PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 10

PSI 1 2026-2027 **du lundi 30/11 au vendredi 04/12**

1 Suites et séries de fonctions :

- convergence simple d'une suite de fonctions : limite simple ;
- convergence uniforme d'une suite de fonctions, exemples et contre-exemples ;
- convergence uniforme sur tout segment et implications entre ces trois notions ;
- convergence simple d'une série de fonctions : fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, fonction R_n reste d'ordre n ;
- convergence uniforme de la série de fonctions si $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle ; convergence uniforme de la série de fonctions sur tout segment ;
- convergence normale de la série de fonctions et convergence normale sur tout segment ; exemples et contre-exemples ; implications entre ces cinq notions ;
- conservation de propriétés par convergence simple : parité, croissance, périodicité ;

2 Convergence uniforme et régularité :

- convergence uniforme d'une suite de fonctions continues vers une fonction continue ;
- théorème de la double limite pour une suite de fonctions convergeant uniformément ;
- convergence uniforme (ou normale) d'une série de fonctions continues vers une fonction continue ;
- théorème de la double limite pour série de fonctions si convergence uniforme ;

3 Intégration et dérivation des suites et séries de fonctions :

- l'intégrale sur un segment $[a;b]$ d'une limite uniforme de suites de fonctions continues est la limite des intégrales sur $[a;b]$ de ces fonctions ;
- l'intégrale sur $[a;b]$ de la somme d'une série de fonctions convergeant uniformément est la somme de la série des intégrales de ces fonctions sur $[a;b]$ (majoration si la convergence est normale) ;
- théorème d'intégration terme à terme classique ;
- théorème de convergence dominée - exemples ;
- interversion série/intégrale sur un intervalle quelconque par théorème de convergence dominée appliquée aux sommes partielles ;
- dérivation de la limite simple d'une suite de fonctions de classe C^1 sur un intervalle telle que la suite des dérivées converge uniformément ;
- dérivation de la somme d'une série de fonctions de classe C^1 convergeant simplement sur un intervalle telle que la série des fonctions dérivées converge uniformément ;
- récurrence avec le théorème de dérivation pour montrer qu'une somme de série de fonctions est C^∞ ;

QUESTIONS DE COURS :

1 définir la convergence uniforme d'une série de fonctions sur une partie (déf. 5.5)
2 définir la convergence normale d'une série de fonctions sur une partie (déf. 5.6)
3 énoncer le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions (th. 5.4)
4 énoncer le théorème de la double limite pour les séries de fonctions (th. 5.5)
5 énoncer le théorème d'intégration terme à terme classique (th. 5.9)
6 énoncer le théorème d'interversion limite/dérivée pour les suites de fonctions (th. 5.10)
7 énoncer le théorème d'interversion série/dérivée pour les séries de fonctions (th. 5.12)
8 prouver que si $(f_n)_{n\geqslant 0}$ CVU sur I et $J \subset I$, alors $(f_n)_{n\geqslant 0}$ CVU sur J (rem. 5.2)
9 prouver que si les f_n sont paires et que $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ CVS sur $\mathbb{R}$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est paire (rem. 5.4)
10 prouver le théorème d'interversion limite/intégrale si convergence uniforme sur segment (th. 5.7)

Prévision pour la prochaine semaine : révision sur les séries de fonctions, dénombrement et début des espaces probabilisés