DEVOIR 11 : RÉDUCTION DE SÉRIES

PSI 1 2026-2027 **mercredi 25 novembre 2026**

QCM

1 *Diagonalisabilité : soit* E *un espace vectoriel de dimension* n *et* u *un endomorphisme de* E *tel que* $u^4 - u^2 = 0$

1.1 u diagonalisable

1.2 u non diagonalisable

1.3 $u \in GL(E) \Longrightarrow u$ diagonalisable

1.4 u diagonalisable $\Longrightarrow u \in GL(E)$

2 *Suites de fonctions : soit la fonction* $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = 0$ *si* $x \in [0;1[$ *et* $f(1) = 1$ *puis, pour* $n \in \mathbb{N}$, *la fonction* $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ *définie par* $f_n(x) = x^n$ *;* 0 *représente la fonction nulle*

2.1 $f_n \xrightarrow{CVS} 0$ sur $[0;1]$

2.2 $f_n \xrightarrow{CVS} f$ sur $[0;1]$

2.3 $f_n \xrightarrow{CVU} 0$ sur $[0;1[$

2.4 $f_n \xrightarrow{CVU} 0$ sur $[0;a]$ si $a \in [0;1[$

3 *Suites de fonctions : soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions qui converge simplement vers* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

3.1 (les f_n sont bornées) $\Longrightarrow f$ est bornée

3.2 (les f_n sont continues) $\Longrightarrow f$ est continue

3.3 (les f_n sont paires) $\Longrightarrow f$ est paire

3.4 (les f_n sont 2π-périodiques) $\Longrightarrow f$ est 2π-périodique

4 *Séries de fonctions : pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$, *une fonction* $f_n : I \to \mathbb{R}$ *et enfin* $f : I \to \mathbb{R}$ *une autre fonction (CVS, CVU et CVN comme habituellement)*

4.1 $\left(\sum_{n\geqslant 0} f_n \text{ CVS (vers } f)\right) \iff \left(\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in I,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right| \leqslant \varepsilon\right)$

4.2 $\left(\sum_{n\geqslant 0} f_n \text{ CVU (vers } f)\right) \iff \left(\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall n \geqslant n_0,\ \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right| \leqslant \varepsilon\right)$

4.3 $\left(\sum_{n\geqslant 0} f_n \text{ CVN (vers } f)\right) \iff \left(\exists (\alpha_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}},\ \left(\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n \text{ converge et } \forall x \in I,\ |f_n(x)| \leqslant \alpha_n\right)\right)$

4.4 $\left(\sum_{n\geqslant 0} f_n \text{ CVN (vers } f)\right) \iff \left(\forall x \in I,\ \left(\exists (\alpha_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}},\ \sum_{n\geqslant 0} \alpha_n \text{ converge et } |f_n(x)| \leqslant \alpha_n\right)\right)$

Énoncé Donner (précisément) le théorème d'intégration terme à terme.

Preuve Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge uniformément sur I vers $f : I \to \mathbb{K}$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers cette même fonction f sur I.

Exercice 1 **a.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer χ_A et montrer que A n'est pas diagonalisable.

b. Trouver une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 On pose $u_n(x) = e^{-nx}\sin(nx)$ avec $x \in \mathbb{R}_+$.

a. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}_+$.

b. Étudier la convergence uniforme de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a;+\infty[$ avec $a > 0$.

c. Étudier la convergence uniforme de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}_+$. On pourra évaluer $u_n(\pi/2n)$.

DEVOIR 11 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne `i` colonne `j` revient à déclarer la question `i.j` vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

i · j	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 11 NOM : COCO PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1			X		
2		X		X	
3			X	X	
4	X		X		

1.1 Faux : par exemple si u est nilpotent d'indice 2 et $u \neq 0$ **1.2** Faux : $u = id_E$ vérifie $u^4 = u^2$ **1.3** Vrai : on compose par u^{-2} et on a $u^2 = id_E$ donc u est une symétrie ($X^2 - 1$ annulateur de u) **1.4** Faux : tout projecteur $u \neq id_E$ vérifie $u^4 = (u^2)^2 = u^2$ et $u \notin GL(E)$.
2.1 Faux : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1) = 1$ **2.2** Vrai : cours **2.3** Faux : $||f_n||_{\infty,[0;1[} = 1 \not\to 0$ **2.4** Vrai : $||f_n||_{\infty,[0;a[} = a^n \to 0$.
3.1 Faux : $f_n(x) = e^x$ si $x \in [-n; n]$, $f_n(x) = 0$ sinon, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS vers $f = \exp$ non bornée **3.2** Faux : $f_n(x) = x^n$ sur $[0; 1]$ (classique) **3.3** Vrai : $f_n(-x) = f_n(x)$, à la limite : $f(-x) = f(x)$ **3.4** Vrai : idem.
4.1 Vrai : définition en inversant $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall x \in I$ **4.2** Faux : c'est $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \ldots$ **4.3** Vrai : ($\Longleftarrow$) on a alors $||f_n||_\infty \leqslant \alpha_n$ et théorème de comparaison ($\Longrightarrow$) on prend $\alpha_n = ||f_n||_{\infty,I}$ **4.4** Faux : ceci ne traduit que la convergence absolue pour chaque x ce qui n'est pas la convergence normale.

Énoncé Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions telle que :

(H_1/H_2) la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur I vers S et $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est cont. par morc. et intég. sur I,

(H_3/H_4) la fonction S est continue par morceaux sur I et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \left(\int_I |f_n| \right)$ converge.

Alors, (R_1) S est intégrable sur I (R_2) $\sum\limits_{n\geqslant 0} \int_I f_n$ converge (R_3) $\int_I S = \int_I \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n \right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$.

Preuve Par hypothèse, il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_1$, la fonction $f_n - f$ est bornée. De plus, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \geqslant n_1$, $\forall n \geqslant n_0$, $||f_n - f||_{\infty,I} \leqslant \varepsilon$ puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - f||_{\infty,I} = 0$.
Soit $x \in I$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $0 \leqslant |f_n(x) - f(x)| \leqslant ||f_n - f||_{\infty,I} \leqslant \varepsilon$ donc $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ par transitivité. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$; et ceci étant vrai pour tout réel $x \in I$, on a bien la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur I.

Exercice 1 **a.** On trouve facilement $\chi_A = (X - 1)^3$ et, comme $\dim(E_1(A)) \neq 3$ car $A \neq I_3$, A est non DZ.

b. Comme $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $E_1(A) = Vect(v_1, v_2)$ avec $v_1 = (1, 0, 0)$ et $v_2 = (0, -1, 1)$. D'après T, on cherche v_3 tel que $Av_3 = v_3 + v_2$, ce qui revient à $(A - I_3)v_3 = v_2$. On peut donc prendre, en regardant les colonnes de $A - I_3$, $v_3 = e_2$ ou $v_3 = e_3$. Prenons $v_3 = e_3 = (0, 0, 1)$, ce qui donne $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et on a bien $P \in GL_3(\mathbb{R})$ car $\det(P) = -1$. Par la formule de changement de base, $A = PTP^{-1}$.

Exercice 2 **a.** Si $x = 0$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n(0) = 0$. Si $x > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n(x)| \leqslant e^{-nx} = (e^{-x})^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (e^{-x})^n = 0$ car $0 < e^{-x} < 1$. La suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.
b. Si $a > 0$, $\forall x \in [a; +\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n(x)| \leqslant e^{-nx} \leqslant e^{-na} = (e^{-a})^n$ donc $||u_n||_{\infty,[a;+\infty[} \leqslant e^{-an}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (e^{-a})^n = 0$ car $0 < e^{-a} < 1$ ce qui implique la convergence uniforme de la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la fonction nulle sur $[a; +\infty[$.
c. $u_n'(x) = n\Big(\cos(nx) - \sin(nx)\Big)e^{-nx}$ et l'étude de $||u_n||_{\infty,\mathbb{R}_+}$ est délicate (même s'il semble clair que le maximum de $|u_n|$ sera atteint en $x = \frac{\pi}{4n}$). Mais $||u_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} \geqslant \left|u_n\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right| = e^{-\pi/2}$ qui ne tend pas vers 0. Pas de convergence uniforme de la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.