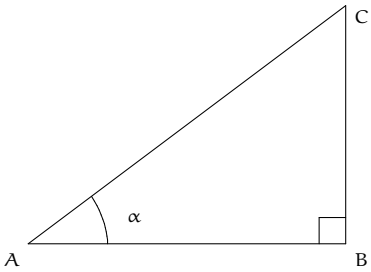
FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

1. INTRODUCTION

Historiquement, ce sont les babyloniens (angles et tables de données astronomiques) puis bien sûr les grecs qui se sont intéressés aux relations entre les côtés d'un triangle rectangle, et ont développé la notion de projection orthogonale, si nécessaire à la définition des sinus et cosinus d'un angle.

On se donne un triangle (ABC) rectangle en B et on note $\alpha = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$ (angle orienté de vecteurs) :

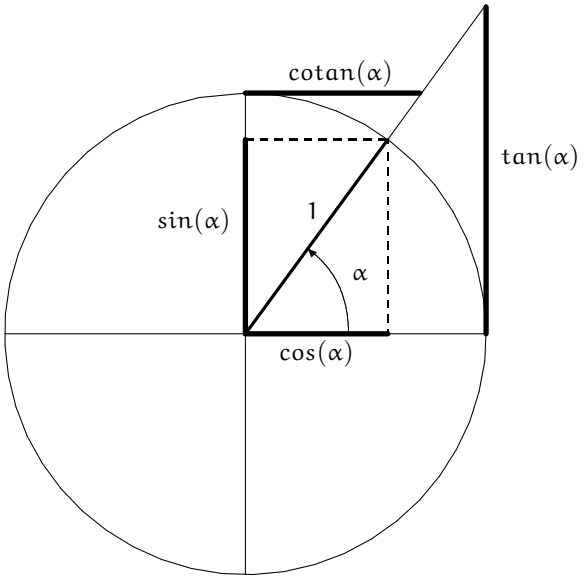


$$\begin{cases} \textbf{(cosinus)} & \cos(\alpha) = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \\ \textbf{(sinus)} & \sin(\alpha) = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \end{cases}$$

On définit également : $\begin{cases} \textbf{(tangente)} & \tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} \\ \textbf{(cotangente)} & \operatorname{cotan}(\alpha) = \dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{côté opposé}} \end{cases}$

Toutes les grandeurs évoquées étant strictement positives, ceci ne vaut naturellement que pour $\alpha \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$; lorsque $\alpha \notin \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ on prendra bien garde au fait que la tangente ou la cotangente peuvent ne pas être définies et aux signes (éventuellement strictement négatifs) dans les relations précédentes.

On peut également visualiser ces grandeurs (et leurs signes) sur le cercle unité (de rayon 1) où l'on comprend mieux la notion de "tangente" :



Le théorème de PYTHAGORE fournit évidemment : $\boxed{\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1 \qquad (0)}$

2. ÉTUDE DES FONCTIONS

On peut définir les fonctions trigonométriques :

$$\left\{\begin{array}{rccc}\sin: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ & \alpha & \mapsto & \sin(\alpha)\end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{rccc}\cos: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ & \alpha & \mapsto & \cos(\alpha)\end{array}\right. \quad \text{et}$$

$$\left\{\begin{array}{rccc}\tan: & \mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\} & \to & \mathbb{R}\\ & \alpha & \mapsto & \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rccc}\operatorname{cotan}: & \mathbb{R}\setminus\left\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\} & \to & \mathbb{R}\\ & \alpha & \mapsto & \dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\end{array}\right.$$

On notera que $\tan(\alpha)$ n'est défini que lorsque $\cos(\alpha)\neq 0$, c'est-à-dire pour $\alpha\notin\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

De même, $\operatorname{cotan}(\alpha)$ n'est défini que pour $\sin(\alpha)\neq 0$, c'est-à-dire pour $\alpha\notin\left\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Toutes ces fonctions sont, sur leurs ensembles de définition, continues, dérivables (autant de fois qu'on veut), avec (sur les ensembles de définition respectifs) :

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos'(\alpha)=-\sin(\alpha),\ \tan'(\alpha)=\dfrac{1}{\cos^2(\alpha)}=1+\tan^2(\alpha),\\ \sin'(\alpha)=\cos(\alpha)\ \text{ et }\ \operatorname{cotan}'(\alpha)=-\dfrac{1}{\sin^2(\alpha)}=-1-\operatorname{cotan}^2(\alpha).\end{array}}$$

Elles possèdent les graphes donnés en annexe : ils ont été tracés en MAPLE.

De plus, nous connaissons la périodicité et la parité de ces fonctions, et quelques formules à retenir, ou plutôt à savoir retrouver très rapidement en faisant un petit dessin.

- La fonction cosinus est 2π-périodique et paire, et on a :

$$\boxed{\begin{array}{lllll}\forall x\in\mathbb{R}, & \cos(x+2\pi)=\cos(x), & \cos(-x)=\cos(x), & \cos(x+\pi)=-\cos(x)\\ & \cos(\pi-x)=-\cos(x), & \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(x), & \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x).\end{array}}$$

- La fonction sinus est 2π-périodique et impaire, et on a :

$$\boxed{\begin{array}{lllll}\forall x\in\mathbb{R}, & \sin(x+2\pi)=\sin(x), & \sin(-x)=-\sin(x), & \sin(x+\pi)=-\sin(x)\\ & \sin(\pi-x)=\sin(x), & \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(x), & \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x).\end{array}}$$

- Les fonctions tangente et cotangente sont π-périodiques et impaires, et pour x convenable :

$$\boxed{\begin{array}{lll}\tan(x+\pi)=\tan(x), & \tan(-x)=-\tan(x), & \tan(\pi-x)=-\tan(x),\\ \operatorname{cotan}(x+\pi)=\operatorname{cotan}(x), & \operatorname{cotan}(-x)=-\operatorname{cotan}(x), & \operatorname{cotan}(\pi-x)=-\operatorname{cotan}(x),\\ \tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{cotan}(x), & \tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{cotan}(x) & \end{array}}$$

3. LES FORMULES

IL FAUT LES APPRENDRE OU POUVOIR LES RETROUVER TRÈS VITE.

Elles découlent toutes de ce qu'on vient de voir, et des deux formules fondamentales suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{lrcll} \forall (a,b)\in\mathbb{R}^2, & \cos(a+b) & = & \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b) & (1)\\ & \sin(a+b) & = & \sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b) & (2)\end{array}}$$

Par parité de cosinus et imparité de sinus, on en déduit :

$$\boxed{\begin{array}{lrcll} \forall (a,b)\in\mathbb{R}^2, & \cos(a-b) & = & \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b) & (3)\\ & \sin(a-b) & = & \sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b) & (4)\end{array}}$$

De (1) et (2) viennent également (en prenant $a=b=x$ et comme $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$) :

$$\boxed{\begin{array}{lrcll} \forall x\in\mathbb{R}, & \cos(2x) & = & \cos^2(x)-\sin^2(x)=2\cos^2(x)-1=1-2\sin^2(x) & (1')\\ & \sin(2x) & = & 2\sin(x)\cos(x) & (2')\end{array}}$$

On déduit de $(1')$ que :

$$\boxed{\begin{array}{lrcll} \forall x\in\mathbb{R}, & \cos^2(x) & = & \dfrac{1+\cos(2x)}{2} & (1'')\\ & \sin^2(x) & = & \dfrac{1-\cos(2x)}{2} & (2'')\end{array}}$$

et donc que

$$\boxed{\begin{array}{lrcll} \forall x\in\mathbb{R}, & 1+\cos(x) & = & 2\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) & (1''')\\ & 1-\cos(x) & = & 2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right) & (2''')\end{array}}$$

Enfin, par définition de tangente et avec (1) et (2) (en divisant le numérateur et le dénominateur par $\cos(a)\cos(b)$), on tire ; quel que soit $(a,b)\in\left(\mathbb{R}\Big\backslash\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}\right)^2$ et qui vérifie $\tan(a)\tan(b)\neq 1$ pour (5) ou $\tan(a)\tan(b)\neq -1$ pour $(5')$:

$$\boxed{\begin{array}{lrcll} & \tan(a+b) & = & \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} & (5)\\ & \tan(a-b) & = & \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)} & (5')\end{array}}$$

Ainsi, en prenant $a=b=x$, on obtient ; quel que soit $x\in\mathbb{R}$ tel que $x\notin\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ et $2x\notin\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$:

$$\boxed{\tan(2x)=\frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}\quad(5'')}$$

En sommant (1) et (3) d'un coté, (2) et (4) de l'autre, on trouve :

$$\boxed{\begin{array}{lrcll} \forall (a,b)\in\mathbb{R}^2, & \cos(a)\cos(b) & = & \frac{1}{2}\Big(\cos(a+b)+\cos(a-b)\Big) & (6)\\ & \sin(a)\cos(b) & = & \frac{1}{2}\Big(\sin(a+b)+\sin(a-b)\Big) & (7)\end{array}}$$

Enfin, $(3)-(1)$ donne :

$$\boxed{\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \sin(a)\sin(b)=\frac{1}{2}\Big(\cos(a-b)-\cos(a+b)\Big)\quad(8)}$$

Pour finir, soit $(p,q) \in \mathbb{R}^2$; en appliquant (6), (7), (8) pour $a = \dfrac{p+q}{2}$, $b = \dfrac{p-q}{2}$, et compte tenu de l'imparité de sinus, il vient :

$$\boxed{\begin{array}{lrcll} \forall (p,q) \in \mathbb{R}^2, & \cos(p)+\cos(q) & = & 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right) & (9) \\ & \cos(p)-\cos(q) & = & -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right) & (10) \\ & \sin(p)+\sin(q) & = & 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right) & (11) \\ & \sin(p)-\sin(q) & = & 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right) & (12) \end{array}}$$

Il n'est pas non plus inutile de connaître, notamment pour le paramétrage des ellipses, les deux relations suivantes tirées de (1′), (2′) et du fait que : $\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\},\ \cos^2(\theta) = \dfrac{1}{1+\tan^2(\theta)}}$

$$\boxed{\begin{array}{lrcll} \forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{x}{2} \notin \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}, & \cos(x) & = & \dfrac{1-\tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right)} & (13) \\ & \sin(x) & = & \dfrac{2\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right)} & (14) \end{array}}$$

Lorsque, de plus, $\tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right) \neq 1$: $\boxed{\tan(x) = \dfrac{2\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right)} \quad (15)}$

Cette formule (15) ressemble d'ailleurs fort à (5″).