Correction du DS3

Exercice : (Inspiré de E3A PC 2016 maths 2)
Partie I

1. a) φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty,1[$ par opérations et, par une récurrence simple, si $k \geqslant 1$, $\boxed{\varphi^{(k)}(x) = \dfrac{(k-1)!}{(1-x)^k} \text{ si } x<1}$

b) Si $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, on a $|\varphi^{(n+1)}(x)| \leqslant 2^{n+1}n!$ et, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $\varphi^{(k)}(0) = (k-1)!$ donc, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à l'ordre n à la fonction φ entre 0 et $\dfrac{1}{2}$, on a $\left|\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{2^k k!}\right| \leqslant \dfrac{2^{n+1}n!}{2^{n+1}(n+1)!}$

donc $\left|\ln(2) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k}\right| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc, par encadrement, $\boxed{\ln(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}}$

2. a) $\dfrac{1}{k(k+1)2^k} \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$ donc, par Riemann, $\boxed{\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k(k+1)2^k} \text{ est absolument convergente donc convergente}}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)2^{k+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j2^j} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} - \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{j2^j}$ donc d'après **I.1.b**, on a $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k} = \frac{1}{2} - \left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right) = 1 - \ln(2)}$

3. a) La suite $\left(\dfrac{1}{k}\right)_{k\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0 donc, par CSSA, la série alternée $\boxed{\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \text{ converge}}$

b) Si on pose $u_n = H_n - \ln(n)$, pour $n \geqslant 2$, on a $u_n - u_{n-1} = \dfrac{1}{n} + \ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(u_n - u_{n-1})$ converge absolument par Riemann. Par dualité suite-série, la suite $(H_n - \ln(n))_{n\geq 1}$ converge d'où l'existence de $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\boxed{H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).}$

c) Pour $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = H_{2n} - H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(2n) - \ln(n) + o(1) \underset{n\to+\infty}{=} \ln(2) + o(1)$ donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)}$

Partie II

1. a) Pour $n \geqslant 0$, en posant $j = i - n - 1$ on a $\boxed{U_n = 2^{-(n+1)} \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{2^{-(n+1)}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}}$

b) On a $\dfrac{1}{2^k} = U_{k-1} - U_k$ donc $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{U_{k-1}}{k} - \frac{U_k}{k}\right)$. La série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{U_k}{k}$ étant convergente, on en déduit que $R_n = \displaystyle\sum_{j=n}^{+\infty} \frac{U_j}{j+1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k}$ et $\boxed{R_n = \dfrac{U_n}{n+1} - \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)}}$ car $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{k(k+1)}$ *Ou récurrence sur n.*

c) Si $k \geqslant n+1$, on a $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{n+2}$ donc $\dfrac{U_k}{k(k+1)} \leqslant \dfrac{1}{n+2} \times \dfrac{U_k}{k}$, ce qui donne, en sommant ces inégalités et avec la convergence des séries, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)} \leqslant \frac{R_n}{n+2}}$ sachant que $U_k = \dfrac{1}{2^k}$.

d) Comme $R_n = \dfrac{1}{(n+1)2^n} - \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)}$ et que **II.1.c** donne $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{R_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o(R_n)$, avec **II.1.a**, $R_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{(n+1)2^n} + o(R_n)$ donc $\dfrac{1}{(n+1)2^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} R_n$ ou $\boxed{R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n2^n}}$

2. a) La convergence des séries étant déjà établie, avec $j=k+1$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=S_n+\sum_{j=n+2}^{+\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j}$

donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=2S_n+\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}}$

b) Comme $\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{1}{k(k+1)}$, la suite $\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)_{k\geqslant 1}$ tend vers 0 en décroissant donc d'après le CSSA, on a $\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}\right|\leqslant\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ donc $\boxed{\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right|\leqslant\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}}$

c) Avec **II.2.a** et **II.2.b**, on a $2S_n\underset{n\to+\infty}{=}\dfrac{(-1)^n}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\underset{n\to+\infty}{=}\dfrac{(-1)^n}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc $\boxed{S_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{(-1)^n}{2n}}$

3. $T_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{U_{k-1}-U_k}{k(k+1)}=\sum_{j=n}^{+\infty}\frac{U_j}{(j+1)(j+2)}-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{U_k}{k(k+1)}=\frac{U_n}{(n+1)(n+2)}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{U_k}{(k+1)(k+2)}-\frac{U_k}{k(k+1)}\right)$

et $\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}U_k\left(\frac{1}{(k+1)(k+2)}-\frac{1}{k(k+1)}\right)\right|=2\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{U_k}{k(k+1)(k+2)}\leqslant\frac{2}{n+3}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{U_k}{k(k+1)}=\frac{2T_n}{n+3}$. On a

donc $T_n\underset{n\to+\infty}{=}\dfrac{1}{(n+1)(n+2)2^n}+O\left(\dfrac{T_n}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{=}\dfrac{1}{(n+1)(n+2)2^n}+o\left(T_n\right)$ et $\boxed{T_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n^2 2^n}}$

C'est la convergence la plus rapide des trois !

Problème : (d'après de Mines-Ponts PSI 2025 maths 1)

Partie I

1. a) $\mathcal{X}_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & \alpha-1\\ -\alpha^2 & \lambda-1-\alpha^2 & 1-\alpha\\ -\alpha^2 & -\alpha^2 & \lambda-\alpha\end{vmatrix}\underset{C_2\leftarrow C_2-C_1}{\overset{L_1\leftarrow L_1+L_2}{=}}(\lambda-\alpha^2)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -\alpha^2 & \lambda-1 & 1-\alpha\\ -\alpha^2 & 0 & \lambda-\alpha\end{vmatrix}=(\lambda-\alpha^2)\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1-\alpha\\ 0 & \lambda-\alpha\end{vmatrix}$ donc

$\boxed{\mathcal{X}_A=(X-1)(X-\alpha)(X-\alpha^2)}$ *Le résultat étant donné dans le texte, on pouvait aussi développer le déterminant et vérifier la factorisation à trouver.*

b) Si $\alpha\notin\{-1,0,1\}$, $\mathcal{X}_A$ est scindé à racines simples donc A est diagonalisable.

Si $\alpha=0$ alors $\mathcal{X}_A=X^2(X-1)$ donc A est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_0(A))=2$. Dans ce cas, $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg}(A)=1$ et, par théorème du rang, $\dim(E_0(A))=2$; A est donc diagonalisable.

Si $\alpha=1$ alors $\mathcal{X}_A=(X-1)^3$ donc si A était diagonalisable, elle serait semblable à I_3 donc on aurait $A=PI_3P^{-1}=I_3$, ce qui n'est pas le cas.

Si $\alpha=-1$ alors $\mathcal{X}_A=(X-1)^2(X+1)$ donc A est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_1(A))=2$. On a $A-I_3=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\1&1&-2\\1&1&-2\end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg}(A-I_3)=1$ et $\dim(E_1(A))=2$: A est donc diagonalisable.

On a donc $\boxed{A\text{ est diagonalisable si et seulement si }\alpha\neq 1}$

2. Si $\alpha\neq 0$ alors $0\notin\mathrm{Sp}(A)$ donc $\boxed{A\text{ est inversible}}$

3. a) Si $\alpha\neq 1$ alors A est diagonalisable et semblable à $\mathrm{diag}(1,\alpha,\alpha^2)$, même si $\alpha=0$ car alors $0=\alpha=\alpha^2$ est racine double et même si $\alpha=-1$ car alors $1=\alpha^2$ est racine double, donc $\boxed{B\text{ est semblable à }D=\mathrm{diag}\left(\dfrac{1}{\alpha},1,\alpha\right)}$

b) $D^{-1}=\mathrm{diag}\left(\alpha,1,\dfrac{1}{\alpha}\right)=PDP^{-1}$ avec $P=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ la matrice de passage de (u_1,u_2,u_3) à (u_3,u_2,u_1).

c) B et D sont semblables, D et D^{-1} aussi. Par transitivité, B^{-1} et D^{-1} le sont donc $\boxed{B\text{ et }B^{-1}\text{ sont semblables}}$

4. a) Si f est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à B, on cherche une base $\mathcal{B}=(v_1,v_2,v_3)$ de $\mathbb{C}^3$ telle que $\begin{cases}(f-id)(v_1)=0\\(f-id)(v_2)=0\\(f-id)(v_3)=v_2\end{cases}$; on doit donc avoir $v_2\in\ker(f-id)\cap\mathrm{Im}(f-id)$.

On vérifie $\ker(B-I_3)\cap\mathrm{Im}(B-I_3)=\mathrm{Im}(B-I_3)=\mathrm{Vect}\{(-1,1,1)\}$, on choisit $v_2=(-1,1,1)$ et $v_3=(1,0,0)$. Comme $v_2\in\ker(f-id)$, reste à compléter (v_2) en une base de $\ker(f-id)=\mathrm{Vect}\{v_2,v_1\}$ avec par exemple

$v_1 = (0,0,1)$. $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base (facile). On pose donc $\boxed{P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$ et on a $B = PTP^{-1}$

b) On a $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = QTQ^{-1}$ avec $Q = \mathrm{diag}(1,1,-1)$ qui est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à la base $(v_1, v_2, -v_3)$. Comme en **I.3.c**, par transitivité de la relation de similitude, $\boxed{B \text{ et } B^{-1} \text{ sont semblables.}}$

c) On vérifie par un simple calcul que $\boxed{S_1^2 = I_3 \text{ donc } S_1 \text{ est une matrice de symétrie}}$

d) S_1 est inversible et $S_1^{-1} = S_1$ donc $B = S_1S_2 \Leftrightarrow S_2 = S_1B$. On calcule $S_2 = S_1B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et on vérifie $S_2^2 = I_3$ donc $\boxed{B \text{ est le produit de deux matrices de symétries}}$

Partie II

1. $\det(zI_n - A) = \det(A)\det\left(zA^{-1} - I_n\right) = z^n \det(A)\det\left(A^{-1} - \dfrac{1}{z}I_n\right) = \boxed{(-1)^n z^n \det(A)\det\left(\dfrac{1}{z}I_n - A^{-1}\right)}$

2. Si A et A^{-1} sont semblables, alors $\det(A) = \det\left(A^{-1}\right)$ donc $\det(A)^2 = \det(A)\det\left(A^{-1}\right) = 1$ donc $\boxed{\det(A) = \pm 1}$

D'après **II.2**, $\mathcal{X}_A(z) = \pm z^n \mathcal{X}_{A^{-1}}\left(\dfrac{1}{z}\right)$ et comme A et A^{-1} sont semblables, $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_{A^{-1}}$ donc $\boxed{\mathcal{X}_A \text{ vérifie } (*)}$

3. a) Le coefficient constant de $\mathcal{X}_B$ est $(-1)^n \det(B)$ et son coefficient dominant est 1. Si $\mathcal{X}_B$ vérifie $(*)$ alors on a $1 = \varepsilon(-1)^n \det(B)$ donc $\det(B) \neq 0$ donc $\boxed{0 \notin \mathrm{Sp}(B)}$

b) Comme $n = \deg(\mathcal{X}_B) = \sum_{k=1}^{r} n_k$, on a $X^n \mathcal{X}_B\left(\dfrac{1}{X}\right) = X^n \prod_{k=1}^{r}\left(\dfrac{1}{X} - \lambda_k\right)^{n_k} = \boxed{\prod_{k=1}^{r}(1 - \lambda_k X)^{n_k}}$

c) Si $\mathcal{X}_B$ vérifie $(*)$ et si $\lambda_k \neq \pm 1$ alors $\dfrac{1}{\lambda_k}$ est aussi une valeur propre de B avec la même multiplicité n_k que λ_k. Si B est diagonalisable, elle est semblable à une matrice $D = \mathrm{diag}\left(I_p, -I_q, \lambda_1 I_{n_1}, \dfrac{1}{\lambda_1}I_{n_1}, \ldots, \lambda_s I_{n_s}, \dfrac{1}{\lambda_s}I_{n_s}\right)$ (avec $p = 0$ ou $q = 0$ si 1 ou -1 ne sont pas valeurs propres de B respectivement et $\lambda_k \neq \pm 1$). On vérifie alors que $D^{-1} = \mathrm{diag}\left(I_p, -I_q, \dfrac{1}{\lambda_1}I_{n_1}, \lambda_1 I_{n_1}, \ldots, \dfrac{1}{\lambda_s}I_{n_s}, \lambda_s I_{n_s}\right) = PDP^{-1}$ avec $P = \mathrm{diag}(I_{p+q}, P_1, \ldots, P_s)$ où $P_k = \begin{pmatrix} 0 & I_{n_k} \\ I_{n_k} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n_k}(\mathbb{C})$. Ainsi, D et D^{-1} sont semblables donc $\boxed{B \text{ et } B^{-1} \text{ sont semblables}}$

4. a) On a $\mathcal{X}_B = (X-2)^2\left(X - \dfrac{1}{2}\right)^2$ donc, si $z \neq 0$, $z^4 \mathcal{X}_B\left(\dfrac{1}{z}\right) = (1-2z)^2\left(1 - \dfrac{z}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2} - z\right)^2 (2-z)^2 = \mathcal{X}_B(z)$.

b) $0 \notin \mathrm{Sp}(B)$ donc $\boxed{B \text{ est inversible}}$

On a $\mathrm{rg}(B - 2I_4) = 2$ donc $\dim(E_2(B)) = 2$; par contre $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{rg}\left(B^{-1} - 2I_2\right) = 3$ et $\dim\left(E_2\left(B^{-1}\right)\right) = 1 \neq \dim(E_2(B))$ donc, d'après le cours, $\boxed{B \text{ et } B^{-1} \text{ ne sont pas semblables}}$

Partie III

1. a) Si M est inversible, $MN = M(NM)M^{-1}$ donc $\boxed{MN \text{ et } NM \text{ sont semblables}}$

b) $S_k^2 = I_n$ donc S_k est inversible et $S_k^{-1} = S_k$. On en déduit A inversible et $A^{-1} = S_2^{-1}S_1^{-1} = S_2S_1$ qui est donc semblable à A d'après la question précédente puisque S_2 est inversible.

2. $S_1^2 = \begin{pmatrix} PQ & 0 \\ 0 & QP \end{pmatrix}$ donc $\boxed{S_1^2 = I_{2n} \Leftrightarrow P = Q^{-1}}$ puis $S_2 = \begin{pmatrix} 0 & PC \\ QB & 0 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{S_2^2 = I_{2n} \Leftrightarrow PC = (QB)^{-1}}$

3. Si C est semblable à B^{-1}, on prend $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $C = P^{-1}B^{-1}P$ et on pose $Q = P^{-1}$; la matrice S_1 est donc une matrice de symétrie. On a ensuite $PC = B^{-1}P = \left(BP^{-1}\right)^{-1} = (BQ)^{-1}$ donc S_2 est aussi une matrice de symétrie. Comme $S_1^2 = I_{2n}$ et $S_2 = S_1A$, on a $\boxed{A = S_1S_2 \text{ est produit de deux symétries}}$

Partie IV

1. Il existe par hypothèse $x_0 \in E$ tel que $g^{n-1}(x_0) \neq 0$. On vérifie classiquement que $\mathcal{B} = \big(g^{n-1}(x_0), \dots, g(x_0), x_0\big)$ est une base de E et que $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = N}$

2. $\det(J_n(\lambda)) = \lambda^n \neq 0$ donc $\boxed{J_n(\lambda) \text{ est inversible}}$ Or $(X+\lambda)\Big(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\lambda^{n-k-1}X^k\Big) = \lambda^n - (-1)^nX^n$ et on a $NI_n = I_nN$ donc $J_n(\lambda) \times \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\lambda^{n-k-1}N^k = \lambda^nI_n - (-1)^nN^n = \lambda^nI_n$.

Par conséquent, $\boxed{J_n(\lambda)^{-1} = \frac{1}{\lambda^n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\lambda^{n-k-1}N^k = \frac{1}{\lambda}I_n + N' \text{ avec } N' = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k}{\lambda^{k+1}}N^k}$

3. On vérifie que $N' = \frac{1}{\lambda^2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & (*) & \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $(N')^n = 0$ et $(N')^{n-1} \neq 0$. D'après **IV.1**, N' est semblable à N ;

si on écrit $N' = PNP^{-1}$ alors $\boxed{J_n(\lambda)^{-1} = \frac{1}{\lambda} + PNP^{-1} = P\left(\frac{1}{\lambda}I_n + N\right)P^{-1} \text{ est semblable à } J_n\left(\frac{1}{\lambda}\right)}$

4. Si $E = \mathbb{C}_{n-1}[X]$, $s_1^2(P) = P(-(-X)) = P$ donc $\boxed{s_1^2 = id_E}$ et $s_2^2(P) = P(1-(1-X)) = P$ donc $\boxed{s_2^2 = id_E}$

De plus $s_1 \circ s_2(P) = s_1(P(1-X)) = P(1-(-X)) = P(1+X)$ donc $\boxed{g = s_1 \circ s_2 - id_E}$

5. Par la formule du binôme, $g(X^k) = \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}X^j$ donc $\deg(g(X^k)) = k-1$ et par linéarité, si $\deg(P) \geqslant 1$, $\boxed{\deg(g(P)) = \deg(P) - 1}$ alors que si $\deg(P) \leqslant 0$, on a $g(P) = 0$ donc $\deg(g(P)) = -\infty$.

6. On a donc $\deg(g^n(P)) \leqslant \deg(P) - n < 0$ donc $g^n(P) = 0$ pour tout $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ donc $g^n = 0$. De plus $\deg(g^{n-1}(X^{n-1})) = 0$ donc $g^{n-1}(X^{n-1})$ est un polynôme constant non nul, ce qui donne $g^{n-1} \neq 0$. Il existe donc, d'après **IV.1**, une base dans laquelle la matrice de g est N. Si on note S_1 et S_2 les matrices de s_1 et s_2 dans cette même base, on a $S_1^2 = S_2^2 = I_n$ et $N = S_1S_2 - I_n$ d'après les relations de **IV.4**. On en déduit $\boxed{J_n(1) = S_1S_2 \text{ est produit de deux matrices de symétries}}$

Partie V

1. On a A^{-1} est semblable à $(A')^{-1} = \mathrm{diag}\big(J_{n_1}(\lambda_1)^{-1}, \dots, J_{n_r}(\lambda_r)^{-1}\big)$. On a vu (**IV.3**) qu'il existe P_i inversible telle que $J_{n_i}(\lambda_i)^{-1} = P_iJ_{n_i}\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)P_i^{-1}$. Si on pose $Q = \mathrm{diag}(P_1, \dots, P_r)$, on vérifie que $Q \times \mathrm{diag}(P_1^{-1}, \dots, P_r^{-1}) = I_n$ donc Q est inversible et $Q^{-1} = \mathrm{diag}(P_1^{-1}, \dots, P_r^{-1})$. Par transitivité, on conclut car A^{-1} est semblable à $(A')^{-1}$ et que $\boxed{Q(A')^{-1}Q^{-1} = \mathrm{diag}(P_1J_{n_1}(\lambda_1)^{-1}P_1^{-1}, \dots, P_rJ_{n_r}(\lambda_r)^{-1}P_r^{-1}) = \mathrm{diag}\left(J_{n_1}\left(\frac{1}{\lambda_1}\right), \dots, J_{n_r}\left(\frac{1}{\lambda_r}\right)\right)}$

2. Si A et A^{-1} sont semblables alors A^{-1} est semblable à A' ; la matrice A' étant unique à l'ordre près des différents blocs, on en déduit que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ alors $\lambda \neq 0$ (car A est inversible) et $\frac{1}{\lambda} \in \mathrm{Sp}(A)$ (ce que l'on savait aussi avec **II.3**), avec des blocs de même taille dans la matrice A'. On peut donc regrouper deux par deux dans la matrice A' les blocs où $\lambda \neq \pm 1$ (ce qui revient juste à permuter les vecteurs de la base) : A est donc semblable à une matrice de la forme $A'' = \mathrm{diag}\left(J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_1}\left(\frac{1}{\lambda_1}\right), \dots, J_{n_s}(\lambda_s), J_{n_s}\left(\frac{1}{\lambda_s}\right), J_{m_1}(1), \dots, J_{m_p}(1), J_{m'_1}(-1), \dots, J_{m'_q}(-1)\right)$.

D'après **IV.6** (et ce qui est admis pour $J_n(-1)$), il existe des matrices de symétries U_i, V_i, U_i' et V_i' permettant de décomposer $J_{m_i}(1) = U_iV_i$ et $J_{m'_i}(-1) = U_i'V_i'$.

Enfin, d'après la partie **III**, comme $J_n(\lambda)^{-1}$ est semblable à $J_n\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ (d'après **IV.3**), il existe des matrices de symétries S_i et T_i dans $\mathcal{M}_{2n_i}(\mathbb{C})$ telles que $\begin{pmatrix} J_{n_i}(\lambda_i) & 0 \\ 0 & J_{n_i}\left(\frac{1}{\lambda_i}\right) \end{pmatrix} = S_iT_i$.

Reste à recoller les morceaux : si on définit les deux matrices S et S' par $S = \mathrm{diag}(S_1, \dots, S_s, U_1, \dots, U_p, V_1, \dots, V_q)$ et $S' = \mathrm{diag}(T_1, \dots, T_s, U_1', \dots, U_p', V_1', \dots, V_q')$, on vérifie que S et S' sont deux matrices de symétries telles que $SS' = A''$. La matrice A est donc semblable à un produit de deux matrices de symétries ($A = PSS'P^{-1}$) donc $\boxed{A = (PSP^{-1})(PS'P^{-1}) \text{ est aussi un produit de deux matrices de symétries}}$