si $M$ est diagonalisable, $M$ est une combinaison linéaire de matrices de projecteurs.

**d.** Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont des matrices de projecteurs.

Vous donnerez les éléments géométriques caractéristiques de ces deux projections.

**e.** Une matrice écrite comme combinaison de matrices de projecteurs est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ?

**4.243** *CCINP PSI 2023* Maddie Bisch I et Rebecca Blé I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $Sp(A) \cap Sp(B) = \emptyset$.

**a.** Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A) = 0$, montrer que $\forall \lambda \in Sp(A),\ P(\lambda) = 0$.

**b.** Montrer que $\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C})$.

**c.** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que $AM = MB \iff M = 0$.

**d.** Montrer que $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists! M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ AM - MB = C$.

**4.244** *CCINP PSI 2023* Armand Dépée II

Soit un entier $n \geqslant 2$ et un complexe $\alpha$. On pose $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $a_{i,j} = \alpha^{i+j-2}$.

**a.** Si $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que $A$ est diagonalisable.

**b.** Calculer le rang de $A$, en déduire ses valeurs propres.

**c.** Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $A$ soit diagonalisable.

**4.245** *CCINP PSI 2023* Pierre Dobeli II

**a.** $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

**b.** Trouver ses éléments propres.

**c.** Trouver $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$. Montrer que les matrices $R$ qui conviennent sont diagonalisables.

**4.246** *CCINP PSI 2023* Olivier Farje II et Arthur Melnitchenko I et Marie-Lys Ruzic I

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $a$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A$.

**a.** Montrer que $A$ n'est pas diagonalisable mais trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

**b.** Trouver toutes les droites de $\mathbb{R}^3$ stables par $a$.

Soit dans les deux questions suivantes un plan $P$ de $\mathbb{R}^3$ stable par $a$. On définit alors l'endomorphisme $a'$ de $P$ induit par $a$ dans $P$, qu'on note $a' = a_P$.

**c.** Montrer que $\chi_{a'}$ divise $\chi_a$.

**d.** En déduire que $P \subset Ker\left((a - 3id_{\mathbb{R}^3})^2\right)$.

**e.** Quels sont les plans stables par $a$ ?

**4.247** *CCINP PSI 2023* Jonathan Filocco II et Antoine Vallade II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_{i,i} = i$ et $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$.
On note $P_n$ le polynôme caractéristique de $A_n$.

**a.** Montrer que $A_n$ est diagonalisable.

**b.** Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ P_{n+1} = (X - n)P_n - X(X-1)\cdots(X-n+1)$.

**c.** Montrer que, $\forall k \in [\![0; n-1]\!]$, $(-1)^k P_n(k)$ a le même signe que $P_n(0)$ et que $P_n(n-1) < 0$ et $P_n(n) < 0$.

**d.** En déduire que $A_n$ admet $n$ valeurs propres réelles distinctes.

**4.248** *Mines-Télécom PSI 2023* Armand Dépée I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A - 5I_n = 0$. Montrer que $\det(A) > 0$.

**4.249** *Centrale Maths1 PSI 2024* Amélia Arangoits

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $F$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

**a.** Montrer que $F$ est stable par $M$ si et seulement si $F^\perp$ est stable par $M^T$.

**b.** Trouver les sous-espaces stables par $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

**4.250** *Centrale Maths1 PSI 2024* Romane Mioque et Maxime Plottu

**a.** Montrer que si $A$ et $B$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables, alors $Sp(A) = Sp(B)$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M$ et $2M$ sont semblables.

**b.** Que vaut $Sp(M)$ ? Qu'en déduire sur $M$ ?

**c.** Trouver un exemple de matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non nulle telle que $M$ et $2M$ sont semblables.

**d.** Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ nilpotente telle que $\text{rang}\,(M) = 1$, montrer que $M$ est semblable à $E_{2,3}$.

En déduire que $M$ est semblable à $2M$.

**e.** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice $n-1$, montrer que $M$ est semblable à $2M$.

**4.251** *Mines PSI 2024* Amélia Arangoits II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe $(a_0, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ P(X+n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X-k)$.

**4.252** *Mines PSI 2024* Yasmine Azzaoui II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ avec $Sp(A) \cap Sp(B) = \emptyset$.

**a.** Montrer que $\chi_A(B)$ est inversible.

**b.** Montrer que si $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $AX = XB$, alors $X = 0$.

**c.** Montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ AX - XB = M$.

**4.253** *Mines PSI 2024* Thomas Favant I

Soit $E$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles indexées par $\mathbb{N}^*$ et $\varphi : E \to E$ définie par $\varphi(u) = v$ où $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.

**a.** Montrer que $\varphi$ est un automorphisme de $E$.

**b.** Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de $\varphi$.

**4.254** *Mines PSI 2024* Tiago Genet et Lou Goiffon I

Soit $P = X^5 - 4X^4 + 2X^3 + 8X^2 - 8X$.

**a.** Vérifier que $P(2) = P'(2) = 0$. En déduire une factorisation de $P$ dans $\mathbb{R}[X]$.

**b.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $P(M) = 0$ et $\text{Tr}\,(M) = 0$.

**4.255** *Mines PSI 2024* Martin Mayot I

On définit $A_0 = (1) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & A_n \\ A_n & 0 \end{pmatrix}$.

**a.** Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la taille de la matrice $A_n$.

**b.** Calculer le rang de $A_n$.

**c.** Donner les valeurs propres de $A_n$. La matrice $A_n$ est-elle diagonalisable ?

**4.256** *Mines PSI 2024* Clément Reiner II

On considère $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel et on pose $E = \mathcal{L}(\mathbb{C})$.

**a.** Montrer que $E = \{f_{a,b} : z \mapsto az + b\bar{z} \mid (a,b) \in \mathbb{C}^2\}$.

**b.** Déterminer le déterminant et la trace de $f_{a,b}$ en fonction de $a$ et $b$.

**c.** Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $f_{a,b}$ soit diagonalisable.

**4.257** *Mines PSI 2024* Arya Tabrizi I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_{i,i} = i$ et $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$.

On note $P_n$ le polynôme caractéristique de $A_n$.

**a.** Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ P_{n+1} = (X-n)P_n - X(X-1)\cdots(X-n+1)$.

**b.** Montrer que, $\forall k \in [\![0;n-1]\!],\ (-1)^k P_n(k)$ a le même signe que $P_n(0)$ et que $P_n(n-1) < 0$ et $P_n(n) < 0$.

**c.** En déduire que $A_n$ admet $n$ valeurs propres réelles distinctes.

**4.258** *Mines PSI 2024* Guilhem Thébault I

Soit $N \geqslant 2$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{N} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \frac{2}{N} & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{N-1}{N} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{N} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$.

**a.** Identifier un endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}_N[X]$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_N[X]$.

**b.** En déduire que $A$ est diagonalisable et donner ses éléments propres.

**4.259** *Mines PSI 2024* Antoine Vergnenègre I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(U,V) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ tel que $UV = VU$ et $V$ nilpotente.

**a.** Montrer que $\det(I_n + M) = 1$ si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente.

**b.** Montrer que $\det(U+V) = \det(U)$ si $U$ est inversible.

**c.** Montrer que $\det(U+V) = \det(U)$. Indication : montrer que $\ker(U)$ est stable par $V$.

**4.260** *CCINP PSI 2024* Amélia Arangoits II

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $f$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A$.

**a.** Donner au moins une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité d'un endomorphisme sur un espace vectoriel de dimension fini.

**b.** Donner les valeurs propres de $A$.

**c.** La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?

**d.** Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$.

**4.261** *CCINP PSI 2024* Edward Bauduin II

Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ vérifiant (1) : $M^3 - 4M = 0$ et $\mathrm{Tr}(M) = 0$.

**a.** Montrer que les valeurs propres de $M$ sont des racines de $P = X^3 - 4X$.

**b.** En déduire toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ vérifiant (1).

**4.262** *CCINP PSI 2024* Amjad Belmiloud I

**a.** Étudier la diagonalisabilité de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\dim(\ker(A)) = 2$. On pose $B = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

**b.** Calculer $\chi_C$ en fonction de $\chi_A$. En déduire $\mathrm{Sp}(C)$ en fonction de $\mathrm{Sp}(A)$.

**c.** On suppose $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ et $\alpha + \beta = \gamma$. Calculer $\chi_B$ en fonction de $\chi_A$, puis $\mathrm{Sp}(B)$ en fonction de $\mathrm{Sp}(A)$.

**d.** Montrer que si $X \in \mathrm{Ker}\,(A)$, alors $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(B)$. En déduire que $\dim(\ker(B)) \geqslant 2\dim(\ker(A))$.

**e.** Diagonaliser $B$ pour $\alpha = 1$, $\beta = 2$ et $\gamma = 3$.

**4.263** *CCINP PSI 2024* Martin Mayot I

Soit $n \geqslant 1$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

**a.** Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $U$ et $V$ des matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $Q(U)$ et $Q(V)$ sont semblables.

**b.** Soit $k \in \mathbb{N}$, calculer $M^k$.

**c.** Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, donner une expression de $P(M)$ en fonction de $A$, $P(A)$ et $P'(A)$.

**d.** Montrer que si $M$ est diagonalisable, alors $A$ l'est aussi.

**e.** Étudier la réciproque si $A$ est inversible.

**f.** Montrer que si $M$ est diagonalisable et $A$ n'est pas inversible, alors $A = 0$.

**4.264** *CCINP PSI 2024* Jasmine Meyer II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 - A^2 + A - I_n = 0$.

**a.** Montrer que les valeurs propres de $A$ sont des racines de $P = X^3 - X^2 + X - 1$.

**b.** Calculer $\det(A)$.

**c.** Prouver que $\mathrm{Tr}\,(A) \in \mathbb{N}$.

**4.265** *CCINP PSI 2024* Tom Sanchez II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ et $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AU = UB$ et $U \neq 0$.

**a.** Montrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifie $P(A) = 0$, alors $\mathrm{Sp}(A)$ est inclus dans l'ensemble des racines de $P$.

**b.** Montrer que $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)U = UP(B)$.

**c.** En déduire $A$ et $B$ possèdent une valeur propre commune.

**d.** Montrer que si deux matrices $C, D$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ont une valeur propre commune, il existe une matrice non nulle $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $CM = MD$.

**4.266** *Mines-Télécom PSI 2024* Clément Lacoste II

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 5 & 9 \end{pmatrix}$.

**a.** Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de $A$.

**b.** Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$, montrer que les vecteurs propres de $A$ sont aussi des vecteurs propres de $M$. La matrice $M$ est-elle diagonalisable ?

**c.** Donner toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

**4.267** *Mines-Télécom PSI 2024* Romane Mioque I

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de $E$ et $u = \sum_{k=1}^{n} e_k$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall i \in [\![1; n]\!],\ f(e_i) = e_i + u$.

**a.** Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de $f$.

**b.** L'endomorphisme $f$ est-il diagonalisable ?

**c.** Déterminer la valeur de $\det(f)$ et $\mathrm{Tr}\,(f)$.

**4.268** *Centrale Maths1 PSI 2025* Esther Barthou

Soit $a \in \mathbb{C}$, on dit que $a$ est un nombre algébrique s'il existe un polynôme $P$ non nul à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tel que $P(a) = 0$. Soit $b = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

**a.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ et $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer que $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(M)$.

**b.** Montrer que $b$ est algébrique.

**c.** Soit $z$ une racine de $X^2 + bX + 1$, trouver une matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Z})$ telle que $z$ est valeur propre de $M$ associée au vecteur propre $X$ tel que $X^T = (1 \quad b \quad z \quad bz)$. En déduire que $z$ est un nombre algébrique.

**d.** Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $a$ racine de $X^3 + 2X^2 + X + 3$, trouver $P \neq 0 \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(a^2 + a - 1) = 0$.

**4.269** *Mines PSI 2025* Lilian Agenais II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A$ et $B$ deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**a.** Montrer que si $B$ est diagonalisable, alors $A$ l'est aussi.

**b.** $A$ et $B$ ont-elles les mêmes valeurs propres ?

**c.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

**4.270** *Mines PSI 2025* Simon Latxague II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0; n-1]\!]$, on note $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

Pour tout $p \in [\![0; n-1]\!]$, on définit le vecteur $u_p$ de $E = \mathbb{C}^n$ par $u_p^T = (\omega_0^p\ \omega_1^p\ \cdots\ \omega_{n-1}^p)$.

**a.** Montrer que $(u_0, \cdots, u_{n-1})$ est une base de $E$.

**b.** Diagonaliser la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Soit, pour $(a_0, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, la matrice circulante $C(a_0, \cdots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$.

**c.** La matrice $C(a_0, \cdots, a_{n-1})$ est-elle diagonalisable ? Donner son spectre.

**4.271** *Mines PSI 2025* Finlay Menzies I

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à $A$.

**a.** Montrer que $f$ n'est pas diagonalisable.

**b.** Montrer qu'il n'y a aucune droite de $\mathbb{R}^4$ stable par $f$.

**c.** Montrer qu'il n'y a aucun hyperplan de $\mathbb{R}^4$ stable par $f$.

**d.** Montrer que $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$ et $\mathrm{Ker}(f^2 + 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$ sont des plans stables par $f$.

**e.** Trouver tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^4$ stables par $f$.

**4.272** *Mines PSI 2025* Timéo Nivelle I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_{i,i} = i$ et $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$.

On note $P_n$ le polynôme caractéristique de $A_n$.

**a.** Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ P_{n+1} = (X-n)P_n - X(X-1)\cdots(X-n+1)$.

**b.** Montrer que, $\forall k \in [\![0;n-1]\!],\ (-1)^k P_n(k)$ a le même signe que $P_n(0)$ et que $P_n(n-1) < 0$ et $P_n(n) < 0$.

**c.** En déduire que $A_n$ admet $n$ valeurs propres réelles distinctes.

**4.273** *Mines PSI 2025* Étienne Offant I

Soit $\Phi : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_4[X]$ défini par $\Phi(P) = X^2\big(P'(X+1) - P'(X)\big)$.

**a.** Montrer que $\Phi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$. Trouver son noyau.

**b.** Déterminer la matrice de $\Phi$ dans la base canonique. Quelles sont les valeurs propres de $\Phi$ ?

**c.** Montrer que $F = X^2\,\mathbb{R}_2[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ stable par $\Phi$.

**d.** Établir que $\mathbb{R}_4[X] = \mathrm{Ker}(\Phi) \oplus F$.

**e.** L'endomorphisme $\Phi$ est-il diagonalisable ? Donner ses éléments propres.

**4.274** *Mines PSI 2025* Noah Seguin I

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que : $A$ diagonalisable $\iff (\forall Q \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}_0[X],\ \exists M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ Q(M) = A)$.

**4.275** *Mines PSI 2025* Judith Todero II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$.

**a.** Exprimer les éléments propres de $B$ en fonction de ceux de $A$.

**b.** Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $B$ soit diagonalisable.

**4.276** *CCINP PSI 2025* Amjad Belmiloud II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $AB - BA = B$.

**a.** Montrer que $\mathrm{Tr}\,(B) = 0$ et que $B \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

**b.** Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ AB^k - B^kA = kB^k$.

**c.** Montrer que $B$ est nilpotente.

**4.277** *CCINP PSI 2025* Étienne Offant II

Soit un entier $n \geqslant 3$ et $A \neq 0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + 9A = 0$.

**a.** Montrer que le spectre de $A$ est inclus dans $\{0, 3i, -3i\}$.

**b.** La matrice $A$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ?

**c.** La matrice $A$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ?

**d.** Si $n$ est impair, justifier que $A$ n'est pas inversible.

**4.278** *CCINP PSI 2025* Anthony Peillex II

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

**a.** Déterminer le spectre réel de $A_\alpha$.

**b.** Étudier la diagonalisabilité de $A_\alpha$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ en fonction des valeurs de $\alpha$.

**4.279** *Mines-Télécom PSI 2025* Ana Galharret II

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**a.** Déterminer le rang de $A$.

**b.** Étudier la diagonalisabilité de $A$ en donnant ses éléments propres.

**c.** Calculer $A^p$ pour $p \in \mathbb{N}$.

**4.280** *Navale PSI 2025* Timéo Nivelle I

Soit un entier $n \geqslant 2$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{rang}(A) = 2$, $\operatorname{Tr}(A) = 0$ et $A^n \neq 0$.

Montrer que $A$ est diagonalisable.

## 4.5 Officiel de la Taupe

**4.281** *OdlT 2012/2013 Centrale PSI planche 123II*

Donner quelques exemples de matrices carrées d'ordre $n$ dont les éléments diagonaux correspondent aux valeurs propres avec leur ordre de multiplicité.

Déterminer les matrices $A = \begin{pmatrix} \alpha + 1 & 0 & \alpha \\ 12 & 3 & 7 \\ \alpha - 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ vérifiant cette propriété notée $(P)$.

Montrer qu'une matrice symétrique réelle vérifie cette propriété si et seulement si elle est diagonale.

**4.282** *OdlT 2012/2013 CCP PSI planche 208II*

Soit $A$ une matrice carrée réelle de taille 2, non nulle et telle que ${}^tA = A^2$. Déterminer un polynôme annulateur de $A$. Montrer que si $0$ est valeur propre de $A$, alors elle est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**4.283** *OdlT 2012/2013 CCP PSI planche 210II*

On veut montrer par récurrence que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $\operatorname{Tr}(A^k) = 0$ alors $A^n = 0$.
Soit $A$ une telle matrice avec $n \geqslant 2$, en calculant $\chi_A(A)$, montrer que $0$ est valeur propre de $A$.
Montrer que $A$ est semblable à une matrice $A'$ dont la dernière colonne est nulle. On note $B$ la matrice obtenue en supprimant la dernière colonne et la dernière ligne de $A'$. Conclure.

**4.284** *OdlT 2012/2013 Ensam PSI planche 242I*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A$ l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels $F$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des matrices diagonalisables. Calculer $d = \underset{F \in A}{\text{Sup}} \left( \dim F \right)$.

**4.285** *OdlT 2013/2014 X-Cachan PSI planche 73*

On note $D_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables. Pour $D$ diagonale de coefficients diagonaux $d_1, \cdots, d_n$ (dans cet ordre), on note $\exp(D)$ la matrice diagonale de coefficients diagonaux $e^{d_1}, \cdots, e^{d_n}$ (dans cet ordre).
Si $M = PDP^{-1}$ est diagonalisable, on note $\exp(M) = P \exp(D) P^{-1}$. Montrer que exp est bien définie sur $D_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire que $PDP^{-1} = QD'Q^{-1} \Longrightarrow P \exp(D)P^{-1} = Q \exp(D')Q^{-1}$.
Pour $M \in D_n(\mathbb{C})$, soit $g : t \mapsto \exp(tM)$. Montrer que $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Si $(M, N, R) \in D_n(\mathbb{C})^2 \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $Y(t) = \exp(tM) R \exp(tN)$, montrer $Y(t) - R = M \int_0^t Y(s)ds + \left( \int_0^s Y(s)ds \right) N$.

On pose $||A|| = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|$. Montrer que $||AB|| \leqslant ||A||\,||B||$.

On suppose les valeurs propres de $M$ et $N$ à parties réelles strictement négatives. Montrer que $\lim_{t \to +\infty} Y(t) = 0$ et que $\int_0^t Y(s)ds$ admet une limite finie quand $t$ tend vers $+\infty$. Montrer que $\exists ! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ MX + XN = R$.

**4.286** *OdlT 2013/2014 Mines PSI planche 190I*

Soit $f$ un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$.
Si $\text{rang}\,(f) = 2$, donner son polynôme caractéristique en fonction de $\text{Tr}\,(f)$ et $\text{Tr}\,(f^2)$.
Si $\text{rang}\,(f) = 3$, le donner en fonction de $\text{Tr}\,(f)$, $\text{Tr}\,(f^2)$ et $\text{Tr}\,(f^3)$.

**4.287** *OdlT 2013/2014 CCP PSI planche 247I*

Décomposer $A$, matrice carrée complexe de rang 1, comme produit d'une matrice colonne et d'une matrice ligne. En déduire que $A^2 = \text{Tr}\,(A)A$. Trouver le polynôme caractéristique de $A$. À quelle condition $A + I_n$ est-elle inversible ? Calculer alors son inverse.

**4.288** *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 156I* (Mathias)

**a.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \notin \text{Sp}(A)$. Montrer que $(A - \lambda I_n)^{-1}$ est un polynôme en $A$.

**b.** Soit $k \in \mathbb{N}^*$ le degré d'un polynôme annulateur de $A$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ des complexes qui ne sont pas dans le spectre de $A$. Montrer qu'il existe une famille de complexes $(c_1, \cdots, c_k)$ telle que $\sum_{i=1}^{k} c_i (A - \lambda_i I_n)^{-1} = I_n$.

**4.289** *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 157I*

**a.** Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de coefficients $a_{i,j} = \text{Min}(i, j)$, trouver une matrice $L$, triangulaire inférieure, n'ayant que des 1 sur la diagonale, et une matrice $U$, triangulaire supérieure, telle que $A = LU$.

**b.** Exprimer $A^{-1}$ en fonction de $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $n_{i,j} = 1$ si $j = i + 1$ et 0 sinon.

**c.** Montrer que le spectre de $A^{-1}$ est inclus dans $[1; 4]$.

**4.290** *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 160I*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et la propriété $\mathcal{P}$ : "$\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ \det(\lambda A - M) \neq 0$".
La propriété est-elle vraie pour $A$ inversible ? Est-elle vraie pour $A$ non inversible ?

**4.291** *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 163II*

**a.** À quelle(s) condition(s) $M = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

**b.** Montrer que, dans ce cas, pour tout $n$, $M^n$ est combinaison linéaire de $M$ et $I_4$.

**4.292** *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 170III*

**a.** Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**b.** En déduire que pour $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$, les polynômes caractéristiques de $AB$ et $BA$ sont identiques.

**4.293** *OdlT 2014/2015 Centrale PSI planche 224I*

**a.** Montrer que : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \forall x \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{x} P(t)e^t dt$ converge.

**b.** Montrer que $L$ tel que $L(P)(x) = e^{-x}\int_{-\infty}^{x} P(t)e^t dt$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Est-il diagonalisable ?

**4.294** *OdlT 2014/2015 PSI Centrale planche 233I*

On note $r$ l'application qui fait tourner d'un angle $\frac{\pi}{2}$ le coefficient $(i, j)$ d'une matrice autour de son centre.

Par exemple $r(1, n) = (1, 1)$. Si $A$ est une matrice carrée, complexe de taille $n$ de coefficients $a_{i,j}$, on note $R(A)$ la matrice obtenue après rotation et $b_{i,j}$ ses coefficients.

Montrer que $R$ est un isomorphisme diagonalisable et trouver ses valeurs propres.

**4.295** *OdlT 2014/2015 Centrale PSI planche 233II*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à valeurs propres strictement positives et telle que $\{A^p \mid p \in \mathbb{Z}\}$ est bornée.

Montrer que $Sp(A) = \{1\}$ puis que $A = I_n$.

**4.296** *OdlT 2014/2015 Centrale PSI planche 239II*

On donne $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ des réels deux à deux distincts, $u$, $\nu_1, \cdots, \nu_p$ des endomorphismes non nuls d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ tels que $\forall n \in [\![0; p]\!],\ u^n = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^n \nu_k$.

**a.** Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ P(u) = \sum_{k=1}^{p} P(\lambda_k)\nu_k$.

**b.** En déduire que $u$ est diagonalisable.

**c.** Montrer que $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de $u$ et déterminer l'idéal annulateur de $u$.

**d.** Montrer que les $\nu_k$ sont les projecteurs associés à la décomposition $E = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(u - \lambda_k \mathrm{id}_E)$.

**4.297** *OdlT 2014/2015 Centrale PSI planche 243II*

Trouver $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 4A^2 + 4A = 0$ et $\mathrm{Tr}\,(A) = 2$.

**4.298** *OdlT 2014/2015 Centrale PSI planche 245II*

**a.** Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $B = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$.

**b.** Montrer que $B$ est diagonalisable si et seulement si $A$ l'est aussi.

**c.** Pour $n = 2$, exprimer les vecteurs propres de $B$ en fonction de ceux de $A$.

**4.299** *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 274I*

$f$, définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(M) = M - \mathrm{Tr}\,(M)I_n$, est-elle linéaire ? Est-elle diagonalisable ?

**4.300** *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 275II*

Montrer que $f$ qui à $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associe $\begin{pmatrix} d & 2b \\ 2c & a \end{pmatrix}$ est un endomorphisme et déterminer ses valeurs propres.

$f$ est-il diagonalisable ? Inversible ?

**4.301** *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 278II*

On cherche $M \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + {}^tM = I_n$. Trouver un polynôme annulateur de degré 4 de $M$. Montrer que $M - I_n$ est inversible et conclure.

**4.302** *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 283*

**a.** $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? (on calculera $C_1 - C_2 - C_3$) ?

**b.** Trouver ses éléments propres.

**c.** Trouver $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$. Montrer que les matrices $R$ qui conviennent sont diagonalisables.

**4.303** *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 288II*

Trouver les valeurs propres de la matrice réelle, carrée, de taille $n$ qui a $1, 2, \cdots, n$ sur la dernière ligne et la dernière colonne et des $0$ partout ailleurs.

**4.304** *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 292II*

Soit $f$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension $n$, ayant $n$ valeurs propres distinctes.

**a.** Montrer que si $g$ commute avec $f$, tout vecteur propre de $f$ est vecteur propre de $g$ et en déduire qu'il existe un base de vecteurs propres commune à $f$ et $g$.

**b.** Montrer l'existence et l'unicité de $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $g = P(f)$.

**4.305** *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 293I*

**a.** Soit $M \in GL_k(\mathbb{C})$. Montrer que si $M^2$ est diagonalisable, alors $M$ l'est aussi.

**b.** Soit $(A, B) \in GL_n(\mathbb{C})^2$. Montrer que $N = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ est inversible.

**c.** Calculer $N^2$ et en déduire que $N$ est diagonalisable si et seulement si $AB$ l'est.

**4.306** *OdlT 2014/2015 ENSAM PSI planche 322II*

$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ? Sur $\mathbb{C}$ ?

**4.307** *OdlT 2014/2015 ENTPE-EIVP PSI planche 324I*

Déterminer les éléments propres de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $a_{n,j} = 1$ si $j \leqslant n-1$, $a_{i,n} = -1$ si $i \leqslant n-1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon. Est-elle diagonalisable ?

**4.308** *OdlT 2014/2015 ENSEA-ENSIIE PSI planche 327II*

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $A^3 + A - I_n = 0$, est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ? Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ?
Montrer que $\det(A) > 0$.

**4.309** *OdlT 2015/2016 X-Cachan PSI planche 42*

Pour $A$ et $B$ des polynômes fixés de $\mathbb{R}[X]$, avec $\deg(B) = n+1$, on note $\Phi$ l'application qui, à $P \in \mathbb{R}_n[X]$, associe le reste de la division euclidienne de $AP$ par $B$.

Montrer que si $A$ et $B$ sont premiers entre eux, $\phi$ est un isomorphisme.

On suppose $B$ scindé à racines simples ; trouver les valeurs propres de $\Phi$. Est-il diagonalisable ?

On choisit $A = aX^{p+1} - (a+1)X^p + 1$ et $B = (1-X)^2$ ; $\Phi$ est-il diagonalisable ?

**4.310** *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 118II*

Montrer que, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^3 = A + I_n$, alors $\det(A) > 0$.

**4.311** *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 123II*

On note $P$ l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Pour $T > 0$, justifier la légitimité de l'endomorphisme $u$ défini sur $P$ par : $u(f)(x) = \frac{1}{T}\int_x^{x+T} f(t)dt$. Montrer que $u \in GL(P)$ et donner son spectre.

**4.312** *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 127III*

Soient $A$ et $B$ deux matrices réelles, carrées d'ordre 2 telles qu'il existe trois réels $a$, $b$, $c$ vérifiant la relation $AB = aI_2 + bA + cB$ ; montrer qu'il existe trois réels $x$, $y$, $z$ tels que $BA = xI_2 + yA + zB$.

**4.313** *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 131I*

Montrer que $\lambda$ est valeur propre de la matrice $A$ dont les coefficients diagonaux sont $1, 2, \cdots, n$ et tous les autres valent 1, si et seulement si $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda - k} = 1$. En déduire que $A$ admet $n$ valeurs propres distinctes.

**4.314** *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 133III*

Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme $T$, défini sur l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et admettant une limite finie en $+\infty$, par $T(f)(x) = f(x+1)$.

**4.315** *OdlT 2015/2016 Centrale PSI planche 178*

Soient $u$ et $v$ deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie.
Montrer que si $u \circ v = 0$, $u$ et $v$ ont un vecteur propre commun (on étudiera d'abord le cas où $u$ est injectif).
Montrer que si $u \circ v \in Vect(u, v)$, $u$ et $v$ ont un vecteur propre commun, puis qu'il existe une base $B$ dans laquelle $u$ et $v$ ont des matrices triangulaires supérieures.

**4.316** *OdlT 2015/2016 Centrale PSI planche 183*

Calculer $D(t) = \begin{vmatrix} a+t & c+t & \cdots & c+t \\ b+t & a+t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c+t \\ b+t & \cdots & b+t & a+t \end{vmatrix}$ où $b \neq c$ et $bc \neq 0$. En déduire le polynôme caractéristique de $M = \begin{pmatrix} a & c & \cdots & c \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$. Donner les valeurs propres de $M$ ; est-elle diagonalisable ?

**4.317** *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 233I*

Montrer qu'un endomorphisme de rang 1 d'un espace vectoriel de dimension finie est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.

**4.318** *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 237II*

Soient $x_0 \in E \setminus \{0_E\}$ et $\Phi$ une forme linéaire non nulle de $E$, $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Montrer que $u$, défini par $u(x) = x + \Phi(x)x_0$ est un endomorphisme admettant 1 pour valeur propre.

Donner la dimension de $Ker(u - id_E)$ puis une CNS pour que $u$ soit diagonalisable.

**4.319** *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 241II*

Montrer que $\Phi$, défini par $\Phi(M) = M + \mathrm{Tr}\,(M)I_n$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, dont on donnera le noyau et le rang. Trouver un polynôme annulateur de degré 2 annulateur de $\Phi$.

$\Phi$ est-il diagonalisable ? Bijectif ? Si oui, calculer $\Phi^{-1}$.

**4.320** *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 242I*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(A)$ est triangulaire à coefficients diagonaux 2 à 2 distincts ; montrer que $A$ est diagonalisable.

**4.321** *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 243I*

Soit $n \geqslant 3$, montrer que $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, constituée de 1 sur la diagonale, la première et la dernière colonne et des 0 partout ailleurs est diagonalisable et trouver ses éléments propres.

**4.322** *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 244II*

Montrer que $M \in GL_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable ssi $M^2$ l'est. Est-ce toujours vrai si $M$ n'est pas inversible ?

**4.323** *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 245I*

Soit $f$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^4 = f^2$ et dont 1 et $-1$ sont valeurs propres ; montrer que $Sp(f) \subset \{-1, 0, 1\}$ (on n'utilisera pas directement que le spectre est inclus dans l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur). Montrer que $f$ est diagonalisable.

**4.324** *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 247II*

On note $E$ l'ensemble des fonctions $C^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $\Phi$ défini par $\Phi(f)(x) = f'(x) - xf(x)$ est un endomorphisme de $E$.

Déterminer ses valeurs propres, ses sous-espaces propres et $\mathrm{Ker}(\Phi^2)$.

**4.325** *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 248I*

Justifier que $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et donner une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ de vecteurs propres de $A$. Donner une CNS sur $(u_0, v_0, w_0)$ pour que les trois suites $(u_n)$, $(v_n)$, $(w_n)$ vérifiant la récurrence couplée $\begin{cases} u_{n+1} &= -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} &= u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} &= u_n + v_n - w_n \end{cases}$ convergent.

**4.326** *OdlT 2015/2016 ENSAM PSI planche 272I* Dire, suivant $z \in \mathbb{C}$, si $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Calculer $M^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $z = 0$. Donner les éléments propres de $M$ pour $z = e^{i\theta}$.

**4.327** *OdlT 2015/2016 ENSAM PSI planche 274II*

Pour $f$ continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, on pose $T(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ si $x > 0$ et $T(f)(0) = f(0)$.

Montrer que $f$ est un endomorphisme de l'espace $E$ des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

Est-il surjectif ? Injectif ? Donner ses éléments propres.

**4.328** *OdlT 2015/2016 ENTPE-EIVP planche 279II*

Pour $a \in \mathbb{R}$, donner les valeurs et vecteurs propres de $u$ défini sur $\mathbb{R}[X]$ par $u(P)(X) = (X-a)P'(X)$.

Trouver l'ensemble des polynômes divisibles par leur dérivée.

**4.329** *OdlT 2015/2016 Télécom SudParis planche 284I*

Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1, il existe $(U,V) \in (\mathbb{R}^n)^2$ tels que $A = U\,{}^tV$.

Montrer que $A$ est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}\,(A) \neq 0$. Trouver le polynôme minimal de $A$.

**4.330** *OdlT 2016/2017 X/Cachan PSI planche 36II*

Trouver une CNS sur $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour que $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

**4.331** *OdlT 2016/2017 X/Cachan PSI planche 36III*

Résoudre $B^2 = N = \begin{pmatrix} -1 & x & y \\ 0 & -1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

**4.332** *OdlT 2016/2017 X/Cachan PSI planche 40II*

Soit $E$ un espace de dimension fini, $f$, $g$ deux endomorphismes de $E$ de matrices $A$, $B$ dans la base $\mathcal{B}$ de $E$.
**a.** Montrer que $AB$ et $BA$ ont même polynôme caractéristique.
**b.** Si $\lambda \in Sp(AB)$, on note $E_\lambda$ (resp. $F_\lambda$) le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda$ de $AB$ (resp. de $BA$). Montrer que $g(E_\lambda) \subset F_\lambda$ et que $f(F_\lambda) \subset E_\lambda$. En déduire que $E_\lambda$ et $F_\lambda$ ont même dimension si $\lambda \neq 0$.
**c.** Montrer que si $f \circ g$ est diagonalisable et si $\mathrm{rang}\,(f \circ g) = \mathrm{rang}\,(g \circ f)$, alors $g \circ f$ l'est aussi.
**d.** Trouver deux matrices $X$ et $Y$ telles que $XY$ soit diagonalisable mais pas $YX$.

**4.333** *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 107II*

Déterminer le polynôme caractéristique de $B = \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ en fonction de celui de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que, si $A$ est diagonalisable, $B$ l'est aussi.

**4.334** *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 111II*

Montrer que si $A$ et $B$, carrées, complexes de taille 2 commutent, alors $A$ est un polynôme en $B$ ou $B$ est un polynôme en $A$. Cela reste-t-il vrai pour des matrices de taille 3 ? Pour des matrices réelles ?

**4.335** *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 113I*

Montrer que $D$ défini par $D(f)(x) = xf'(x)$ est un endomorphisme de l'espace des fonctions de classe $C^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Trouver $\mathrm{Ker}\,(D)$ puis ses éléments propres.

**4.336** *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 114II*

Soit $u$ un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace $E$ de dimension finie tel qu'il existe $p$ endomorphismes non nuls $v_1, \dots, v_p$ et $p$ réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ distincts deux à deux vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u^n = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^n v_i$.

Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $P(u) = \sum_{i=1}^{p} P(\lambda_i) v_i$ et que $u$ est diagonalisable. Montrer qu'il existe une base $(L_1, \dots, L_p)$ de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ telle que : $\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2$, $L_i(\lambda_j) = \delta_{ij}$. Montrer que $Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.

**4.337** *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 116II*

Réduire $\phi$ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $\phi(M) = M + \mathrm{Tr}\,(AM)A$ où $A$ est fixée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

**4.338** *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 118I*

Soit $u$ un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie. On suppose que $u$ est diagonalisable, de valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Montrer qu'il existe $p$ endomorphismes $u_1, \dots, u_p$ tels que l'on ait : $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $P(u) = \sum_{i=1}^{p} P(\lambda_i) u_i$. Montrer que $\forall i \in [\![1; p]\!]$, $\exists P_i \in \mathbb{C}[X]$, $P_i(u) = u_i$.
Réciproquement, montrer que si $u$ est un endomorphisme tel qu'il existe $p$ endomorphismes $u_1, \dots u_p$ vérifiant $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $P(u) = \sum_{i=1}^{p} P(\lambda_i) u_i$, alors $u$ est diagonalisable.

**4.339** *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 119I*

Trouver les polynômes annulateurs de $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c \end{pmatrix}$.

**4.340** *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 121II*

Déterminer les classes de similitude de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

**4.341** *OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 173 et compléments Centrale PSI planche 207*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ; on cherche la dimension de $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AMA = 0\}$.
Si $A$ est diagonalisable ; montrer que $\dim E = \dim\{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid DND = 0\}$ où $D$ est une matrice diagonale à expliciter. Donner la dimension de $E$ en fonction du rang de $A$.
Peut-on généraliser au cas où $A$ n'est pas diagonalisable ?

**4.342** *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 203I*

Si $E = \mathbb{R}_n[X]$, déterminer la matrice de $f \in \mathcal{L}(E)$ donné par $f(P)(X) = (X - a)P'(X) + P(X) - P(a)$ dans la base canonique. Donner son noyau, son image, ses éléments propres.

**4.343** *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 208I*

Calculer le rang de $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, puis le rang de $A^2$. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(A)$ et $\mathrm{Im}\,(A)$ sont supplémentaires. En déduire que $A$ est semblable à $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
Donner le spectre de $B$ et en déduire que $A$ est diagonalisable.

**4.344** *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 209II et compléments CCP PSI planche 372II*

Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ ainsi qu'une matrice diagonale $D$ semblable à $A$.
Montrer que si $M$ commute avec $D$, elle est diagonale.
Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^7 + M + I_3 = A$.

**4.345** *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 210II*

Calculer le polynôme caractéristique de $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2-n & n-2 & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Déterminer les sous-espaces propres de $A_3$. Les matrices $A_2$ et $A_1$ sont-elles diagonalisables ?

**4.346** *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 211II abordable dès la 1ère année*

Montrer que $f$, défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f(P)(x) = \int_x^{x+1} P(t)dt$ est un endomorphisme et donner sa trace.

**4.347** *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 214I*

**a.** Montrer que si $M \in GL_k(\mathbb{C})$ est de carré diagonalisable, alors elle est diagonalisable (on pourra montrer qu'il existe un polynôme scindé à racines simples annulant $M$).

**b.** Soit $A$ et $B$ inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$, montrer que $N \in GL_{2n}(\mathbb{C})$.

**c.** Calculer $N^2$ puis, pour $P \in \mathbb{C}[X]$, calculer $P(N^2)$.

**d.** On suppose $N$ diagonalisable, montrer que le produit $AB$ est diagonalisable.

**e.** Qu'en est-il de la réciproque ?

**4.348** *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 218II*

Pour $n$ pair, $n \geqslant 2$, déterminer le rang de $A_n = \begin{pmatrix} 1 & n & 1 & \dots & n \\ 2 & n-1 & 2 & \dots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & n & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Montrer qu'une matrice et sa transposée ont même spectre. Montrer que $A_n$ est diagonalisable, donner ses éléments propres.

**4.349** *OdlT 2016/2017 ENSAM PSI planche 240I*

Que peut-on dire de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commute avec une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont distincts 2 à 2 ? Trouver $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $X^2 - 2X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

**4.350** *OdlT 2016/2017 ENSAM PSI planche 241I*

Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^2 = -I_n$, alors $n$ est pair.
Montrer que si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $B^2 - B + I_n = 0$, alors $n$ est pair.
Montrer que si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $C^3 + C^2 + C = 0$, alors $C$ est de rang pair.

**4.351** *OdlT 2016/2017 ENSAM PSI planche 242I*

À quelle(s) condition(s), nécessaire(s) et suffisante(s), $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & b \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

**4.352** *OdlT 2016/2017 ENSEA PSI planche 251I*

Donner le spectre de la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.
Soit $\phi$ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\phi(A) \in Sp(A)$.
Déterminer $\phi(M)$ quand $M$ est triangulaire et n'a que des 0 sur sa diagonale.
Déterminer $\phi(J)$ et aboutir à une contradiction. Que conclure ?

**4.353** *OdlT 2016/2017 ENSEA PSI planche 252II*

Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace de dimension $n$ et $f \in \mathcal{L}(E)$, tel que $(f - id_E)^3 \circ (f - 2id_E) = 0$ et $(f - id_E)^2 \circ (f - 2id_E) \neq 0$.
L'endomorphisme $f$ est-il diagonalisable ?

**4.354** *OdlT 2017/2018 Mines PSI planche 116II*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et des matrices $A$, $B$ et $C$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**a.** Montrer que si $A$ et $B$ n'ont aucune valeur propre commune, $\exists! M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $AM - MB = C$.

**b.** Qu'en est-il de la réciproque ?

**4.355** *OdlT 2017/2018 Mines PSI planche 118II*

Montrer que $f$, défini par $f(P)(X) = nXP(X) - (X^2-1)P'(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Résoudre $nxy - (x^2-1)y' = \lambda y$ sur $]-1;1[$ et donner les solutions polynomiales.

Réduire $f$, trouver son déterminant et sa trace. Que dire de son rang ?

**4.356** *OdlT 2017/2018 Mines PSI planche 124II*

Éléments propres de $M = (x_i x_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**4.357** *OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 169*

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n$. Donner une relation entre l'ordre de multiplicité d'une valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé.

Qu'est-ce que le polynôme caractéristique ? Donner le théorème de Cayley-Hamilton.

Montrer que si $\chi_u'(0) \neq 0$, alors $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$.

**4.358** *OdlT 2017/2018 CCP PSI planche 215I*

Deux matrices $A$ et $B$ de taille $n \geqslant 2$ possèdent le même spectre.

Sachant que les valeurs propres sont distinctes 2 à 2, montrer qu'elles sont semblables.

Donner 2 matrices possédant les mêmes valeurs propres mais qui ne sont pas semblables.

**4.359** *OdlT 2017/2018 Mines-Télécom PSI planche 252I et 2014/2015 CCP PSI planche 282I et 2015/2016 CCP PSI planche 240II*

Soit $E$ un espace vectoriel et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$.

**a.** Soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre de $v \circ u$. Montrer que $\lambda$ est une valeur propre de $u \circ v$.

**b.** Montrer que si $E$ est de dimension finie, le résultat est encore vrai pour $\lambda = 0$.

**c.** On choisit $E = \mathbb{R}[X]$, $u(P) = P'$ et $v(P) = Q$ où $Q$ est la primitive de $P$ s'annulant en 0.

Calculer $\mathrm{Ker}(v \circ u)$ et $\mathrm{Ker}(u \circ v)$. Conclure.

**4.360** *Compléments OdlT 2017/2018 CCP PSI planche 442I et compléments Mines-Télécom PSI planche 574I*

Donner le rang et une base de l'image de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficient $a_{i,j} = \dfrac{i}{j}$. En déduire une valeur propre de $A$ et le sous-espace propre associé. Montrer que $A$ est diagonalisable et donner ses éléments propres.
Déterminer $P$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D$ diagonale. Montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M$ commute avec $A$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ sont stables par $M$. En déduire la dimension du commutant de $A$.

**4.361** *Compléments OdlT 2017/2018 CCP PSI planche 454II*

Existe-t-il $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}\, A = 0$ et $A^2 + {}^tA = I_3$ (on pourra chercher un polynôme annulateur de $A$ et montrer que les valeurs propres de $A$ en sont racines) ?

**4.362** *Compléments OdlT 2017/2018 Mines-Télécom PSI planche 566I*

Montrer que $f : P \mapsto X(1+X)P' - nXP$, est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dont on donnera les éléments propres.

**4.363** *Compléments OdlT 2017/2018 Mines-Télécom PSI planche 569II*

Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^5 + A = I_n$, alors $\det(A) > 0$.

**4.364** *Compléments OdlT 2017/2018 ENSEA PSI planche 580II*

Montrer que si $f$, $u$ et $v$ sont trois endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel vérifiant :
$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\forall i \in [\![1;3]\!]$, $f^i = \alpha^i u + \beta^i v$, alors $f$ est diagonalisable.