DEVOIR 10 : RÉDUCTION

PSI 1 2026-2027 **mercredi 18 novembre 2026**

QCM

1 CAYLEY-HAMILTON : *soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et* P *un polynôme unitaire de degré* n

1.1 Si $P(A) = 0$ alors $P = \chi_A$

1.2 $\chi_A(A) = 0$

1.3 A nilpotent $\iff \chi_A = X^n$

1.4 $A = I_n \iff \chi_A = (X-1)^n$

2 *CNS de diagonalisabilité : soit* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension* $n \geqslant 2$ *et* $u \in \mathcal{L}(E)$ *(on écrira SARS pour "scindé à racines simples")*

2.1 u DZ $\iff u^2$ DZ

2.2 u DZ $\iff \chi_u$ est SARS

2.3 u DZ $\iff (\forall \lambda \in Sp(u),\ \dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda(u))$

2.4 u DZ $\iff$ (il existe une base de E composée de vecteurs propres de u)

3 *Polynômes annulateurs : soit* E *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension* $n \geqslant 2$ *et* $u \in \mathcal{L}(E)$, $P \in \mathbb{C}[X]$ *un polynôme unitaire annulateur de* u *et* F *un sous-espace de* E *stable par* u

3.1 $\prod_{\lambda \in Sp(u)} (X-\lambda)$ divise P

3.2 $\prod_{\lambda \in Sp(u)} (X-\lambda)$ annule $u \iff u$ DZ

3.3 P est un multiple de χ_u

3.4 P est un polynôme annulateur de u_F

4 *Trigonalisabilité : soit* $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ *et* $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

4.1 A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

4.2 B est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

4.3 A nilpotente $\implies A^3 = 0$

4.4 ($1 \in Sp(B)$ et $\det(B) < 0$) $\implies B$ trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Énoncé Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Donner une caractérisation de la diagonalisabilité de u qui fait intervenir les différents ordres de multiplicité de ses valeurs propres.

Preuve Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$.

Montrer que toutes les valeurs propres de u sont des racines de P.

Exercice 1 Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de projection (c'est-à-dire telle que $P^2 = P$) et φ l'endomorphisme (on l'admet ici) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = PM + MP$. Déterminer $\varphi^2(M)$ et $\varphi^3(M)$ pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En déduire que φ est diagonalisable.

Exercice 2 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

DEVOIR 10 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne `i` colonne `j` revient à déclarer la question `i.j` vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

i · j	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 10 NOM : COCO PRÉNOM : SINUS

$i\cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1		X	X		
2				X	
3	X	X		X	
4			X	X	

1.1 Faux : si $A = I_n$ et $P = X^{n-1}(X-1)$ par exemple **1.2** Vrai : théorème **1.3** Vrai : A nilpotente ne peut avoir que 0 comme valeur propre complexe **1.4** Faux : $A = I_n + E_{2,1}$ vérifie $\chi_A = (X-1)^n$.
2.1 Faux : $u(x,y) = (y,0)$ par exemple qui est nilpotent d'ordre 2 (et non nul) donc non diagonalisable **2.2** Faux : $u = id_E$ est DZ alors que $\chi_u = (X-1)^n$ n'est pas SARS **2.3** Faux : $u(x,y,z) = (-y,x,z)$ (rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans l'espace) qui n'a que 1 comme valeur propre réelle et $\dim(E_1(u)) = 1 = m_1(u)$ et qui n'est pas DZ **2.4** Vrai : l'une des 5 assertions d'un théorème.
3.1 Vrai : les valeurs propres de u sont des racines de tout polynôme annulateur de u **3.2** Vrai : théorème **3.3** Faux : $u = id_E$ et $P = X-1$ alors que $\chi_u = (X-1)^n$ **3.4** Vrai : $\forall x \in F,\ P(u_F)(x) = P(u)(x) = 0_E$.
4.1 Vrai : $\mathbb{C}$ est algébriquement clos donc χ_A est scindé **4.2** Faux : si $\chi_B = X(X^2+1)$ par exemple **4.3** Vrai : si A nilpotente alors son unique valeur propre est 0 donc A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on vérifie que $T^3 = 0$ **4.4** Vrai : les deux autres valeurs propres de B (à part 1) ne peuvent pas être complexes conjuguées (λ et $\overline{\lambda}$) car alors on aurait $\det(B) = 1 \times \lambda \times \overline{\lambda} = |\lambda|^2 > 0$ donc χ_B est scindé dans $\mathbb{R}$ et B trigonalisable.

Énoncé Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On a l'équivalence :

$$\big(u \text{ est diagonalisable}\big) \iff \big(\chi_u \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \text{ et } \forall \lambda \in Sp(u),\ \dim\big(E_\lambda(u)\big) = m_\lambda(u)\big).$$

Preuve Soit $\lambda \in Sp(u)$ et $x \neq 0_E$ tel que $u(x) = \lambda x$ un vecteur propre associé. Alors $\forall k \in \mathbb{N},\ u^k(x) = \lambda^k x$ (récurrence simple) et, en écrivant $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, on a $P(u)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k(x) = \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \lambda^k\Big)x = 0_E$ donc, comme $x \neq 0_E$, on a $P(\lambda) = 0$.

Exercice 1 Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puisque $P^2 = P$: $\varphi^2(M) = P(PM+MP)+(PM+MP)P = PM+MP+2PMP$ et, de même, $\varphi^3(M) = PM+MP+6PMP$. On en déduit que $\varphi^3(M)-3\varphi^2(M)+2\varphi(M) = 0$ donc $\varphi^3-3\varphi^2+2\varphi = 0$ et $Q = X(X-1)(X-2)$ est annulateur de φ. Comme Q est scindé à racines simples, φ est diagonalisable.

Exercice 2 $\chi_A = \begin{vmatrix} X-2 & -1 & 2 \\ -1 & X-a & 1 \\ -1 & -1 & X+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & -1 & 2 \\ 0 & X-a & 1 \\ X & -1 & X+1 \end{vmatrix}$ avec $C_1 \leftarrow C_1 + C_3$. On utilise la linéarité par rapport à C_1 et $\chi_A = X\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & X-a & 1 \\ 1 & -1 & X+1 \end{vmatrix} = X\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & X-a & 1 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = X(X-a)(X-1)$ avec $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$.

- Si $a \notin \{0,1\}$, $\chi_A(A) = 0$ par Cayley-Hamilton et χ_A est scindé à racines simples : A est diagonalisable.
- Si $a = 0$, $\chi_A = X^2(X-1)$ et $\dim(E_0(A)) = 1 = 3 - rg(A)$ car $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est de rang 2. Ainsi, comme les ordres de multiplicité algébrique et géométrique de 0 ne coïncident pas : A n'est pas diagonalisable.
- Si $a = 1$, $\chi_A = X(X-1)^2$ et $\dim(E_1(A)) = 1 = 3 - rg(A - I_3)$ car $A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ est de rang 2. Les ordres de multiplicité algébrique et géométrique de 1 ne coïncident pas : A n'est pas diagonalisable.