FONCTIONS HYPERBOLIQUES

1. INTRODUCTION, DÉFINITION ET ÉTUDES

Comme les fonctions trigonométriques permettent de définir un paramétrage des cercles et donc des ellipses de la manière suivante : soit $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$; elle est paramétrée (parcourue en entier) par $f : \mathbb{R}\to\mathcal{E}$ définie par : $\forall t\in\mathbb{R},\ f(t)=\big(a\cos(t),b\sin(t)\big)_{\mathcal{R}}$ et si l'on veut un paramétrage bijectif, on peut se restreindre à $f : [0;2\pi[\to\mathcal{E}$.

De manière analogue, les fonctions hyperboliques vont permettre le paramétrage bijectif de chacune des branches de l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation cartésienne, dans le même repère : $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a,b>0)$ d'où leur nom. Voici ces fameuses fonctions hyperboliques :

$$\begin{cases}\mathrm{sh}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ & x & \mapsto & \mathrm{sh}(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\end{cases},\quad \begin{cases}\mathrm{ch}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ & x & \mapsto & \mathrm{ch}(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\end{cases}$$

Si $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)=\dfrac{1}{4}\Big(e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}\Big)=\dfrac{4}{4}$, d'où $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)=1\quad(0)}$

Ainsi, pour $t\in\mathbb{R}$, le point $\big(a\,\mathrm{ch}(t),b\,\mathrm{sh}(t)\big)_{\mathcal{R}}$ appartient bien à l'hyperbole $\mathcal{H}$.

De part leurs expressions respectives et notre connaissance de la dérivée de la fonction exponentielle, il vient facilement que ces deux fonctions sont indéfiniment dérivables et qu'elles vérifient :

$$\boxed{\mathrm{ch}\text{ est paire, }\mathrm{sh}\text{ est impaire, }\mathrm{ch}'=\mathrm{sh}\text{ et }\mathrm{sh}'=\mathrm{ch}.}$$

De plus, la positivité et la stricte croissance de l'exponentielle et le fait que $e^0=1$ font que :

$$\boxed{\mathrm{ch}(0)=1,\ \mathrm{sh}(0)=0,\ \forall x<0,\ \mathrm{sh}(x)<0,\ \forall x>0,\ \mathrm{ch}(x)>\mathrm{sh}(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x)\geqslant 1.}$$

Ainsi, les dérivées de ces fonctions et les limites de l'exponentielle nous permettent d'affirmer que :

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathrm{ch}\text{ est croissante sur }\mathbb{R}_+\text{, décroissante sur }\mathbb{R}_-\text{, supérieure ou égale à 1 partout, }\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{ch}(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{ch}(x)=+\infty.\\ \mathrm{sh}\text{ est strictement croissante sur }\mathbb{R}\text{, strictement inférieure à }\mathrm{ch}\text{, }\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{sh}(x)=+\infty\text{ et }\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{sh}(x)=-\infty.\end{array}}$$

Alors, la fonction ch réalise une bijection entre $\mathbb{R}_+$ et $[1;+\infty[$ et sh réalise une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$, ce qui fait que si on prend un point $M(x,y)_{\mathcal{R}}$ de la branche droite de l'hyperbole $\mathcal{H}$, on aura $y\in\mathbb{R}$ donc il existe un unique $t\in\mathbb{R}$ tel que $y=b\,\mathrm{sh}(t)$; on a ensuite $x=\sqrt{a^2(\mathrm{sh}^2(t)+1)}=\sqrt{a^2\,\mathrm{ch}^2(t)}=a\,\mathrm{ch}(t)$ d'après (0) et car $x\geqslant 0$. Ainsi, il existe bien un unique $t\in\mathbb{R}$ tel que $M(x,y)_{\mathcal{R}}=\big(a\,\mathrm{ch}(t),b\,\mathrm{sh}(t)\big)_{\mathcal{R}}$: ce qui prouve le paramétrage bijectif de la branche droite de l'hyperbole $\mathcal{H}$ à l'aide des fonctions ch et sh sur $\mathbb{R}$.

On peut donc maintenant définir deux nouvelles fonctions hyperboliques :

$$\begin{cases}\mathrm{th}: & \mathbb{R} & \to &]-1;1[\\ & x & \mapsto & \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}\end{cases}\quad\text{et}\quad\begin{cases}\mathrm{coth}: & \mathbb{R}^* & \to &]-\infty;1[\,\cup\,]1;+\infty[\\ & x & \mapsto & \dfrac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}\end{cases}$$

Ces deux fonctions sont, sur leur ensemble de définition, bijectives, continues, dérivables (autant de fois qu'on veut), avec (sur les ensembles de définition respectifs) grâce aux dérivées de ch et sh et la relation (0) :

$$\boxed{\mathrm{th}\text{ et }\mathrm{coth}\text{ sont impaires, }\mathrm{th}'(x)=\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)^2}=1-\mathrm{th}(x)^2,\ \mathrm{coth}'(x)=-\dfrac{1}{\mathrm{sh}(x)^2}=1-\mathrm{coth}(x)^2.}$$

Elles possèdent les graphes donnés en annexe : ils ont été tracés en MAPLE.

2. TRIGONOMÉTRIE HYPERBOLIQUE

IL FAUT APPRENDRE OU POUVOIR VITE RETROUVER CES FORMULES.

Elles découlent toutes de ce qu'on vient de voir, et des deux formules fondamentales suivantes qui se démontrent très facilement par calcul en se servant uniquement de l'équation fonctionnelle vérifiée par l'exponentielle, à savoir : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ e^{x+y} = e^x e^y$:

$$\boxed{\begin{array}{llcll} \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, & \mathrm{ch}(a+b) & = & \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b) & (1) \\ & \mathrm{sh}(a+b) & = & \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{sh}(b) & (2) \end{array}}$$

Par parité de ch et imparité de sh, on en déduit :

$$\boxed{\begin{array}{llcll} \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, & \mathrm{ch}(a-b) & = & \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) - \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b) & (3) \\ & \mathrm{sh}(a-b) & = & \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b) - \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{sh}(b) & (4) \end{array}}$$

De (1) et (2) viennent également (en prenant $a = b = x$ et comme $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$) :

$$\boxed{\begin{array}{llcll} \forall x \in \mathbb{R}, & \mathrm{ch}(2x) & = & \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x) = 2\,\mathrm{ch}^2(x) - 1 = 1 + 2\,\mathrm{sh}^2(x) & (1') \\ & \mathrm{sh}(2x) & = & 2\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(x) & (2') \end{array}}$$

On déduit de $(1')$ que

$$\boxed{\begin{array}{llcll} \forall x \in \mathbb{R}, & \mathrm{ch}^2(x) & = & \dfrac{\mathrm{ch}(2x)+1}{2} & (1'') \\ & \mathrm{sh}^2(x) & = & \dfrac{\mathrm{ch}(2x)-1}{2} & (2'') \end{array}}$$

et donc que

$$\boxed{\begin{array}{llcll} \forall x \in \mathbb{R}, & \mathrm{ch}(x)+1 & = & 2\,\mathrm{ch}^2\left(\dfrac{x}{2}\right) & (1''') \\ & \mathrm{ch}(x)-1 & = & 2\,\mathrm{sh}^2\left(\dfrac{x}{2}\right) & (2''') \end{array}}$$

Enfin, par définition de th et avec (1) et (2) (en divisant numérateur et dénominateur par $\mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b)$) :

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \left\{\begin{array}{lcll} \mathrm{th}(a+b) & = & \dfrac{\mathrm{th}(a)+\mathrm{th}(b)}{1+\mathrm{th}(a)\,\mathrm{th}(b)} & (5) \\ \mathrm{th}(a-b) & = & \dfrac{\mathrm{th}(a)-\mathrm{th}(b)}{1-\mathrm{th}(a)\,\mathrm{th}(b)} & (5') \end{array}\right.}$$

Ainsi, en prenant $a = b = x$, on obtient :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}(2x) = \frac{2\,\mathrm{th}(x)}{1+\mathrm{th}^2(x)} \quad (5'')}$$

En sommant (1) et (3) d'un coté, (2) et (4) de l'autre, on trouve :

$$\boxed{\begin{array}{llcll} \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, & \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) & = & \dfrac{1}{2}\big(\mathrm{ch}(a+b) + \mathrm{ch}(a-b)\big) & (6) \\ & \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b) & = & \dfrac{1}{2}\big(\mathrm{sh}(a+b) + \mathrm{sh}(a-b)\big) & (7) \end{array}}$$

Enfin, $(1) - (3)$ donne :

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b) = \frac{1}{2}\big(\mathrm{ch}(a+b) - \mathrm{ch}(a-b)\big) \quad (8)}$$

Pour finir, soit $(p, q) \in \mathbb{R}^2$; en appliquant (6), (7), (8) pour $a = \dfrac{p+q}{2}$, $b = \dfrac{p-q}{2}$, et compte tenu de l'imparité de sh, il vient :

$$\boxed{\begin{array}{lrcll} \forall (p,q) \in \mathbb{R}^2, & \mathrm{ch}(p) + \mathrm{ch}(q) & = & 2\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\mathrm{ch}\left(\dfrac{p-q}{2}\right) & (9) \\ & \mathrm{ch}(p) - \mathrm{ch}(q) & = & 2\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\mathrm{sh}\left(\dfrac{p-q}{2}\right) & (10) \\ & \mathrm{sh}(p) + \mathrm{sh}(q) & = & 2\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\mathrm{ch}\left(\dfrac{p-q}{2}\right) & (11) \\ & \mathrm{sh}(p) - \mathrm{sh}(q) & = & 2\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\mathrm{sh}\left(\dfrac{p-q}{2}\right) & (12) \end{array}}$$

Il n'est pas non plus inutile de connaître, notamment pour des paramétrages rationnels des hyperboles, les trois relations suivantes tirées de (1′), (2′) et du fait que : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}^2(t) = \dfrac{1}{1 - \mathrm{th}^2(t)}}$

$$\boxed{\begin{array}{lrcll} \forall x \in \mathbb{R}, & \mathrm{ch}(x) & = & \dfrac{1 + \mathrm{th}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{1 - \mathrm{th}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)} & (13) \\ & \mathrm{sh}(x) & = & \dfrac{2\,\mathrm{th}\left(\dfrac{x}{2}\right)}{1 - \mathrm{th}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)} & (14) \\ & \mathrm{th}(x) & = & \dfrac{2\,\mathrm{th}\left(\dfrac{x}{2}\right)}{1 + \mathrm{th}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)} & (15) \end{array}}$$

Cette dernière formule (15) ressemble d'ailleurs fort à (5″).