

Q1. $\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} X_{23} & L_{23} \\ Y_{23} & M_{23} \\ 0 & N_{23} \end{Bmatrix}_A$ (liaison glissière d'axe \vec{z})

$\{\mathcal{T}_{3 \rightarrow 4}\} = \begin{Bmatrix} X_{34} & L_{34} \\ Y_{34} & 0 \\ Z_{34} & N_{34} \end{Bmatrix}_B$ (liaison pivot d'axe \vec{y})

$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ 0 & N_{12} \end{Bmatrix}_C$ (liaison glissière d'axe \vec{z})

$\{\mathcal{T}_{pes. \rightarrow caisse}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -mg & 0 \end{Bmatrix}_G$

Q2. PFD appliqué à la caisse et projeté sur \vec{z} :

$$-mg - k(z_m - z_r) - c\dot{z}_m = m\ddot{z}_m \Rightarrow \ddot{z}_m + \frac{c}{m}\dot{z}_m + \frac{k}{m}\left(z_m + \frac{mg}{k}\right) = \frac{k}{m}z_r$$

Q3. Avec $z_{m0}(t) = z_m(t) + \frac{mg}{k}$: $\ddot{z}_{m0} + \frac{c}{m}\dot{z}_{m0} + \frac{k}{m}z_{m0} = \frac{k}{m}z_r$

Q4. $\ddot{z}_{m0} + 2\xi_0\omega_0\dot{z}_{m0} + \omega_0^2z_{m0} = \omega_0^2z_r$

avec par identification : $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et $\xi_0 = \frac{c}{2\sqrt{km}}$.

Donc dans le domaine de Laplace : $Z_{m0}(p)(p^2 + 2\xi_0\omega_0p + \omega_0^2) = \omega_0^2Z_r(p)$

d'où $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi_0}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$ avec $K = 1$ et ξ_0 et ω_0 donnés ci-dessus.

Q5. L'amortissement est bien plus élevé pour les suspensions magnétorhéologiques.

Remarque : Les courbes en gras semblent tracées pour une fonction de transfert de la forme $H'(p) = \frac{1 + 2\xi p/\omega_0}{1 + \frac{2\xi_0}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$ qui ne correspond pas à celle calculée précédemment

mais à celle qu'on obtient en ne négligeant pas \dot{z}_r dans l'expression de la force de friction.

Q6. Le mouvement du piston impose une variation des volumes des chambres situées en-dessous et au-dessus. Le fluide étant considéré incompressible, cette variation de volume induit nécessairement une variation de masse et donc un flux de fluide opposé au mouvement du piston.

Durant dt le volume de chaque chambre varie (en valeur absolue) de $V_0S_p dt$. D'où

$$D_v = V_0S_p$$

Q7. Condition d'adhérence : $v_z(r_1) = v_z(r_2) = 0$

Q8. $\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \frac{\Delta P}{\eta L} r \Rightarrow r \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{\Delta P r^2}{2\eta L} + A.$

En intégrant de r_1 à r : $v_z = \frac{\Delta P}{4\eta L}(r^2 - r_1^2) + A \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) \Rightarrow$

$v_z = C_1[(r^2 - r_1^2) - C_2 \ln\left(\frac{r}{r_1}\right)]$ avec $C_1 = \frac{\Delta P}{4\eta L}$ et $C_2 = \frac{r_1^2 - r_2^2}{\ln(r_2/r_1)}$ obtenue

grâce à la condition $v_z(r_2) = 0$.

Q9. $\ln \frac{r}{r_1} = \ln\left(1 + \frac{\gamma}{r_1}\right) = \frac{\gamma}{r_1} - \frac{\gamma^2}{2r_1^2} + o\left(\frac{\gamma^2}{r_1^2}\right)$. De même :

$\ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{e}{r_1} - \frac{e^2}{2r_1^2} + o\left(\frac{e^2}{r_1^2}\right)$ et donc :

$(\ln \frac{r_2}{r_1})^{-1} = \frac{r_1}{e} \left(1 + \frac{e}{2r_1} + \frac{e^2}{2r_1^2} + o\left(\frac{e^2}{r_1^2}\right)\right)$

O injecte dans (5) et on développe en ne gardant que les termes d'ordre ≤ 2 :

$$v_z(\gamma) = \frac{\Delta P}{4\eta L}(2r_1\gamma + \gamma^2 - 2r_1\gamma - 2e\gamma + \gamma^2) \Rightarrow v_z = \frac{\Delta P}{2\eta L}\gamma(\gamma - e)$$

Q10. Débit volumique à travers une couronne de largeur $d\gamma$:

$dD_v = v_z(\gamma) \times 2\pi(r_1 + \gamma)d\gamma \approx v_z(\gamma) \times wd\gamma$ donc :

Donc : $D_v = \int_0^e w \frac{\Delta P}{2\eta L}(\gamma^2 - \gamma e)d\gamma \Rightarrow D_v = -\frac{\Delta P w e^3}{12\eta L}$

Q11. AN : $D_v = -\frac{\pi \times 10^{-9}}{16} \Delta P \approx -1,963 \cdot 10^{-10} \Delta P$, valeur très proche de celle obtenue sans approximation. Le travail à l'ordre 2 est donc très satisfaisant.

Q12. $\vec{F}_p = (P(0)S_p - P(L)S_p)\vec{u}_z \Rightarrow \vec{F}_p = -\Delta P S_p \vec{u}_z$

Q13. La densité surfacique de la force de viscosité étant uniforme sur chaque des parois internes, la norme de la force de viscosité s'exprime (avec $r_1 \approx r_2 \approx r_m$) :

$$F_v = 2\pi r_m L \eta \left(\frac{dv_z}{d\gamma}(0) - \frac{dv_z}{d\gamma}(e) \right)$$

En ordre de grandeur : $F_v \sim r_m L \eta \frac{\Delta P}{2\eta L} e \sim r_m e \Delta P \ll S_p \Delta P = \|\vec{F}_p\|$. La contribution de la viscosité est donc négligeable.

Q14. $\Delta P = -D_v \frac{12\eta L}{w e^3} = \frac{-V_0}{S_p} \frac{12\eta L}{w e^3}$

Comme $\vec{F} = \vec{F}_p = -\Delta P S_p \vec{u}_z$, $\vec{F} = -\frac{12\eta L S_p^2}{w e^3} V_0 \vec{u}_z = -\alpha \vec{V}$

Q15. AN : $\alpha = 160\pi = 500$ kg/s, sensiblement inférieure au standard. La force de pression seule n'est donc pas suffisante pour réaliser une suspension satisfaisante.

Q16. Les particules ferromagnétiques s'aimantent dans la direction du champ magnétique et sont assimilables à des dipôles magnétiques de même orientation. L'interaction dipôle-dipôle les poussent ensuite à s'agréger, le pôle sud d'une particule s'accolant au pôle nord de sa voisine.

Q17. La réponse est linéaire pour $V \leq 100$ (mm/s). C'est à peu près acceptable, 100 mm/s étant justement la vitesse caractéristique du piston (cf données en début de partie 3).

Q18. Le temps de formation est faible devant le temps de réponse exigée par le cahier des charges pour le système complet, c'est donc acceptable.

Q19. cours.

Q20. cours.

Q21. cours.

Q22. cours $\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 n i \vec{u}_z$ avec \vec{u}_z axe du solénoïde et en admettant que le solénoïde est sans noyau de fer (non précisé).

Q23. Les lignes de champ à l'intérieur du solénoïde sont des droites parallèles à Oz.

Q24. $\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B}$ est à flux conservatif. L'évasement des lignes de champs traduit une diminution de l'intensité du champ, et réciproquement pour un resserrement.

Q25. $\varphi = B\pi\delta^2$, \vec{B} étant uniforme et orthogonal aux sections.

Q26. $\Phi_p = N_t \varphi = N_t \pi \delta^2 \mu_0 N_t i / l = L_p i$ avec $L_p = \frac{\mu_0 N_t^2 \pi \delta^2}{l}$

Q27. Les champs \vec{H} et \vec{B} sont bien colinéaires à l'axe de la bobine qui les crée et au matériau magnétique qui les canalise.

L'uniformité le long de la branche centrale de section constante se justifie par la conservation du flux magnétique.

Enfin, comme l'entrefer est fin ($e \ll h$ et r_m) et que les lignes de champ sortent orthogonalement à la surface du ferromagnétique, on peut y négliger l'évasement des tubes de champ, d'où l'uniformité de B et H dans l'entrefer.

Q28. $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$

Q29. Conservation du flux magnétique : $B_1 S_1 = \pi r_m h B_3$

Q30. $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_C \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_r} \cdot d\vec{l}$

Comme $\mu_1 \gg \mu_2$, on peut négliger la circulation hors des deux entrefers :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2eH_3$$

Q31. Théorème d'Ampère sur le contour C : $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2eH_3 = Ni$ d'où $H_3 = \frac{Ni}{2e}$.

Comme α dépend de H_3 , i permet de contrôler α .

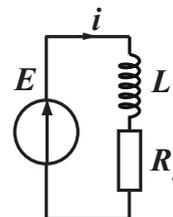
Q32. $B_3 = \mu_0 \mu_2 H_3$ donc le champ dans la bobine $B_1 = \mu_2 \mu_0 \frac{Ni\pi r_m h}{2eS_1}$ est μ_2 fois plus grand qu'en l'absence de fluide ; il en est donc de même pour l'inductance $L' = NS_1 B_1 / i$ donc $L' = \mu_2 L_0$.

Q33. On choisit un modèle série :



L' modélise l'autoinduction et R_b les pertes cuivres dans l'enroulement et éventuellement les pertes fer (négligées d'après l'énoncé).

Q34.



Loi de maille : $E = R_b i + L' \frac{di}{dt}$

$$\text{d'où } \frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L'} \text{ avec } \tau = \frac{L'}{R_b}$$

Q35. En relevant les temps de réponse à 63 % : $\frac{\tau_{\text{avec fluide}}}{\tau_{\text{sans fluide}}} \approx 2,5 = \mu_2$. On retrouve bien

$$L' = \mu_2 L_0.$$

Remarque : La modélisation du système avec fluide magnétorhéologique est discutable : le temps de réponse purement électrique (avec L' supposée fixe) est d'environ 3 ms, ce qui est l'ordre de grandeur de formation des agrégats (cf Q 18.) et donc d'établissement de la valeur de L' .

Q36. Le temps de réponse à 5 % du système comprenant le fluide est de $t_{5\%} = 3\tau \approx 9$ ms, sensiblement inférieur au temps de réponse imposé par le cahier de charges.

Q37. Le système linéaire est un passe-bas d'ordre 2 (-40 dB/décade en haute fréquence). Sa fonction de transfert est de la forme :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$$

Le gain statique est $K = 1$ et la pulsation propre, abscisse de l'intersection des asymptotes, $\omega_0 = 40$ rad/s.

Q38. $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2z^2}$ d'où $z = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\omega_r^2}{\omega_0^2} \right)}$.

$$\text{AN : } z = \sqrt{0,1275/2} = 0,25 = z$$

Par lecture de l'abaque : $t_{5\%} \omega_0 \approx 8$ d'où $t_{5\%} = 0,2$ s.

Q39. En relevant les temps de réponse à 63 % : $\tau_{\text{capa}} \approx 1$ ms et $\tau_{\text{opt}} = 0,1$ ms.

Q40. L'excitation est de 10 mm d'amplitude. Sachant que le système présente un gain unitaire en basse fréquence (et de 9 dB à la résonance), la plage de fonctionnement du capteur capacitif (5 mm) est donc insuffisante. La plage du capteur optique (600 mm) convient ; de plus, il est bien plus rapide, permettant de pousser l'étude fréquentielle à des fréquences plus hautes.

Q41. Tant que $\omega \ll 1/\tau_{opt}$, le capteur peut être supposé instantané, ce qui permet de déterminer la réponse fréquentielle jusqu'à 1 krad/s comme dans la sous-partie précédente.

Q42. Fonction de transfert pour $\omega \ll 1/\tau_{opt}$: $H_{opt} = \frac{K_{opt}}{1 + \tau_{opt}p} \approx K_{opt}$ avec $K_{opt} = 14$ SI (d'après la réponse indicielle). Ce capteur est un "gain pur".

Q43.
$$FTBO(p) = \frac{K}{p(1 + \tau_e p)}$$

Du fait de l'intégration, ce système ne présente pas d'erreur statique.

Q44. $G_{dB} = 0$ quand $\Phi \approx -162^\circ \Rightarrow \boxed{M\Phi = 18^\circ}$

Q45. $\Phi = -135^\circ$ pour $\omega \approx 10$ rad/s. Donc $20 \log(K_p) = -G_{dB}(10 \text{ rad/s}) = -18 \text{ dB}$, soit ¹ :

$$\boxed{K_p \approx \frac{1}{8}}$$

1. La calculatrice étant interdite, on remarque que $18 \text{ dB} = 3 \times 6 \text{ dB}$ donc $K_p = 2^{-3}$.