SESSION 2015 CCP ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI
PHYSIQUE - CHIMIE

Durée : 4 heures

Corrigé proposé par Pierre-Yves Vialatte (PSI* Jean Perrin Marseille)
Pour toute erreur ou suggestion : vialatte812@neuf.fr

PARTIE PHYSIQUE

1) Le diazote N_2 (environ 80% en moles) et le dioxygène O_2 (environ 20%).
$M_{air} = 0{,}80\, M_{N2} + 0{,}20\, M_{O2} = 28{,}8.10^{-3}$ kg.mol^{-1}.

2) La particule d'air de volume dV située entre z et z+dz est à l'équilibre sous l'effet de son poids : $\rho_{air}\, dV\, \vec{g}$ et des forces de pression : $-\overrightarrow{grad}\, P\, dV$, donc : $-\overrightarrow{grad}\, P + \rho_{air}\, \vec{g} = 0$

En projetant sur l'axe z : $\dfrac{dP}{dz} = -\rho_{air}\, g$

3) La loi des gaz parfaits donne : $P\, M_{air} = \rho_{air} RT$, avec ici $T = T_0$.

En éliminant ρ_{air} avec la relation du **2) :** $\dfrac{dP}{P} = -\dfrac{g\, M_{air}}{RT_0} dz$

Par intégration, et en utilisant : $P=P_0$, pour z=0, il vient : $\boxed{P(z) = P_0 \exp(-z/H)}$ avec : $H = \dfrac{R\, T_0}{g\, M_{air}}$.

4) L'atmosphère a donc une épaisseur de l'ordre de H (ou de quelques H) avec <u>H = 8800 m</u>

5) **a)** On reprend la relation du **3)** mais en utilisant $T(z) = T_0 - \lambda z$ à la place de T_0.

On obtient : $\dfrac{dP}{P} = -\dfrac{g\, M_{air}}{R(T_0 - \lambda z)} dz$, qui s'intègre en : $\ln(P) = \dfrac{g\, M_{air}}{R\lambda} \ln\left(1 - \dfrac{\lambda z}{T_0}\right) + Cte$

Comme $P=P_0$, pour z=0, il vient : $Cte = \ln(P_0)$ et : $\boxed{P = P_0 \exp\left(\dfrac{g\, M_{air}}{R\lambda} \ln\left(1 - \dfrac{\lambda z}{T_0}\right)\right) = P_0 \left(1 - \dfrac{\lambda z}{T_0}\right)^{\frac{g\, M_{air}}{R\lambda}}}$

b) On retrouve jusqu'à 14 km d'altitude, avec cette formule les mêmes résultats que ceux fournis dans le tableau, avec trois chiffres.
Le modèle proposé est donc pertinent jusqu'à cette altitude avec une précision de l'ordre de 0,5 % pour le calcul de la pression.

6) Une particule d'air qui change d'altitude se comporte comme un gaz parfait en évolution adiabatique réversible, et obéit donc à la loi de Laplace : $\dfrac{P}{\rho_{air}^{\gamma}} = Cte = \dfrac{P_0}{\rho_{0\,air}^{\gamma}}$ ou encore, compte tenu de la loi des gaz parfaits : $T^{\gamma} P^{1-\gamma} = T_0^{\gamma} P_0^{1-\gamma}$ ou bien sous forme différentielle : $\gamma \dfrac{dT}{T} + (1-\gamma)\dfrac{dP}{P} = 0$

En combinant avec la relation du **3)** : $\dfrac{dP}{P} = -\dfrac{g\, M_{air}}{RT} dz$, on obtient (calcul non demandé mais facile) :

$$\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\frac{dT}{T} = -\frac{g\, M_{air}}{RT} dz \Rightarrow \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right) dT = -\frac{g\, M_{air}}{R} dz \text{ qui s'intègre en :}$$

$$T = T_0\left[1 - \left(\frac{\gamma-1}{\gamma T_0}\right)\frac{g\, M_{air}}{R} z\right] = T_0\left[1 - \frac{z}{z_2}\right] \quad \text{avec : } z_2 = \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\frac{RT_0}{g\, M_{air}} \quad \text{AN : } z_2 = 30{,}9 \text{ km}$$

7) **a)** La formule précédente donne à z = 500 m une température de 295 K, soit 22°C.

Par interpolation entre les deux valeurs des données à 20°C et à 25°C, la pression de vapeur saturante vaut à 22°C : $\underline{P_{sat} = 2670\ \text{Pa}}$

b) Le tableau donné en **5)** donne à 500 m une pression totale de 94 500 Pa, ce qui correspond, si l'eau est supposée uniquement sous forme de vapeur, à une pression partielle d'eau vapeur (le mélange air-eau est un mélange idéal de gaz parfaits on note $x_{eau} = 0{,}04$ la fraction molaire de l'eau dans le mélange) : $P_{eau} = x_{eau}\, P_{totale} = 0{,}04 \,.\, 94500 = 3780\ \text{Pa} > P_{sat}$.
L'eau ne peut donc pas se trouver en phase vapeur à cette température et à cette pression (cela n'est possible que si $P_{eau} < P_{sat}$). L'eau liquide devrait donc coexister avec la vapeur d'eau à 500 m et la condensation devrait ainsi commencer avant 500 m.

c) Si la condensation n'a pas eu lieu pour $P_{eau} > P_{sat}$, c'est que l'équilibre thermodynamique n'est pas assuré. Le système est donc hors équilibre pour des raisons cinétiques (le changement d'état est trop lent et n'a pas pu se faire). Le système est métastable.
Dans le cas du retard au changement d'état liquide solide, on parle de surfusion.

8) **a)** Soit $V=4/3\,\pi\, r^3$ le volume de la gouttelette. Elle subit la résultante des forces de pression $-\overrightarrow{\text{grad}}\, P\,.V$, son poids : $\rho_{eau} V \vec{g}$, et la force de frottement visqueux : $\vec{f} = -\,6\pi\,\eta_{air} r\,\vec{v}$.

b) La poussée d'Archimède est la résultante des forces de pression à l'équilibre du fluide. Ces forces de pression ont été prises en compte dans le **a)**.

c) La deuxième loi de Newton appliquée à la gouttelette donne :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}\, P\,.V + \rho_{eau} V \vec{g} - 6\pi\,\eta_{air} r\,\vec{v} = \rho_{eau} V \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Si on considère que le champ des pressions de l'air est peu affecté par la goutte et conserve ainsi la répartition d'équilibre, alors, comme dans le **2)** : $-\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \rho_{air}\, \vec{g} = 0$. Il vient alors :

$$(\rho_{eau} - \rho_{air})\, \frac{4}{3}\pi r^3 \vec{g} - 6\pi\,\eta_{air} r\,\vec{v} = \rho_{eau}\, \frac{4}{3}\pi r^3\, \frac{d\vec{v}}{dt}$$

9) On obtient une vitesse limite ($\vec{v} = \overrightarrow{v_{lim}}$) lorsque $\dfrac{d\vec{v}}{dt}=0$, et avec l'équation précédente :

$\overrightarrow{v_{lim}} = (\rho_{eau} - \rho_{air})\, \dfrac{2}{9}\dfrac{r}{\eta_{air}}\vec{g}$ AN : $\underline{v_{lim} = 1{,}21\ \text{cm/s}}$

10) La constante de temps de l'équation du **8c)** est l'ordre de grandeur du temps nécéssaire pour atteindre v_{lim} . Elle vaut : $\tau = \dfrac{\rho_{eau} V}{6\pi\,\eta_{air} r} = \dfrac{2}{9}\dfrac{\rho_{eau} r^2}{\eta_{air}}$ AN : $\tau \approx 2\,\text{ms}$

11) En faisant l'approximation que la vitesse limite est atteinte quasi-instantanément, le mouvement est rectiligne uniforme à la vitesse v_{lim} et sa durée vaut : $\Delta t = \dfrac{z'}{v_{lim}} = 1{,}65.10^5\ \text{s} \approx 46\,\text{h}$. (avec z'=2000 m)
Le mouvement des gouttes est donc très lent vers le bas, même.

12) En l'absence de courant ascendant, les gouttes qui tomberaient se trouveraient au contact de l'air plus chaud en bas, et commenceraient à se vaporiser. Leur rayon décroissant ralentirait encore la chute, ce qui contribuerait à la stabilité mécanique du nuage.
Rq : d'autres arguments plus subtils peuvent aussi être avancés…

13) Tout plan contenant le point O est un plan de symétrie de la distribution de charge.
Au point M, le vecteur champ électrique qui est un vecteur axial (vrai vecteur) appartient à l'intersection des plans contenant O et M ; il est donc suivant le vecteur $\overrightarrow{OM}$, c'est-à-dire suivant $\overrightarrow{e_r}$, premier vecteur de base des sphériques. Il s'écrit ainsi : $\vec{E} = E(r,\theta,\varphi)\,\overrightarrow{e_r}$
Par ailleurs, il y a invariance de E par rapport aux coordonnées θ et φ , donc : $\vec{E} = E(r)\,\overrightarrow{e_r}$

14) **a)** On applique le théorème de Gauss à une sphère de rayon r passant par M (entre les armatures) OOoù on calcule le champ. La charge intérieure est donc celle de l'armature intérieure, soit Q.
Le flux du champ électrique à travers cette sphère vaut $E(r).4\pi\, r^2$.

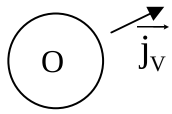
Le théorème de Gauss s'écrit donc : $E(r).4\pi\, r^2 = Q/\varepsilon_0$ soit : $\vec{E}(r)=\dfrac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0\, r^2}\vec{e}_r$

b) Il faut calculer la circulation du champ sur un chemin entre les armatures intérieure et extérieure de deux façons : $\int_1^2 \vec{E}.\vec{dl}=\int_1^2 -\overrightarrow{grad}\,V.\vec{dl}=\int_1^2 (-dV)=V_1-V_2$

et $\int_1^2 \vec{E}.\vec{dl}=\int_1^2 \dfrac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0\, r^2}\vec{e}_r.\vec{dl}=\int_1^2 \dfrac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0\, r^2}dr=\dfrac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}\right)$. L'égalité donne : $\dfrac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}\right)=V_1-V_2$

c) Par définition de C : $Q=C(V_1-V_2)$; on déduit de **b)** : $\boxed{C=\dfrac{4\pi\,\varepsilon_0}{\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}\right)}}$

15) Si Q>0, le champ électrique est radial vers l'extérieur et crée un vecteur densité de courant dans le même sens :



16) On reprend la formule du **14 c)** avec R_1=6370 km, R_2=6370+80 km, ce qui donne : <u>C=57,1 mF</u>

17) En prenant E = 110 V/m (valeur moyenne par beau temps sensiblement constante dans l'électrosphère sur 80 km) on obtient : $U=V_1-V_2 \approx E.e=110.\ 80000=8{,}8\,MV$.

L'énergie stockée est alors : $W=\dfrac{1}{2}CU^2=220\,GJ$

18) En sens inverse : par beau temps, il est radial vers l'intérieur (du + vers le – comme sur la figure 1 de l'énoncé), et par temps d'orage, de la terre vers le nuage (encore du + vers le – comme sur la figure 3).

19) **a)** L'éclair correspond à un claquage diélectrique interne au nuage. Un coup de foudre concerne sans doute plutôt la Terre (même si le vocabulaire n'est pas toujours absolu).
b) Non : elle peut descendre ou monter, suivant le signe des charges mises en jeu au niveau de la terre lors de la décharge avec le nuage.

20) Le champ vaut 20 kV/m sur une épaisseur de 2000 m entre terre et nuage, soit une différence de potentiel de : U = 20000. 2000 = 40 MV.

21) La charge mise en jeu vaut environ (en supposant le courant constant) :
$Q \approx I.\Delta t=50\,000.\ 10^{-2}=500\ C$.

L'énergie véhiculée vaut alors : $W=Q.U=500.\ 40.10^6=20\,GJ$
Cette énergie ne mérite pas d'être récupérée. En effet, ce serait extrêmement compliqué pour une énergie somme toute modeste (20 GJ est l'énergie délivrée par une tranche de centrale nucléaire de 1 GW pendant 20 secondes seulement).

22) **a)** loi au nœud : $I(x,t)=I(x+dx,t)+c\,dx\dfrac{\partial V}{\partial t}$ qui se développe en : $-\dfrac{\partial I}{\partial x}=c\dfrac{\partial V}{\partial t}$

Loi aux mailles : $V(x,t) = V(x+dx,t) + l dx\dfrac{\partial I}{\partial t}$ qui se développe en : $-\dfrac{\partial V}{\partial x}=l\dfrac{\partial I}{\partial t}$

b) On éliminer I en dérivant la première équation par rapport à t, et la deuxième par rapport à x :
$-\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}=-\ lc\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2}\Rightarrow\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}-\ lc\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2}=0$ qui est une équation de D'Alembert scalaire.

On obtient la même équation pour I en éliminant V : $\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - lc\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = 0$

23) **a)** Il peut donc se propager sur la ligne une onde de tension et une onde de courant à la vitesse de propagation : $\frac{1}{\sqrt{lc}} = 2,6.10^8$ m/s (de l'ordre de grandeur de la vitesse de la lumière dans le vide)

b) et c) Après Δt_0 =1 ms, ces ondes ont progressé de $d = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{lc}} = 2,6.10^5$ m = 260 km

24) Le système choisi est une portion de ligne de longueur L parcouru par l'onde de courant.
Pendant la durée T du coup de foudre, la ligne est parcourue par un courant de l'ordre de I/2.
Ce courant échauffe la ligne par effet Joule, et celle-ci voit sa température augmenter.
Hypothèses simplificatrices : le courant reste du même ordre de grandeur pendant la durée Δt : on fait le calcul en continu, même s'il s'agit en fait d'une impulsion qui se propage.
On néglige l'effet de peau, en raisonnant comme si la densité de courant était uniforme dans la ligne (ce qui serait d'ailleurs le cas en courant continu). La résistance choisie pour le fil est donc celle d'un cylindre parcouru par un courant continu.
On suppose qu'il n'y a pas de perte thermique au niveau de la ligne : toute l'énergie dissipée par effet Joule sert donc à échauffer la ligne, ce qui se traduit dans le premier principe appliqué au système.

25) Pour calculer la résistance, il faut la conductivité du métal : $\gamma_{mét}$
Les paramètres géométriques sont fixés : longueur L considérée et section $S = \pi R^2$
Enfin, il faut la capacité thermique massique c_p du métal (supposée indépendante de la température) pour calculer la variation d'enthalpie du système. Il faut aussi sa masse volumique $\rho_{mét}$ pour connaître sa capacité thermique totale *via* sa masse m

26) résistance de la portion de ligne : $R_0 = \frac{1}{\gamma_{mét}}\frac{L}{\pi R^2}$

Chaleur reçue : $W = R_0\left(\frac{I}{2}\right)^2 = \frac{1}{\gamma_{mét}}\frac{L}{\pi R^2}\left(\frac{I}{2}\right)^2 \Delta t$

Variation d'enthalpie : $C_p\,\Delta T_{foudre} = m\Delta T_{foudre} = \pi R^2 L\,\rho_{mét}\,c_p \Delta T_{foudre}$

Le premier principe donne :

$$\pi R^2 L\,\rho_{mét}\,c_p\ \Delta T_{foudre} = \frac{1}{\gamma_{mét}}\frac{L}{\pi R^2}\left(\frac{I}{2}\right)^2 \Delta t \ \Rightarrow\ \Delta T_{foudre} = \frac{1}{\gamma_{mét}\ \rho_{mét}\ c_p}\frac{1}{\pi^2 R^4}\left(\frac{I}{2}\right)^2 \Delta t$$

L'application numérique (non demandée donne une valeur de l'ordre de un centième de degré.

27) **a)** j est en $A.m^{-2}$.

b) Le courant I est le flux de $\vec{j}$ à travers une demi sphère de rayon $r>R_b$ sur laquelle le module j est uniforme : $I = j2\pi r^2 \Rightarrow j(r) = \frac{I}{2\pi r^2}$

28) **a)** La loi d'Ohm locale dans le sol : $\vec{j} = \gamma_{sol}\vec{E}$ donne le champ dans le sol : $E(r) = \frac{j(r)}{\gamma_{sol}} = \frac{I}{\gamma_{sol}\ 2\pi r^2}$

b) $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$ projeté sur $\vec{e_r}$ donne : $E = -\frac{dV}{dr} = \frac{I}{\gamma_{sol}\ 2\pi r^2}$ qui s'intègre, en tenant compte de V=0 à l'infini, en : $V(r) = \frac{I}{\gamma_{sol}\ 2\pi r}$

29) **a)** on se place à la limite de l'électrocution ; entre les deux pieds on trouve la différence de potentiel maximale supportable par la loi d'Ohm : $U_{max} = R_h I_{max}$

Par la question précédente, cette différence de potentielle vaut :

$$U_{\max} = V(D) - V(D+a) = \frac{\mathrm{I}}{\gamma_{\text{sol}}\ 2\pi}\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D+a}\right) = \frac{\mathrm{I}}{\gamma_{\text{sol}}\ 2\pi}\frac{a}{D(D+a)}$$

On en déduit la relation demandée : $R_h I_{\max} = \dfrac{\mathrm{I}}{\gamma_{\text{sol}}\ 2\pi}\dfrac{a}{D(D+a)}$

b) Pour D>>a : D+a ≈ D et $D \approx \sqrt{\dfrac{\mathrm{I\,a}}{R_h I_{\max}\gamma_{\text{sol}}\ 2\pi}}$

c) AN : <u>D = 110 m</u>

d) Toutes choses égales par ailleurs, les grands animaux sont plus affectés car leurs pattes sont plus espacées, ce qui les expose à des différences de potentiel supérieures, pour des résistances assez peu différentes.

30) **a)** La couche comprise entre r et r+dr est assimilable à un cylindre de section S= $2\pi r^2$ et de longueur dr. Sa résistance est donc : $\mathrm{dR_C} = \dfrac{1}{\gamma_{\text{mét}}}\dfrac{\mathrm{dr}}{2\pi \mathrm{r}^2}$

b) On en déduit en sommant les résistance en série pour former la coque hémisphériques :

$$\mathrm{R_C} = \int_{R\text{int}}^{\mathrm{Re}xt} \mathrm{dR_C} = \frac{1}{2\pi\gamma_{\text{mét}}}\int_{R\text{int}}^{\mathrm{Re}xt}\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{r}^2} = \frac{1}{2\pi\gamma_{\text{mét}}}\left(\frac{1}{R_{\text{int}}} - \frac{1}{R_{ext}}\right)$$

31) **a)** Le courant traverse le métal et le sol : les deux résistances sont en série : $R_{glob} = R_{métal} + R_{sol}$

$R_{métal}$ se déduit de la question précédente : $R_{métal} = \dfrac{1}{2\pi\gamma_{\text{mét}}}\left(\dfrac{1}{R_a} - \dfrac{1}{R_b}\right)$

On obtient R_{sol} par application de la loi d'Ohm et en utilisant la question **28)** :

$$R_{sol} = \frac{\mathrm{V(R_b) - V(r{=}\infty)}}{\mathrm{I}} = \frac{\mathrm{V(R_b)}}{\mathrm{I}}\frac{1}{\gamma_{\text{sol}}\ 2\pi\,\mathrm{R_b}}$$

Finalement : $R_{glob} = R_{métal} + R_{sol} = \dfrac{1}{2\pi\gamma_{\text{mét}}}\left(\dfrac{1}{R_a} - \dfrac{1}{R_b}\right) + \dfrac{1}{2\pi\gamma_{\text{sol}}\ \mathrm{R_b}}$

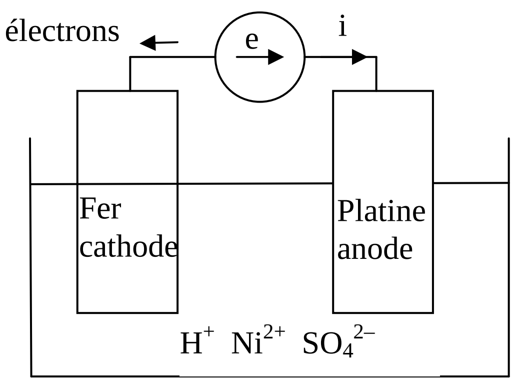
b) AN : <u>R_{glob} = 47 Ω</u>

c) La législation n'est pas respectée. Pour diminuer la résistance de terre, il faut surtout diminuer R_{sol} qui est le terme prédominant, ce qui se fait en augmentant R_b.
Ceci revient augmenter la surface de contact métal-sol : on peut le réaliser en utilisant de grosses pièces métalliques, ou mieux, des grilles ou des armatures métalliques au contact de la terre.

PARTIE CHIMIE

32) Anode : seule l'eau peut s'oxyder suivant : $2\ H_2O = O_{2(gaz)} + 4\ H^+ + 4\ e^-$
Cathode : Réduction des ions nickel : $Ni^{2+} + 2\ e^- = Ni_{\ (solide)}$
Réduction de l'eau (milieu acide) : $2\ H^+ + 2\ e^- = H_{2\ (gaz)}$
Les ions sulfates SO_4^{2-} sont électroinertes.

33)



34) Potentiel du couple O_2/ H_2O à l'anode : 1,23 – 0,06 pH= 0,93 V
Potentiel du couple Ni^{2+}/Ni à la cathode : –0,23 V
Potentiel du couple H^+/H_2 à la cathode : 0 – 0,06 pH = –0,30 V
La plus petite différence entre potentiel d'anode et de cathode correspond aux couples O_2/ H_2O et Ni^{2+}/Ni. On prévoit donc thermodynamiquement l'apparition de dioxygène à l'anode et un dépôt de nickel à la cathode à partir d'une fem appliquée : U_{min} = 0,93 – (–0,23) = 1,16 V

35) **a)** La surtension U_r peut correspondre à une chute de potentiel ohmique due à la résistance des fils, des électrodes, et surtout, de l'électrolyte.
b) On ajoute la tension minimale thermodynamique et les surtensions cinétiques et ohmique :
$U_{travail} = U_{min} + \eta_C - \eta_A + U_r = 1{,}16 + 0{,}6 - (-0{,}1) + 0{,}15 = 2{,}01$ V

36) La charge passant dans l'électrolyseur en Δt=1 heure avec le courant i vaut : $Q = i\,\Delta t$
Le nombre de moles d'électrons mis en jeu vaut : $n_e = Q/F$ (F = 1 Faraday)
Le nombre de moles de nickel produites (une mole pour deux moles d'électrons) $n_{Ni} = Q/(2F)$
La masse de nickel obtenue : $m_{Ni} = n_{Ni} \,.\, M_{Ni} = i\,\Delta t/(2F) \,.\, M_{Ni}$ = 1,97 g

37) Tous les électrons ne sont pas utilisés pour produire du nickel. Certains sont produits pour produire du dihydrogène : le rendement faradique n'est pas optimal.

38) **a)** AB : $Ni^{2+} + 2\,e^- = Ni_{\,(solide)}$ (BC est le palier de diffusion des ions Ni^{2+})
CD : $2\,H^+ + 2\,e^- = H_{2\,(gaz)}$
FG : $2\,H_2O = O_{2(gaz)} + 4\,H^+ + 4\,e^-$
b) Le rendement faradique est amélioré en réduisant la réaction sur la partie FG. Il faut donc diminuer légèrement la tension du générateur pour rester sur BC.
Cela peut réduire le courant et donc la vitesse de production de nickel.