L'usage des calculatrices est interdit

EXERCICE

(Inspiré de E3A PC 2016 maths 2)

Le but de cet exercice est de donner trois expressions différentes du réel ln(2) sous la forme d'une somme de série puis d'étudier la vitesse de convergence de ces trois séries.

Partie I.

1. a) Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}^*$, la valeur de la dérivée k^{eme} de la fonction $\varphi : x \longmapsto -\ln(1-x)$.

b) Montrer alors que $\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$. *On pourra utiliser une formule de Taylor sur l'intervalle* $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

2. a) Justifier la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k(k+1)2^k}$.

b) En remarquant que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, déterminer la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}$.

3. a) Montrer que la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ est convergente.

b) Montrer qu'il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ (que l'on ne demande pas de déterminer) telle que, lorsque n tend vers $+\infty$, on ait $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$, où $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

c) En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Partie II.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}, \quad S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}.$$

R_n, S_n et T_n sont donc les restes d'ordre n des séries vues en première partie.
Le but de cette partie est de déterminer des équivalents, lorsque n tend vers $+\infty$, de R_n, S_n et T_n.

1. On note dans cette question $(U_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $U_n = \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i}$.

a) Calculer U_n.

b) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad R_n = \frac{U_n}{n+1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)}$.

c) Montrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)} \leqslant \frac{R_n}{n+2}$.

d) Conclure que $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n2^n}$.

2. a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $2S_n + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$.

b) Justifier que $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \right| \leqslant \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$.

c) En déduire un équivalent de S_n.

3. Montrer, en vous inspirant de la méthode utilisée en **II.1**, que $T_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 2^n}$.

Fin de l'exercice

PROBLÈME : Matrices semblables à leur inverse
(d'après de Mines-Ponts PSI 2025 maths 1)

Notations et définitions.

On note $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes, $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'algèbre des matrices carrées complexes de taille n et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ le groupe des matrices complexes inversibles de taille n.
On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables si

$$\exists P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}),\ A = P^{-1}BP.$$

Pour tout matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ le polynôme caractéristique de A est défini par

$$\mathcal{X}_A = \det(X\ I_n - A).$$

On rappelle qu'une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice de symétrie si et seulement si elle vérifie $S^2 = I_n$.

Partie I : Étude d'un exemple

Dans cette partie, on considère un complexe α et on définit la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1-\alpha \\ \alpha^2 & 1+\alpha^2 & -1+\alpha \\ \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha \end{pmatrix}.$$

1. Étude de diagonalisabilité

a) Vérifier que le polynôme caractéristique de A est $\mathcal{X}_A = (X-1)(X-\alpha)(X-\alpha^2)$.

b) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

Dans toute la suite de cette partie, on supposera que α est non nul et on considère la matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définie par :

$$B = \frac{1}{\alpha}A = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1-\alpha \\ \alpha^2 & 1+\alpha^2 & -1+\alpha \\ \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha \end{pmatrix}.$$

2. Justifier que A est inversible.

3. Dans cette question, on suppose $\alpha \neq 1$.

a) Déterminer une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ semblable à B.

b) Calculer D^{-1} et montrer que D et D^{-1} sont semblables.

c) En déduire que B et B^{-1} sont semblables.

4. On suppose cette fois que $\alpha = 1$. On a donc

$$A = B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que B est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et déterminer une matrice $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{C})$ telle que $B = PTP^{-1}$.
On choisira une matrice P dont tous les coefficients sont entiers.

b) Déterminer la matrice T^{-1} et justifier que B est semblable à B^{-1}.

c) Soit S_1 la matrice définie par $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que S_1 est une matrice de symétrie.

d) Justifier qu'il existe une matrice de symétrie $S_2 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $B = S_1S_2$.

Partie II : Le cas diagonalisable.

Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

1. Soit z un nombre complexe non nul. Exprimer $\det(zI_n - A)$ en fonction de z, $\det(A)$ et $\det\left(\frac{1}{z}I_n - A^{-1}\right)$.

2. On suppose dans cette question que A est semblable à son inverse. Préciser les valeurs que peut prendre le déterminant de A, et en déduire que $\mathcal{X}_A$ vérifie la propriété suivante, notée $(*)$:

$$\exists \varepsilon \in \{-1,+1\}, \forall z \in \mathbb{C}^*, \mathcal{X}_A(z) = \varepsilon z^n \mathcal{X}_A\left(\frac{1}{z}\right). \qquad (*)$$

3. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable. On suppose que le polynôme caractéristique de B vérifie la propriété $(*)$.

a) On suppose que la factorisation de $\mathcal{X}_B$ dans $\mathbb{C}[X]$ est $\mathcal{X}_B = \prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)^{n_k}$ avec $n_k \in \mathbb{N}^*$, les λ_k étant deux à deux distincts. Justifier que $\lambda_k \neq 0$, pour tout $k \in [\![1, r]\!]$.

b) Donner la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ du polynôme $X^n \mathcal{X}_B\left(\frac{1}{X}\right)$.

c) Démontrer que B est inversible et semblable à son inverse.

4. Soit B la matrice définie par $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $\mathcal{X}_B$ vérifie la propriété $(*)$.

b) Justifier que B est inversible mais que B n'est pas semblable à son inverse. *On pourra déterminer les espaces propres de B et B^{-1} pour la valeur propre 2.*

Ainsi, hors du cas diagonalisable, le polynôme caractéristique ne suffit pas à caractériser les matrices semblables à leur inverse. La suite du problème propose de caractériser ces matrices par une autre méthode.

Partie III : Produits de matrices de symétries.

1. a) Démontrer que si M et N sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et si M est inversible alors MN et NM sont semblables.

b) En déduire que si S_1 et S_2 sont deux matrices de symétrie, la matrice produit $A = S_1S_2$ est inversible et semblable à son inverse.

Soit B et C deux matrices de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. Soit $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ la matrice suivante, définie par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} B & 0_n \\ 0_n & C \end{pmatrix}.$$

2. Soit S_1 la matrice suivante, définie par blocs

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0_n & P \\ Q & 0_n \end{pmatrix}$$

où P, Q sont deux éléments de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.
Déterminer les conditions reliant B, C, P, Q pour que les matrices S_1 et $S_2 = S_1A$ soient des matrices de symétries.

3. En déduire que si C est semblable à B^{-1}, alors A est un produit de deux matrices de symétries.

Partie IV : La matrice $J_n(\lambda)$.

1. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n. Soit g un endomorphisme de E tel que $g^n = 0$ et $g^{n-1} \neq 0$.
Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de g est la matrice N ci-après :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Autrement dit $N = (n_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ avec $n_{i,j} = 1$ si $j = i+1$ et $n_{i,j} = 0$ sinon.

2. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ non nul, on pose $J_n(\lambda) = \lambda I_n + N$. Démontrer que $J_n(\lambda)$ est inversible et déterminer en fonction de N et de λ la matrice N' telle que $J_n(\lambda)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} I_n + N'$.

3. Calculer $(N')^n$ et en déduire que $J_n(\lambda)^{-1}$ est semblable à $J_n\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$.

Pour tout polynôme $P = P(X) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ on pose

$$\left\{ \begin{array}{rcl} s_1(P) & = & P(-X) \\ s_2(P) & = & P(1-X) \\ g(P) & = & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$$

On définit ainsi les trois endomorphismes s_1, s_2 et g de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ (il n'est pas demandé de le prouver).

4. Calculer s_1^2, s_2^2 et exprimer $s_1 \circ s_2$ en fonction de g et $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}_{n-1}[X]}$.

5. Soit P un polynôme non constant. Exprimer le degré du polynôme $g(P)$ en fonction du degré de P.

6. Déduire des questions précédentes que la matrice $J_n(1)$ est un produit de deux matrices de symétries.

On pourrait démontrer par le même type de raisonnement, et on l'admet, que la matrice $J_n(-1)$ est un produit de deux matrices de symétries.

Partie V : Une caractérisation des matrices semblables à leur inverse.

Soit A une matrice de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ semblable à son inverse. On admet le résultat suivant :
A est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{n_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de A (pas nécessairement distinctes) et $r, n_1, \cdots, n_r$ sont des entiers naturels non nuls. De plus la matrice diagonale par blocs A' est unique à l'ordre près des blocs.

1. Démontrer que A^{-1} est semblable à $\begin{pmatrix} J_{n_1}\left(\frac{1}{\lambda_1}\right) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2}\left(\frac{1}{\lambda_2}\right) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{n_r}\left(\frac{1}{\lambda_r}\right) \end{pmatrix}$.

2. En utilisant les résultats établis dans les parties précédentes, démontrer que A est un produit de deux matrices de symétries.

Fin du problème